

ZWEI-LEVEL-VERFAHREN ZUR LÖSUNG  
LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME MIT  
NICHTSINGULÄRER UNSYMMETRISCHER  
M-MATRIX

Diplomarbeit  
von  
Florian Goßler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät II - Institut für Mathematik

Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin

bei Prof. Dr. Reinhard Nabben  
im Studiengang Diplom Mathematik

Berlin, 1. Oktober 2007



Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung  
versichere ich an Eides Statt

Berlin, den 1. Oktober 2007



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Notationen	4
2.2	Grundlagen aus der linearen Algebra	6
2.2.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	6
2.2.2	Normen	7
2.3	M-Matrix	9
2.4	Schurkomplement	10
2.5	Tupel, Splittings	11
2.5.1	Typen von Splittings und Tupels	11
2.5.2	Grundlegende Sätze mit Splittings	12
2.5.3	Normabschätzung zwischen schwach reg. Splittings vom ersten Typ	13
2.5.4	Normabschätzung zwischen schwach reg. Splittings vom zweiten Typ	13
2.5.5	Vergleich zwischen schwach regulären Splittings verschiedener Typen	13
<b>3</b>	<b>Iterative Verfahren</b>	<b>14</b>
3.1	Splittingsverfahren	14
3.2	Zwei-Level-Verfahren, Mehrgitter-Verfahren	16
<b>4</b>	<b>Das Verfahren von Ruge und Stüben</b>	<b>20</b>
4.1	Motivation	20
4.2	Ruge- und Stüben-Coarser - 1.Teil	22
4.3	Ruge- und Stüben-Coarser - 2.Teil und Wahl der Interpolationsgewichte	23
4.4	AMG von Ruge und Stüben in Matrixschreibweise	25
<b>5</b>	<b>MAMLI, RMAMLI, SMAMLI</b>	<b>32</b>
5.1	Die Iterationsmatrizen	32
5.2	Konvergenz von MAMLI, RMAMLI, SMAMLI	34
5.3	MAMLI, RMAMLI, SMAMLI als Splittings	35
<b>6</b>	<b>Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit durch zusätzlichen Glätter</b>	<b>36</b>
6.1	Vererbung von Splittingeigenschaften	36
6.1.1	Schwach reguläre Tupel/Splittings vom ersten Typ	36
6.1.2	Schwach reguläre Tupel/Splittings vom zweiten Typ	37
6.1.3	Nichtnegative Tupel/Splittings	39
6.2	Konvergenz vom Iterationsverfahren durch Splittings	40
6.2.1	Vorglätter	40
6.2.2	Nachglätter	40
6.3	Vergleichsätze	42
6.3.1	Vorglätter	42
6.3.2	Nachglätter	43
6.3.3	Kombination von Vor-und Nachglätter	45
6.4	Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter	46
6.4.1	Einführung	46

6.4.2	Konvergenz . . . . .	49
6.4.3	Vergleich: (R/S)MAMLI - (R/S)MAMLI mit zusätzlichem Glätter . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Spezielle Approximationen</b>	<b>60</b>
7.1	Einführung . . . . .	60
7.2	MAMLI-Verfahren . . . . .	62
7.2.1	Der grundlegende Konvergenzsatz . . . . .	62
7.2.2	Wahl der Matrix $B$ . . . . .	67
7.2.3	Approximation in der Prolongation und in der Restriktion . . . . .	71
7.3	RMAMLI-Verfahren . . . . .	79
7.4	Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse . . . . .	82
7.5	Verallgemeinerung mit Hilfe der Galerkin-Approximation . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Konvergenz des Verfahren von Ruge und Stüben</b>	<b>97</b>
8.1	Klassisches Verfahren von Ruge und Stüben . . . . .	97
8.2	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben . . . . .	103
<b>9</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>107</b>
9.1	Vergleich der Verfahren . . . . .	107
9.2	Untersuchung des klassischen Verfahren von Ruge und Stüben . . . . .	111
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>114</b>
10.1	Zusammenfassung der Diplomarbeit . . . . .	114
10.2	Ausblick . . . . .	114
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>115</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>117</b>

# 1 Einleitung

Eine der Hauptaufgaben der numerischen linearen Algebra ist die Lösung linearer Gleichungssysteme der Form

$$Ax = b. \tag{1.1}$$

In vielen Bereichen der numerischen Mathematik wird die Lösung von (1.1) benötigt, wie etwa bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen, als auch bei linearen Ausgleichsproblemen.

In dieser Arbeit werden ausschließlich eindeutig lösbare Systeme der Form (1.1) betrachtet, d.h. die Koeffizientenmatrix  $A$  ist nichtsingulär.

Die Schwierigkeit liegt nicht in der Bestimmung der Lösung von (1.1), welche durch  $x = A^{-1}b$  gegeben ist, sondern darin, die Lösung schnell und preiswert zu bestimmen. Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Methoden zur Bestimmung der Lösung entwickelt.

Zeitlich wurden zuerst die **direkten Verfahren** erforscht. Eines der ersten und bekanntesten ist die **Gaußelimination**. Hier wird die Lösung  $x = A^{-1}b$  durch simultane Umwandlung der Matrix  $A$  und der rechten Seite  $b$  berechnet. Dies bedeutet numerisch, dass in jedem Schritt die komplette Matrix  $A$  gespeichert werden muss. Das führt bei sehr großen Gleichungssystemen zu Speicherplatzproblemen und weiterhin ist die Gaußelimination in der Regel zu zeitintensiv.

Eine weitere große Klasse von Lösungsverfahren sind die **iterativen Verfahren**. Bei diesen Verfahren beginnt man im Allgemeinen mit einem Startvektor  $x_0$  und berechnet in jedem Iterationsschritt eine approximierete Lösung  $x_{k+1}$  mit der Vorschrift

$$x_{k+1} = Tx_k + c, \tag{1.2}$$

wobei  $T$  die Iterationsmatrix darstellt. Um die Lösung von (1.1) zu berechnen, ist es notwendig, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = A^{-1}b \tag{1.3}$$

erfüllt ist. Für ein geeignetes  $c$  aus der Gleichung (1.2) ist (1.3) äquivalent zu der Aussage

$$\rho(T) < 1, \tag{1.4}$$

wobei  $\rho(T)$  der Spektralradius der Matrix  $T$  ist.

Es ist bereits zu sehen, dass der Spektralradius eine wichtige Größe bei den iterativen Verfahren ist.

Eine große Klasse von iterativen Verfahren sind die **Splittingsverfahren**. Hier wird die Matrix  $A$  in die Matrizen  $M$  und  $N$  aufgeteilt, wobei  $M$  nichtsingulär und  $A = M - N$  gelten soll. Mit Hilfe des Splittings  $(M, N)$  erhält man ein Iterationsverfahren der Form (1.2):

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$$

Weitere Details sind in Abschnitt 2.5 erläutert.

Eine weitere Klasse von Iterationsverfahren sind die **Mehrgitter-Verfahren**. Hier wird zusätzlich zu jedem Iterationsschritt, der z.B. durch ein einfaches Splittingverfahren vollzogen wird, ein Iterationsschritt auf einem gröberen Gitter durchgeführt. Der erste Iterationsschritt kann als Glätter interpretiert werden, der zweite ist der Grobgitterschritt. Durch die Glättung wird bereits eine neue approximierete Lösung erzeugt, diese wird durch einen Operator auf das grobe Gitter restringiert. Auf diesem Unterraum, der eine kleinere Dimension als der Ursprungsraum besitzt, wird dann eine neue approximierete Lösung berechnet, welche wiederum durch einen Operator auf den Raum größerer Dimension prolongiert wird. Somit besteht ein Iterationsschritt bei einem Mehrgitter-Verfahren aus einer Glättung sowie einem Grobgitterschritt. Oft wird nach dem Grobgitterschritt zusätzlich geglättet.

Diese Verfahren werden verwendet, da Iterationsverfahren, die nur aus dem Glätter bestehen, bei gewissen Problemen sehr langsam konvergieren. Das liegt daran, dass gewisse Fehler, die sogenannten **glatten Fehler**, durch diese Glätter nur langsam reduziert werden können. Der Grobgitterschritt wird dann i.A. so konstruiert, dass diese glatten Fehler vermindert werden und somit die Konvergenzgeschwindigkeit erhöht wird.

Bei Mehrgitter-Verfahren wird die approximierete Lösung so lange auf Unterräume kleinerer Dimension restringiert, bis die Dimension möglichst klein ist, so dass auf diesem Unterraum das restringierte Problem direkt gelöst werden kann.

Ein Spezialfall von Mehrgitter-Verfahren sind die sogenannten **Zwei-Level-Verfahren**. Hier wird lediglich einmal restringiert.

In dieser Arbeit werden ausschließlich Zwei-Level-Verfahren untersucht.

Es gibt im Wesentlichen zwei Arten von Mehrgitter-Verfahren, die **geometrischen Mehrgitter-Verfahren (GMG)** und die **algebraischen Mehrgitter-Verfahren (AMG)**. GMGs entstehen direkt aus dem Problem, das gelöst werden soll; AMGs sind unabhängig von dem zugrundeliegenden Problem. Sie werden durch die Matrix  $A$  konstruiert.

Splittingverfahren und Mehrgitter-Verfahren werden heute oftmals als Vorkonditionierer für **Krylov-Unterraum-Verfahren** eingesetzt. In dieser Arbeit werden sie jedoch als separate Löser betrachtet und ihr Konvergenzverhalten untersucht.

Ein spezielles AMG ist das **AMG von Ruge und Stüben**, das 1987 von J. W. Ruge und K. Stüben entwickelt wurde. In der Arbeit [14] wird zum einen gezeigt, wie Restriktion und Prolongation gewählt werden, zum anderen wird ein Konvergenzbeweis für nichtsinguläre symmetrische M-Matrizen sowie für symmetrisch positiv definite Matrizen vorgestellt. Die Symmetrie ist in dieser Arbeit essentiell.

Obwohl algebraische Mehrgitter-Verfahren und im Speziellen das *AMG von Ruge und Stüben* auch für viele unsymmetrische Probleme mit Erfolg angewendet werden, konnte in den letzten 20 Jahren so gut wie kein Fortschritt in der Konvergenzanalyse für unsymmetrische M-Matrizen erzielt werden.

Erste Ergebnisse sind in den Arbeiten [9], [10] und [11] festgehalten. Dort wird unter anderem die Konvergenz des **MAMLI-Verfahrens** mit einer nichtsingulären M-Matrix gezeigt. Das *MAMLI-Verfahren* ist ein spezielles Mehrgitter-Verfahren, das auf dem Unterraum Approximationen der Inversen einer Teilmatrix und des Schurkomplements benutzt.

Für die Konvergenz wurden gewisse Splittingeigenschaften der Approximationen vorausgesetzt, dies wird in Kapitel 5 näher erläutert.

Wird nun versucht, diese Ergebnisse auf das *AMG von Ruge und Stüben* zu übertragen, indem dieses Verfahren als das *MAMLI-Verfahren* mit bestimmten Approximationen interpretiert wird, stellt man fest, dass diese Approximationen nicht die gewünschten Splittingeigenschaften erfüllen. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie die Theorie verallgemeinert und auf das *AMG von Ruge und Stüben* angewandt werden kann. Somit kann Konvergenz des *AMGs von Ruge und Stüben* für gewisse nichtsinguläre M-Matrizen gezeigt werden.

Außerdem werden wir sehen, dass das *AMG von Ruge und Stüben* im Allgemeinen nicht konvergent ist, sobald als Approximation auf dem kleineren Unterraum das sogenannte approximierete Schurkomplement verwendet wird.



Die numerischen Resultate zeigen jedoch, dass allgemeinere Konvergenzresultate zu erwarten sind, wenn mit der sogenannten Galerkin-Approximation gearbeitet wird.

Im Weiteren wird eine Abwandlung des *Verfahrens von Ruge und Stüben* vorgestellt, das für alle nichtsingulären  $M$ -Matrizen konvergent ist.

Dies wird in den Kapiteln 7 und 8 detaillierter formuliert.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem *MAMLI-Verfahren*. Klassisch verwendet das *MAMLI-Verfahren* einen **F-Glätter**, das heißt einen Glätter, der nur auf dem Gebiet arbeitet, der durch die Restriktion auf den Unterraum kleinerer Dimension nicht mehr berücksichtigt wird. Es stellen sich folgende Fragen:

Was passiert, wenn der Glätter auf einem größeren Gebiet arbeitet?

Bleibt die Konvergenz erhalten bzw. wird die Konvergenzgeschwindigkeit sogar erhöht?

Diese Fragen werden in Kapitel 6 näher beantwortet.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

In Kapitel 2 werden die Grundlagen gelegt. Die Kapitel 3, 4 und 5 geben jeweils eine kurze Einführung in *iterative Verfahren*, in das *Verfahren von Ruge und Stüben* bzw. in das *MAMLI*-, *RMAMLI*- und *SMAMLI*-Verfahren.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit den oben angesprochenen Fragen zur Glättung.

In Kapitel 7 werden Methoden vorgestellt, die uns eine Möglichkeit liefern, einen Konvergenzbe-  
weis des *Verfahrens von Ruge und Stüben* zu zeigen. Diese Methoden werden in Kapitel 8 auf das  
*AMG von Ruge und Stüben* angewandt.

Kapitel 9 veranschaulicht die theoretischen Ergebnisse dieser Arbeit anhand von einigen numeri-  
schen Beispielen.

Kapitel 10 gibt eine kurze Zusammenfassung und formuliert einige offene Fragen.

Ich danke allen, die mich beraten und unterstützt haben. Mein Dank gilt insbesondere meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Reinhard Nabben und Zweitkorrekteur Herrn Prof. Dr. Volker Mehrmann. Außerdem möchte ich mich bei Christian Mense für die durchgängige Unterstützung im mathematischen Teil und bei meiner Freundin Sarah Gebauer und meiner Familie für Hilfe im formalen Teil meiner Arbeit bedanken.

# 2 Grundlagen

## 2.1 Notationen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Notationen eingeführt, die in dieser Arbeit verwendet werden.

### Definition 2.1.1

$\mathbb{R}^{n,k}$  bezeichnet den Vektorraum der  $n \times k$ -Matrizen mit reellen Einträgen. Somit ist der Raum der quadratischen Matrizen der  $\mathbb{R}^{n,n}$ .

$I_n$  bezeichnet die  $n \times n$ -Einheitsmatrix, falls die Dimension der Matrix aus dem Zusammenhang deutlich wird, wird sie auch als  $I$  bezeichnet.

Der Vektorraum der  $n$ -dimensionalen Spaltenvektoren mit reellen Einträgen wird mit  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

Analoges gilt für  $\mathbb{C}^{n,n}, \mathbb{C}^n$ .

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  in eine Blockstruktur der Form

$$A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$$

aufgeteilt.

Hierbei gelte Folgendes:

- Es gibt natürliche Zahlen  $n_F$  und  $n_C$  mit  $n = n_F + n_C$ .
- $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .
- $I_F$  bezeichne die  $n_F \times n_F$ -Einheitsmatrix und  $I_C$  bezeichne die  $n_C \times n_C$ -Einheitsmatrix.

Die Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  werden im Folgenden als Spezialfall der Vektorräume  $\mathbb{R}^{n,k}$  bzw.  $\mathbb{C}^{n,k}$  für  $k = 1$  betrachtet. Somit gelten folgende Definitionen für Matrizen und Vektoren.

Zum Vergleich von Matrizen ist ein Vergleichsoperator erforderlich. Verglichen werden die Matrizen elementweise.

### Definition 2.1.2

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,k}$  mit  $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ . Falls für alle  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}$  gilt:

$$a_{ij} \geq 0$$

dann schreiben wir

$$A \geq 0.$$

$A$  heißt dann **nichtnegativ**. Analoges gilt für  $A > 0$  (**positiv**),  $A < 0$  (**nichtpositiv**),  $A \leq 0$  (**negativ**).

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n,k}$ . Dann schreiben wir

$$A \geq B,$$

falls  $A - B \geq 0$  ist.

Analog dazu wird der Betrag einer Matrix  $A$  definiert.

**Definition 2.1.3**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,k}$  mit  $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ . Dann wird der Betrag  $|\cdot|$  einer Matrix definiert durch

$$|A| := [|a_{ij}|]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}.$$

Und ebenfalls wird das Minimum zweier Matrizen elementweise definiert.

**Definition 2.1.4**

Sei  $A, B \in \mathbb{R}^{n,k}$  mit  $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$  und  $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ .

Dann ist das Minimum von  $A$  und  $B$  definiert als:

$$\min(A, B) = [\min(a_{ij}, b_{ij})]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}.$$

Wir benötigen außerdem noch den Graph einer Matrix  $A$ .

**Definition 2.1.5**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , so ist  $G(A)$  der **Graph von  $A$**  definiert durch

$$G(A) = (V, E)$$

mit Knoten  $V = \{1, \dots, n\}$  und Kanten  $E = \{(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : a_{ij} \neq 0\}$ .

Falls die Orientierung der Kanten  $E$  berücksichtigt wird, spricht man vom **gerichteten Graphen von  $A$** , ansonsten vom **ungerichteten Graphen von  $A$** .

Eine weitere Eigenschaft von Matrizen ist die Irreduzibilität.

**Definition 2.1.6**

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  ( $n \geq 2$ ) heißt **reduzibel**, falls es eine Permutationsmatrix  $\pi$  gibt, so dass

$$\pi A \pi^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Ansonsten heißt die Matrix  $A$  **irreduzibel**.

## 2.2 Grundlagen aus der linearen Algebra

Folgender Abschnitt erläutert die wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge aus der linearen Algebra, die in dieser Arbeit benötigt werden.

### 2.2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

**Definition 2.2.1**

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

1. Falls ein Vektor  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  die Eigenwertgleichung

$$Ax = \lambda x$$

erfüllt, dann heißt  $x$  der zu dem **Eigenwert  $\lambda$**  gehörende **Eigenvektor**.

2. Das **Spektrum** von  $A$  ist definiert als die Menge aller Eigenwerte von  $A$ , also

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : Ax = \lambda x\}.$$

3. Der **Spektralradius**  $\rho(A)$  der Matrix  $A$  ist definiert als das Maximum der Beträge der Eigenwerte der Matrix  $A$ , also

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Es existieren ein paar einfache Zusammenhänge.

**Lemma 2.2.2** ([7])

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Dann gilt:

1.  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$
2.  $\sigma(AB) = \sigma(BA)$

Einer der zentralsten Sätze für nichtnegative Matrizen ist der Satz von *Perron-Frobenius*. Mit Hilfe dieses Satzes kann der Spektralradius zweier nichtnegativer Matrizen verglichen werden.

**Satz 2.2.3** (Satz von Perron-Frobenius [1])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  irreduzibel und  $A \geq 0$ .

Dann gilt:

1.  $\rho(A) =: \rho$  ist einfacher Eigenwert von  $A$ .
2. Zu  $\rho$  existiert ein positiver Eigenvektor  $z \in \mathbb{R}^n$ , d.h.  $Az = \rho z$ ,  $z > 0$ .  
 $z$  heißt dann **Perron-Vektor** und ist eindeutig, falls zum Beispiel  $\|z\| = 1$  gefordert wird.
3. Falls  $B \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $A \leq B$  ist, dann folgt:

$$0 \leq \rho(A) \leq \rho(B).$$

4. Aus  $Ax = \lambda x$ ,  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$  folgt:

$$\lambda = \rho, x = \alpha z \quad \text{für ein } \alpha > 0.$$

## 2.2.2 Normen

Zunächst wird der Begriff einer Norm auf dem Raum  $\mathbb{R}^n$  definiert.

**Definition 2.2.4**

Eine Abbildung  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  heißt **Norm** auf dem  $\mathbb{R}^n$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

In dieser Arbeit wird eine spezielle Norm, die  $w$ -Norm, benutzt.

**Beispiel 2.2.5**

Sei  $w \in \mathbb{R}^n$  mit  $w > 0$ . Dann ist die **gewichtete Maximumnorm**  $\|\cdot\|_w$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\|x\|_w := \max_{i=1,\dots,n} \frac{|x_i|}{w_i}.$$

Im Weiteren wird diese Norm als  $w$ -Norm bezeichnet.

Nun führen wir den Begriff der Matrix-Norm bzw. der Operator-Norm ein.

**Definition 2.2.6**

Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Die dazugehörige **Matrixnorm**  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow [0, \infty)$  ist definiert durch

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Im Folgenden sind alle Matrixnormen ausschließlich durch Vektornormen induziert.

Mithilfe der Definition 2.2.6 ist die gewichtete Maximumnorm einer Matrix bestimmbar.

**Beispiel 2.2.7**

Die zu  $\|\cdot\|_w$  gehörige Matrixnorm ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\|A\|_w &= \max_{i=1,\dots,n} \frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| w_j}{w_i} \\ &= \max_{i=1,\dots,n} \frac{(|A|w)_i}{w_i}.\end{aligned}$$

Hierzu siehe unter anderem [13].

Diese Norm hat einige Vorteile. Es ist z.B. möglich, die  $w$ -Norm einer nichtnegativen Matrix leicht abzuschätzen.

**Lemma 2.2.8** ([13])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $A \geq 0$ . Dann gilt:

$$Aw < w \Rightarrow \|A\|_w < 1.$$

Betrachte nun folgendes Lemma.

**Lemma 2.2.9** ([6])

Sei  $\|\cdot\|$  eine Vektornorm auf dem  $\mathbb{R}^n$  bzw. die entsprechende Matrixnorm auf dem  $\mathbb{R}^{n,n}$ . Dann gelten die folgenden Ungleichungen:

1.  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}, x \in \mathbb{R}^n,$
2.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}.$

Mithilfe des Lemma 2.2.9 ist ein Zusammenhang zwischen dem Spektralradius und einer Matrixnorm darstellbar.

**Korollar 2.2.10** ([6])

Sei  $\|\cdot\|$  eine Matrixnorm. Dann gilt:

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes werden einige Zusammenhänge zwischen dem Spektralradius und anderen Eigenschaften einer Matrix zusammengefasst.

**Satz 2.2.11** ([6])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Für jede Matrixnorm  $\|\cdot\|$  gilt:

$$\rho(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}}.$$

**Satz 2.2.12** ([3])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1,$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (A^k x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$

## 2.3 M-Matrix

In diesem Abschnitt wird ein spezieller Typ von Matrizen, die M-Matrizen, eingeführt.

### Definition 2.3.1

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Dann heißt  $A$

1. **nichtsinguläre M-Matrix**, falls gilt:

$$A = sI - B \quad \text{wobei } B \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ nichtnegativ und } s > \rho(B) \text{ ist.}$$

2. **singuläre M-Matrix**, falls gilt:

$$A = sI - B \quad \text{wobei } B \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ nichtnegativ und } s = \rho(B) \text{ ist.}$$

### Bemerkung 2.3.2

In dieser Arbeit werden ausschließlich nichtsinguläre M-Matrizen untersucht. Somit sei im Weiteren, falls nicht explizit erwähnt, jede M-Matrix nichtsingulär.

M-Matrizen haben eine bestimmte Vorzeichenstruktur.

### Definition 2.3.3

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Dann bezeichnen wir die Menge der Matrizen mit nichtpositiven Nichtdiagonaleinträgen mit

$$\mathcal{Z}^{n,n} := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij} \leq 0, i \neq j\}.$$

Falls  $A \in \mathcal{Z}^{n,n}$  ist, dann heißt  $A$  **Z-Matrix**.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, M-Matrizen zu charakterisieren.

### Satz 2.3.4 ([1])

Sei  $A \in \mathcal{Z}^{n,n}$  nichtsingulär. Dann sind äquivalent:

1.  $A$  ist eine nichtsinguläre M-Matrix.
2.  $A^{-1} \geq 0$ .
3. Es existiert ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v > 0$  mit

$$Av > 0.$$

4. Die Diagonaleinträge von  $A$  sind positiv, d.h.  $a_{ii} > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , und es existiert eine positive Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $D^{-1}AD$  strikt (zeilen-) diagonal dominant ist.
5. Alle reellen Eigenwerte von  $A$  sind positiv.
6. Jede Hauptabschnittsmatrix von  $A$  ist wieder eine M-Matrix.
7.  $\pi^T A \pi$  ist eine M-Matrix für alle Permutationsmatrizen  $\pi \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

Eine etwas schwächere Forderung an Matrizen ist die Monotonie.

### Definition 2.3.5

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Dann heißt  $A$  **monoton**, falls  $A$  nichtsingulär und

$$A^{-1} \geq 0$$

ist.

## 2.4 Schurkomplement

In diesem Abschnitt wird das Schurkomplement einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  definiert. Dazu wird zunächst die Matrix  $A$  in eine Blockstruktur aufgeteilt:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

wobei  $A_{11} \in \mathbb{R}^{k_1,k_1}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{k_1,k_2}$ ,  $A_{21} \in \mathbb{R}^{k_2,k_1}$  und  $A_{22} \in \mathbb{R}^{k_2,k_2}$  für  $k_1 + k_2 = n$  ist.

### Definition 2.4.1

Sei  $A_{11}$  nichtsingulär. Dann ist das **Schurkomplement** von  $A$  bzgl.  $A_{11}$  definiert durch

$$(A/A_{11}) = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen dem Schurkomplement einer Matrix  $A$  und der Matrix  $A$  selbst wird im folgenden Lemma erläutert.

### Lemma 2.4.2 ([12])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ .  $A_{11}$  sei nichtsingulär. Dann gilt:

1.  $A$  ist nichtsingulär  $\Leftrightarrow (A/A_{11})$  ist nichtsingulär,
2. Falls  $A$  nichtsingulär ist, ist es möglich mit Hilfe der **Schur-Banachiewicz Formel** die Inverse von  $A$  zu berechnen:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A/A_{11})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A/A_{11})^{-1} \\ -(A/A_{11})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A/A_{11})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Desweiteren gibt es einen Zusammenhang, falls  $A$  eine M-Matrix ist.

### Lemma 2.4.3 ([1])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ , und seien  $A$  und  $A_{11}$  nichtsingulär. Dann gilt:  
 $A$  ist eine M-Matrix  $\Rightarrow (A/A_{11})$  ist eine M-Matrix.



## 2.5 Tupel, Splittings

Im Folgenden werden Tupel  $(M, N)$ ,  $M$  nichtsingulär, die eine Aufteilung der Matrix  $A$  darstellen, d.h.  $A = M - N$ , als Splitting definiert. Außerdem werden Tupel  $(C, A)$ , die ähnliche Eigenschaften wie Splittings haben, untersucht.

### 2.5.1 Typen von Splittings und Tupels

**Definition 2.5.1** (Splittings)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

1. Dann heißt  $(M, N)$  ein **Splitting von  $A$** , falls gilt:

- $A = M - N$ .
- $M$  ist nichtsingulär.

2.  $(M, N)$  heißt

a) **reguläres Splitting von  $A$** , falls zusätzlich gilt:

- $M^{-1} \geq 0$ .
- $N \geq 0$ .

b) **schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$** , falls zusätzlich gilt:

- $M^{-1} \geq 0$ .
- $I - M^{-1}A = M^{-1}N \geq 0$ .

c) **schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$** , falls zusätzlich gilt:

- $M^{-1} \geq 0$ .
- $I - AM^{-1} = NM^{-1} \geq 0$ .

d) **nichtnegatives Splitting von  $A$** , falls zusätzlich gilt:

- $M^{-1} \geq 0$ .
- $I - M^{-1}A \geq 0$ .
- $I - AM^{-1} \geq 0$ .

Wir sehen, dass jedes reguläre Splitting auch ein nichtnegatives Splitting und jedes nichtnegative Splitting auch ein schwach reguläres Splitting vom ersten oder zweiten Typ ist. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Definition 2.5.2**

Sei  $A, C \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

Dann gilt:

$[C, A]$  ist ein

1. **schwach reguläres Tupel vom ersten Typ**, falls:

- $C \geq 0$ .
- $I - CA \geq 0$ .

2. **schwach reguläres Tupel vom zweiten Typ**, falls:

- $C \geq 0$ .
- $I - AC \geq 0$ .

3. **nichtnegatives Tupel**, falls:

- $C \geq 0$ .
- $I - CA \geq 0$ .
- $I - AC \geq 0$ .

**Bemerkung 2.5.3**

Der Unterschied zwischen Definition 2.5.1 und Definition 2.5.2 ist insbesondere der, dass bei einem Tupel  $[C, A]$  die Matrix  $C$  singulär sein kann.

Bei einem Splitting  $(M, N)$  ist  $M$  immer nichtsingulär.

Im Weiteren wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen ein Tupel  $[C, A]$  zu einem Splitting  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  wird.

## 2.5.2 Grundlegende Sätze mit Splittings

Eine Möglichkeit aus einem Tupel  $[C, A]$  ein Splitting  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  zu machen, liefert folgender Satz:

**Satz 2.5.4** ([9])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix. Weiter erfülle die Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n,n}$  folgende Bedingungen:

1.  $C \geq 0$ .
2.  $C$  besitzt keine Nullzeilen.
3.  $I - CA \geq 0$ .

Dann gilt:

1.  $0 \leq (I - CA)w < w$  mit  $w = A^{-1}d$  und einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $\rho(I - CA) \leq \|I - CA\|_w < 1$  mit  $w = A^{-1}d$  und einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .
3. Die Matrix  $C$  ist nichtsingulär und  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ist ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$ .

**Bemerkung 2.5.5**

Es gilt außerdem:

1. Falls  $C$  nicht die Bedingung

$$I - CA \geq 0$$

sondern die Bedingung

$$I - AC \geq 0$$

erfüllt, dann gilt:

Die Matrix  $C$  ist nichtsingulär und  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ist ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$ .

2. Falls  $C$  die Bedingungen

$$I - CA \geq 0 \text{ und } I - AC \geq 0$$

erfüllt, dann gilt:

Die Matrix  $C$  ist nichtsingulär und  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ist ein nichtnegatives Splitting von  $A$ .

Es gibt Aussagen über den Spektralradius mit Hilfe von Splittings.

**Satz 2.5.6** ([9])

Sei  $\in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix.

1. Weiter sei  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$ .  
Dann gilt:

$$\rho(I - CA) \leq \|I - CA\|_w < 1$$

mit  $w = A^{-1}d$  und einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

2. Falls  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$  ist. Dann gilt:

$$\rho(I - CA) \leq \|I - C^T A^T\|_w < 1$$

mit  $w = A^{-T}d$  und einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

### 2.5.3 Normabschätzung zwischen schwach reg. Splittings vom ersten Typ

**Satz 2.5.7** ([9])

Seien die Splittings  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  und  $(C_2^{-1}, C_2^{-1} - A)$  einer nichtsingulären  $M$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  schwach regulär vom ersten Typ. Weiter sei  $d \in \mathbb{R}^n$  ein positiver Vektor. Dann gilt für den positiven Vektor  $w := A^{-1}d$

$$\rho(I - C_1 A) \leq \|I - C_1 A\|_w < 1.$$

$$\rho(I - C_2 A) \leq \|I - C_2 A\|_w < 1.$$

Desweiteren gilt die Beziehung

$$C_1 \geq C_2 \quad \Rightarrow \quad \|I - C_1 A\|_w \leq \|I - C_2 A\|_w. \quad (2.1)$$

### 2.5.4 Normabschätzung zwischen schwach reg. Splittings vom zweiten Typ

**Satz 2.5.8** ([9])

Seien die Splittings  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  und  $(C_2^{-1}, C_2^{-1} - A)$  einer nichtsingulären  $M$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  schwach regulär vom zweiten Typ. Weiter sei  $d \in \mathbb{R}^n$  ein positiver Vektor. Dann gilt für den positiven Vektor  $w := A^{-T}d$

$$\rho(I - C_1 A) \leq \|I - C_1^T A^T\|_w < 1.$$

$$\rho(I - C_2 A) \leq \|I - C_2^T A^T\|_w < 1.$$

Desweiteren gilt die Beziehung

$$C_1 \geq C_2 \quad \Rightarrow \quad \|I - C_1^T A^T\|_w \leq \|I - C_2^T A^T\|_w. \quad (2.2)$$

### 2.5.5 Vergleich zwischen schwach regulären Splittings verschiedener Typen

**Satz 2.5.9** ([16])

Seien die Splittings  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  und  $(C_2^{-1}, C_2^{-1} - A)$  einer nichtsingulären  $M$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  schwach regulär, aber von unterschiedlichem Typ. Dann gilt die Beziehung:

$$C_1 \geq C_2 \quad \Rightarrow \quad \rho(I - C_1 A) \leq \rho(I - C_2 A) < 1.$$

## 3 Iterative Verfahren

In diesem Kapitel gehen wir näher auf iterative Verfahren ein. Ziel dieser Verfahren ist es, das Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad \det(A) \neq 0 \quad (3.1)$$

zu lösen.

Die Lösung ist gegeben durch

$$x = A^{-1}b.$$

Jedoch ist das Bestimmen dieser Lösung durch direkte Verfahren, wie zum Beispiel das Gauß-Verfahren oder die Cholesky-Zerlegung, oft sehr aufwändig, teuer und langsam. Daher wurden iterative Verfahren entwickelt.

Bei iterativen Verfahren wird ausgehend von einem Startvektor  $x^{(0)}$  eine Folge  $\{x^{(k)}\}$  gebildet, wobei

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = A^{-1}b$$

gelten soll.

Die Iterationsvorschrift hat im Allgemeinen die Form

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

Somit ist das Lösen des Gleichungssystems (3.1) äquivalent zu der Fixpunktgleichung

$$x = Tx + c, \quad (3.2)$$

wobei  $c \in \mathbb{R}^n$  so gewählt ist, dass die Lösung von (3.1) auch eine Lösung von (3.2) ist.

In diesem Kapitel gehen wir auf einige spezielle iterative Verfahren ein.

### 3.1 Splittingverfahren

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $(M, N)$  sei ein Splitting von  $A$ , d.h.  $A = M - N$  und  $M$  nichtsingulär.

Wir wollen nun das Gleichungssystem (3.1) lösen, also gilt:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Rightarrow (M - N)x &= b \\ \Rightarrow Mx - Nx &= b \\ \Rightarrow x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

Also erhält man die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

mit  $T = M^{-1}N$  und  $c = M^{-1}b$ .

$T$  heißt dann **Iterationsmatrix**.

Der folgende Satz gibt uns das entscheidende Kriterium für die Konvergenz eines Splittingverfahrens.

**Satz 3.1.1** ([8])

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  nichtsingulär. Dann konvergiert die durch

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

gebildete Folge genau dann für jedes  $x^{(0)}$  gegen  $A^{-1}b$ , wenn

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

ist.

Daraus wird die Relevanz des Konvergenzradius der Iterationsmatrix für die Konvergenz erkennbar.

**Bemerkung 3.1.2**

Der Konvergenzradius der Iterationsmatrix sagt nicht nur aus, ob das Iterationsverfahren konvergiert oder divergiert, sondern er ist auch ein Maß für die asymptotische Konvergenzrate. Somit ist er geeignet, die Güte verschiedener Iterationsverfahren zu vergleichen.

Somit gilt:

**Umso kleiner der Konvergenzradius einer Iterationsmatrix ist, desto asymptotisch schneller konvergiert das zugehörige Verfahren.**

Nachfolgend sind einige elementare Splittingverfahren angegeben.

**Beispiel 3.1.3** (Jacobi-Verfahren)

Zerlege  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  in  $A = D - L - R$ , wobei  $D$  die Diagonale von  $A$ ,  $-L$  das untere Dreieck von  $A$  und  $-R$  das obere Dreieck von  $A$  ist.

Sei nun  $D$  nichtsingulär.

Setze  $M = D$  und  $N = L + R$ . Dann ist  $(M, N)$  ein Splitting von  $A$  und wir erhalten das Iterationsverfahren

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

◇

**Beispiel 3.1.4** (Gauß-Seidel-Verfahren)

Sei  $D, L, R$  wie oben. Sei  $D - L$  nichtsingulär. Setze nun  $M = D - L$  und  $N = R$ . Dann ist wiederum  $(M, N)$  ein Splitting von  $A$ . Die Iterationsvorschrift lautet

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Rx^{(k)} + (D - L)^{-1}b.$$

◇

**Bemerkung 3.1.5**

Es gilt:

1. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine  $M$ -Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann konvergiert das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren für jeden Startwert.
2. Das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren werden sowohl zum Lösen linearer Gleichungssysteme als auch als sogenannte "Glätter", die durch andere Verfahren beschleunigt werden, verwendet.

## 3.2 Zwei-Level-Verfahren, Mehrgitter-Verfahren

Ein weiterer Typ von iterativen Verfahren sind die Zwei-Level-Verfahren bzw. Mehrgitter-Verfahren. Da wir uns in dieser Arbeit mit der Theorie von Zwei-Level-Verfahren beschäftigen, werden wir die Mehrgitter-Verfahren nur bedingt betrachten.

Unser Ziel ist es erneut, das lineare Gleichungssystem (3.1) zu lösen.

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

Die Idee des Zwei-Level-Verfahrens ist es, das Gleichungssystem (3.1) auf ein System kleinerer Dimension  $n_1 < n$  zu reduzieren, und die Lösung des kleineren Systems auf den größeren Raum zurückzuinterpolieren. So gelangt man iterativ zur Lösung von (3.1).

Die Matrix  $A$  wird also durch Interpolationsoperator bzw. Prolongationsoperator

$$P : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und Restriktionsoperator

$$R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$$

in eine Systemmatrix  $S$  kleiner Dimension gebracht:

$$S = RAP \in \mathbb{R}^{n_1, n_1}.$$

Der Algorithmus des Zwei-Level-Verfahren sieht wie folgt aus:

**Setup Phase**

Wähle Interpolationsoperator  $P$  und Restriktionsoperator  $R$  mit  $S = RAP$ .

**Lösungsphase**

$\nu_1$  **Vorglättungen:**

**for**  $k = 1, 2, \dots, \nu_1$  **do**

$$y = y + (B)^{-1}(b - Ay).$$

**end**

**Korrektur auf dem Grobgitter:**

$$b^{neu} := R(b - Ay)$$

Wähle ein Approximation  $\tilde{S}$  an  $S$

$$y^{neu} = \tilde{S}^{-1}b^{neu}$$

Korrigierte Approximation:

$$y = y + Py^{neu}.$$

$\nu_2$  **Nachglättungen:**

**for**  $k = 1, 2, \dots, \nu_2$  **do**

$$y = y + (B)^{-1}(b - Ay).$$

**end**

Somit erhält man für  $\nu_1 = \nu_2 = 1$  als Iterationsvorschrift:

$$y_{k+1} = (I - B^{-1}A)(I - P\tilde{S}^{-1}RA)(I - B^{-1}A)y_k + M^{-1}b$$

mit  $M^{-1} = B^{-1} + P\tilde{S}^{-1}R + B^{-1} - B^{-1}AP\tilde{S}^{-1}R - P\tilde{S}^{-1}RAB^{-1} + B^{-1}AP\tilde{S}^{-1}RAB^{-1}$ .

Die Iterationsmatrix ist gegeben durch:

$$T = (I - B^{-1}A)(I - P\tilde{S}^{-1}RA)(I - B^{-1}A).$$

**Bemerkung 3.2.1**

Nun stellt sich die Frage, wie man die Prolongationsmatrix und die Restriktionsmatrix des Mehrgitter-Verfahrens (MGV) berechnet. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten.

1. **geometrisches MGV**

Hier betrachtet man das Problem, aus dem das lineare Gleichungssystem entstanden ist, zum Beispiel aus einer partiellen Differentialgleichung. Da diese bereits diskretisiert wurde, kann man mit Hilfe der Diskretisierung die Prolongationsmatrix und die Restriktionsmatrix wählen.

2. **algebraisches MGV**

Hier ist das Ziel, die Prolongationsmatrix und die Restriktionsmatrix zu konstruieren, ohne die Herkunft der Matrix  $A$  zu kennen, d.h.  $A$  soll beliebig sein. Also wurden Verfahren zur Berechnung von Prolongations- und Restriktionsmatrix entwickelt, die nur von den Einträgen der Matrix  $A$  abhängen. Eines davon ist das Verfahren von Ruge und Stüben, auf das in den nächsten Kapiteln noch näher eingegangen wird.

Die Idee des Zwei-Level-Verfahrens läßt sich auf mehrere Level verallgemeinern. Dies führt zu den Mehrgitter-Verfahren.

Hier reduzieren wir das Gleichungssystem (3.1) nicht nur einmal, sondern solange, bis die Dimension des reduzierten Systems klein genug ist, um diese direkt zu lösen.

Somit erhält man als Restriktions- und Prolongationsoperatoren

$$\begin{aligned} R_m^{m+1} : \mathbb{R}^{n_m} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_{m+1}}, \\ P_{m+1}^m : \mathbb{R}^{n_{m+1}} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_m}, \end{aligned}$$

mit  $n_m > n_{m+1}$  und die Operatoren auf den verschiedenen Leveln sind dann definiert als

$$A^{(m+1)} = R_m^{m+1} A^{(m)} P_{m+1}^m.$$

Man erhält folgenden Algorithmus, der sich in zwei Phasen aufteilt:

### Setup Phase

1. Setze  $m = 1$ .
2. Wähle Interpolationsoperator  $P_{m+1}^m$  und Restriktionsoperator  $R_m^{m+1}$  mit  $A^{(m+1)} = R_m^{m+1} A^{(m)} P_{m+1}^m$ .
3. Falls das Gitter klein genug ist, setze  $\#levels = m$  und Stop.  
Sonst setze  $m = m + 1$  und gehe zu Schritt 2.

### Lösungsphase

Setze  $m = 1$  und rufe folgenden Algorithmus  $y^m = AMG\_Step(m, x^m, b^m)$  auf:

**if**  $m = \#levels$  **then**

    | löse  $A^{(m)}y^m = b^m$  direkt.

**else**

$y^m := x^m$ .

$\nu_1$  **Vorglättungen:**

**for**  $k = 1, 2, \dots, \nu_1$  **do**

$$y^m = y^m + (B^m)^{-1}(b^m - A^{(m)}y^m).$$

**end**

**Korrektur auf dem Grobgitter:**

$$x^{m+1} := 0,$$

$$b^{m+1} := R_m^{m+1}(b^m - A^{(m)}y^m),$$

$$y^{m+1} = AMG\_Step(m+1, x^{m+1}, b^{m+1}).$$

    korrigierte Approximation:

$$y^m = y^m + P_{m+1}^m y^{m+1}.$$

$\nu_2$  **Nachglättungen:**

**for**  $k = 1, 2, \dots, \nu_2$  **do**

$$y^m = y^m + (B^m)^{-1}(b^m - A^{(m)}y^m).$$

**end**

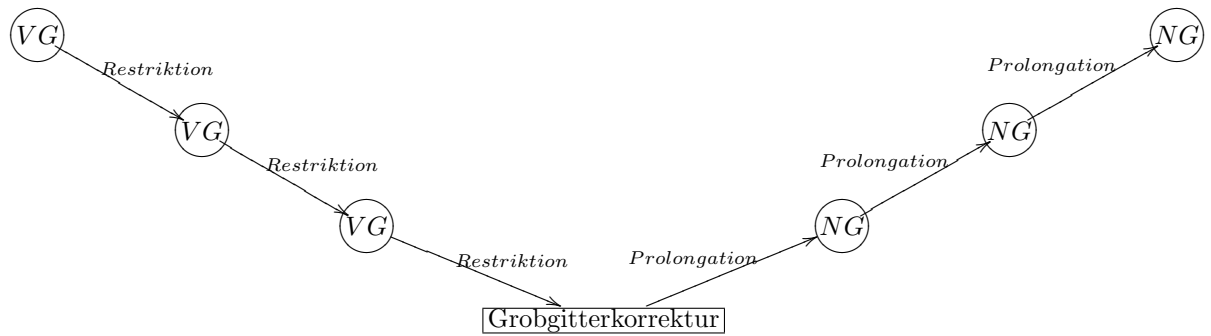
**end**

Dies ist ein Schritt der Iterationsverfahren, wobei die Matrizen  $B^m$  Glätter sind. Zum Beispiel kann  $B^m$  als die Diagonale von  $A^{(m)}$  (Jacobi) oder auch als die obere Dreiecksmatrix von  $A$  (Gauß-Seidel) gewählt werden.



**Beispiel 3.2.2** (V-Zyklus)

Eine Skizze des Algorithmus sieht wie folgt aus:



Dabei steht VG für Vorglättung und NG für Nachglättung.

◇

## 4 Das Verfahren von Ruge und Stüben

Im Folgenden wird das Verfahren von *Ruge und Stüben* erläutert.

Sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  gegeben.

Die zentralen Fragen bei algebraischen Verfahren sind:

1. Wie sieht die Aufteilung der Matrix  $A$  in die Blockstruktur  $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$  aus, wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$ ,  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$  mit  $n = n_F + n_C$  ist?  
Diese Aufteilung wird als Coarsingprozess bezeichnet.
2. Wie werden Prolongationsoperatoren und Restriktionsoperatoren gewählt?

Ein sehr gute Wahl ist durch das AMG von *Ruge und Stüben* gegeben. Dieser wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

### 4.1 Motivation

Im Folgenden sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre M-Matrix.

Wir betrachten zunächst den Glätter

$$x^{m+1} = (I - B^{-1}A)x^m + B^{-1}b.$$

Vor allem interessieren wir uns für die Wirkung dieses Glätters auf den Fehler

$$e^m = x - x^m,$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^n$  die exakte Lösung  $x = A^{-1}b$  und  $x^m$  die approximierte Lösung nach dem m-ten Schritt sind.

Es gilt:

$$\begin{aligned} e^m &= x - x^m \\ &= x - ((I - B^{-1}A)x^{m-1} + B^{-1}b) \\ &= x - B^{-1}b - (I - B^{-1}A)x^{m-1} \\ &= x - B^{-1}Ax - (I - B^{-1}A)x^{m-1} \\ &= (I - B^{-1}A)(x - x^{m-1}) \\ &= (I - B^{-1}A)e^{m-1}. \end{aligned}$$

Falls nun  $(Ae^{m-1})_i \approx 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , also  $e^{m-1}$  nahe dem Kern von  $A$  liegt, dann ist die Annahme von Ruge und Stüben, dass Folgendes gilt:

$$e^m \approx e^{m-1}.$$

Also erhält man durch die Glättung nur eine ungenügende Verbesserung. Die Fehler  $e$ , für die  $(Ae)_i \approx 0$ ,  $i = 1 \dots, n$ , ist, heißen **glatte Fehler**. Wir haben gesehen, dass diese glatten Fehler nur ungenügend verkleinert werden, somit nehmen sie im Weiteren eine zentrale Rolle ein.

Unser Ziel ist es nun, die *glatten Fehler* durch Linearkombinationen zu beschreiben. Es gilt folgende Beziehung:

$$(Ae)_i \approx 0 \Rightarrow e_i \approx \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{a_{ii}} e_j. \quad (4.1)$$

Man sieht, dass gewisse Einträge von glatten Fehlern  $e$  durch andere interpoliert werden können, wobei die Interpolationsgewichte durch die Einträge der Matrix  $A$  bestimmt werden. Somit wollen wir nun eine Möglichkeit finden, zu unterscheiden, welche Einträge der Matrix  $A$  zur Interpolation essentiell sind, dafür teilen wir die Einträge in *Grobgridter-* ( $\mathcal{C}$ ) und *Feingitterpunkte* ( $\mathcal{F}$ ) auf. Dabei sollten aber folgende Eigenschaften erfüllt sein:

E1 Alle  $i \in \mathcal{F}$  müssen ausreichend interpoliert werden können.

E2  $\mathcal{C}$  sollte so klein wie möglich sein.

E3 Kein  $i \in \mathcal{F}$  sollte durch andere  $j \in \mathcal{F}$  interpoliert werden.

Dies motiviert, die Einträge von  $A$  nach *schwachen* und *starken Nachbarn* zu unterscheiden.

#### Definition 4.1.1

Folgende Menge  $S_i$  wird mit der Menge der **starken Nachbarn** bezeichnet:

$$S_i = \{j \neq i : |a_{ij}| \geq \omega \max_{k \neq i} |a_{ik}|\}.$$

#### Bemerkung 4.1.2

Es gilt:

1.  $\omega$  ist hier ein Parameter der entscheidend auf die Wahl der starken Nachbarn einwirkt. Eine häufige Wahl von  $\omega$  ist

$$\omega = \frac{1}{4}.$$

2. Die Menge  $S_i$  umfasst die  $j$ , für die  $\frac{|a_{ij}|}{a_{ii}}$  genügend groß ist.

Somit ist es möglich, alle Elemente mit Elementen aus  $S_i$  zu interpolieren. Damit wäre die erste Idee, alle Elemente aus  $S_i$  in  $\mathcal{C}$  zu packen, d.h.:  $\mathcal{C} = \bigcup S_i$ . Dann wäre zwar E1 und E3 erfüllt, jedoch wird im Allgemeinen  $\mathcal{C}$  sehr groß, also wäre E2 nicht erfüllt. Folglich betrachte besser die Menge der Elemente  $j$ , für die  $i$  ein *starker Nachbar* ist.

#### Definition 4.1.3

Die Menge  $S_i^T$  heißt die zu  $S_i$  **adjungierte Menge** und ist folgendermaßen definiert:

$$S_i^T := \{j : i \in S_j\}.$$

#### Bemerkung 4.1.4

Wenn nun also  $S_i^T$  viele Elemente  $j$  enthält, bedeutet dies, dass das Element  $i$  zur Interpolation all dieser  $j$  benötigt wird. Somit sollte also dieses  $i$  in die Menge  $\mathcal{C}$  verschoben werden.

Damit sieht der erste Schritt des Coarsing-Prozesses wie folgt aus:

## 4.2 Ruge- und Stüben-Coarser - 1. Teil

Sei  $\mathcal{C}$  die Menge der Grobgitterpunkte und  $\mathcal{F}$  die Menge der Feingitterpunkte.  $\mathcal{U}$  sei die Menge der noch unbestimmten Knoten.

1.  $\lambda_i := |S_j^T| \quad j = 1, \dots, n.$
2.  $\mathcal{C} = \emptyset, \quad \mathcal{F} = \emptyset, \quad \mathcal{U} = \{1, \dots, n\}.$
3. Solange  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ 
  - 3.1 Wähle  $i$  mit maximalem  $\lambda_i$  und schiebe  $i$  ins Grobgitter:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C} \cup \{i\}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus \{i\}.$$

- 3.2 Für alle  $j \in S_i^T \cap \mathcal{U}$ :

Verschiebe die Nachbarn, für die  $i$  ein starker Nachbar ist, ins Feingitter:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{j\}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus \{j\}.$$

Zum Ausgleich des nun fehlenden Elements  $j$  erhöhe die Gewichte der starken Nachbarn von  $j$ :

$$\forall k \in S_j \cap \mathcal{U} : \lambda_k = \lambda_k + 1.$$

Da  $i$  bereits nach  $\mathcal{C}$  geschoben wurde, haben die  $S_j^T$  nun ein Element weniger, in denen  $i$  enthalten war. Also verringere die Gewichte:

$$\forall j \in S_i \cap \mathcal{U} : \lambda_j = \lambda_j - 1.$$

Jetzt stellt sich die Frage, ob die drei Eigenschaften E1-E3 erfüllt sind. Wir wollen diese noch einmal leicht verändert formulieren:

- E1' Für alle  $i \in \mathcal{F}$  muss ein *starker Nachbar*  $j$  existieren, so dass  $j \in S_i \cap \mathcal{C}$ .
- E2'  $\mathcal{C}$  sollte so klein wie möglich sein.
- E3' Es sollte keine  $\mathcal{F} - \mathcal{F}$  Verbindung geben.

Nach dem 1. Teil des Coarsers sind zumindest die Bedingungen E1' und E2' erfüllt. Doch ist im Allgemeinen E3' nicht erfüllt.

Somit muß der Coarser erweitert werden.

### 4.3 Ruge- und Stüben-Coarser - 2.Teil und Wahl der Interpolationsgewichte

Sei  $\mathcal{C}$  die Menge der Grobgitterpunkte aus dem Coarser - 1.Teil. und  $\mathcal{F} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{C}$  die Menge der Feingitterpunkte. Mit  $\mathcal{T}$  bezeichnen wir die Menge der bisher getesteten Feingitterpunkte.

1. Solange  $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{T}$ :

2.1 Teste einen noch nicht getesteten Feingitterpunkt:

$$i \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}, \quad \mathcal{T} = \mathcal{T} \cup \{i\}.$$

Die Menge der starken Nachbarn im Grobgitter:

$$C_i = S_i \cap \mathcal{C}.$$

Die Menge der starken Nachbarn im Feingitter:

$$F_i = S_i \setminus \mathcal{C}.$$

Die Menge der Elemente, die ins Grobgitter verschoben werden sollen:

$$V_i = \emptyset.$$

2.2 Diagonalkompensation für die schwachen Nachbarn (d.h. verschiebe die Gewichte der schwachen Nachbarn auf die Diagonale):

$$d_i = a_{ii} + \sum_{j \notin S_i} a_{ij}.$$

Setze das Gewicht für die starken Nachbarn:

$$\forall k \in C_i : d_k = |a_{ik}|.$$

2.3 Für alle  $j \in F_i$ :

Falls  $S_j \cap C_i \neq \emptyset$ , d.h. der starke Feingitternachbar  $j$  von  $i$  hat einen mit  $i$  gemeinsamen starken Grobgitternachbarn, verschiebe die Gewichte  $d_j$  auf alle  $k \in C_i$ :

$$\forall k \in C_i : d_k = d_k + |a_{ij}| \frac{|a_{ik}|}{s} \text{ mit } s = \sum_{k \in C_i} |a_{jk}|.$$

Sonst

Falls  $V_i = \emptyset$ , d.h. es wurde noch kein  $j \in F_i$  versuchsweise ins Grobgitter geschoben, versuche diese  $j$  in das Grobgitter zu verschieben, um  $i$  zu interpolieren:

$$V_i = \{j\}, \quad C_i = C_i \cup \{j\}, \quad F_i = F_i \setminus \{j\}, d_j = |a_{ij}|.$$

sonst

Es wurde bereits ein  $j \in F_i$  versuchsweise ins Grobgitter geschoben. Schiebe daher statt eines weiteren  $j$  besser  $i$  in das Grobgitter:

$$V_i = \{i\}, \quad F_i = C_i = \emptyset.$$

2.4 Schiebe die Elemente aus  $V_i$  endgültig in das Grobgitter:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C} \cup V_i, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F} \setminus V_i.$$

2.5 Bilde Interpolationsgewichte:

$$\forall j \in \mathcal{C}_i : \quad p_{ij} = \frac{d_j}{d_i}.$$

2. Triviale Einbettung für die Grobgitterpunkte:

$$\forall i \in \mathcal{C} : \quad p_{ii} = 1.$$

Nun haben wir erreicht, dass E1'-E3' erfüllt sind.

## 4.4 AMG von Ruge und Stüben in Matrixschreibweise

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie durch das AMG von Ruge und Stüben eine Matrix  $A$  in Grobgitter- und Feingitterpunkte aufgeteilt wird und ein Interpolationsoperator erzeugt wird. Dies läßt sich in Matrixschreibweise darstellen.

Die Matrix nach dem Coarsingprozess bezeichnen wir mit  $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ .

### 1. Coarser - 1. Teil

Im ersten Schritt werden vorläufige Grob- und Feingitterpunkte  $\mathcal{C}, \mathcal{F}$  ausgewählt. Anschließend werden die Einträge der Matrix  $A$  nach  $\mathcal{F}-\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}-\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}-\mathcal{F}$  und  $\mathcal{C}-\mathcal{C}$  Verbindungen sortiert. Man erhält nun eine permutierte Matrix:

$$A \rightsquigarrow \pi^T A \pi = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}.$$

### 2. Coarser - 2. Teil

Im 2. Schritt werden zunächst die Gewichte der schwachen  $\mathcal{F}-\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}-\mathcal{C}$  Verbindungen auf die Diagonale geschoben. Da  $A$  eine M-Matrix ist, sind die Nichtdiagonaleinträge nichtpositiv und die Diagonaleinträge positiv. Es gilt für die Diagonaleinträge von  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{a}_{ii} \leq a_{ii} \quad \forall i \in \mathcal{F}.$$

Außerdem gilt:

$$0 = \tilde{a}_{ij} \geq a_{ij} \quad i \in \mathcal{F}, j \notin S_i.$$

Im Teil 2.3 des Coarsingprozesses wird getestet, ob eine starke  $\mathcal{F}-\mathcal{F}$  Verbindung auch eine oder mehrere Verbindungen  $\mathcal{F}-\mathcal{C}$  hat. Wenn dies der Fall ist, werden diese Gewichte auf die  $\mathcal{F}-\mathcal{C}$ -Verbindungen verteilt. Somit werden Nichtdiagonaleinträge von  $A_{FF}$  nach  $A_{FC}$  verschoben.

Da diese  $a_{ij} \leq 0, i, j \in \mathcal{F} \ i \neq j$ , sind, gilt:

$$\tilde{a}_{ij} \leq a_{ij} \quad i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{C} \cap S_i.$$

Wenn es keine  $\mathcal{F}-\mathcal{C}$  Verbindung gibt, interpoliert somit ein Feingitterpunkt einen anderen Feingitterpunkt; E3' ist dann nicht erfüllt. Somit wird entweder  $i$  oder  $j$  ins Grobgitter verschoben. Wir erhalten eine neue Permutationsmatrix.

Nach Konstruktion gilt:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Also haben wir insgesamt folgende Eigenschaften:

- $A \rightsquigarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ ,
- Für  $i, j \in \mathcal{F}$  gilt:  $\tilde{a}_{ij} \begin{cases} \leq a_{ij} & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$ ,
- Für  $i \in \mathcal{F}$  und  $j \in \mathcal{C}$  gilt:  $\tilde{a}_{ij} \begin{cases} \leq a_{ij} & j \in S_i \\ = 0 & j \notin S_i, \end{cases}$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Der Interpolationsoperator  $P$  ist gegeben durch:

$$P = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}.$$

Betrachte nun folgende Beispiele:

**Beispiel 4.4.1** (Laplace-Matrix(1D))

Sei  $\omega = \frac{1}{4}$  und

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & \end{bmatrix}.$$

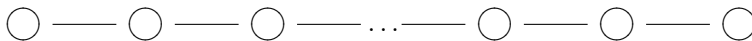
Zuerst werden die starken Nachbarn bestimmt:

$$S_1 = \{2\}, S_i = \{i - 1, i + 1\}, S_n = \{n - 1\} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n - 1.$$

Die zu  $S_i$  adjungierten Mengen sind:

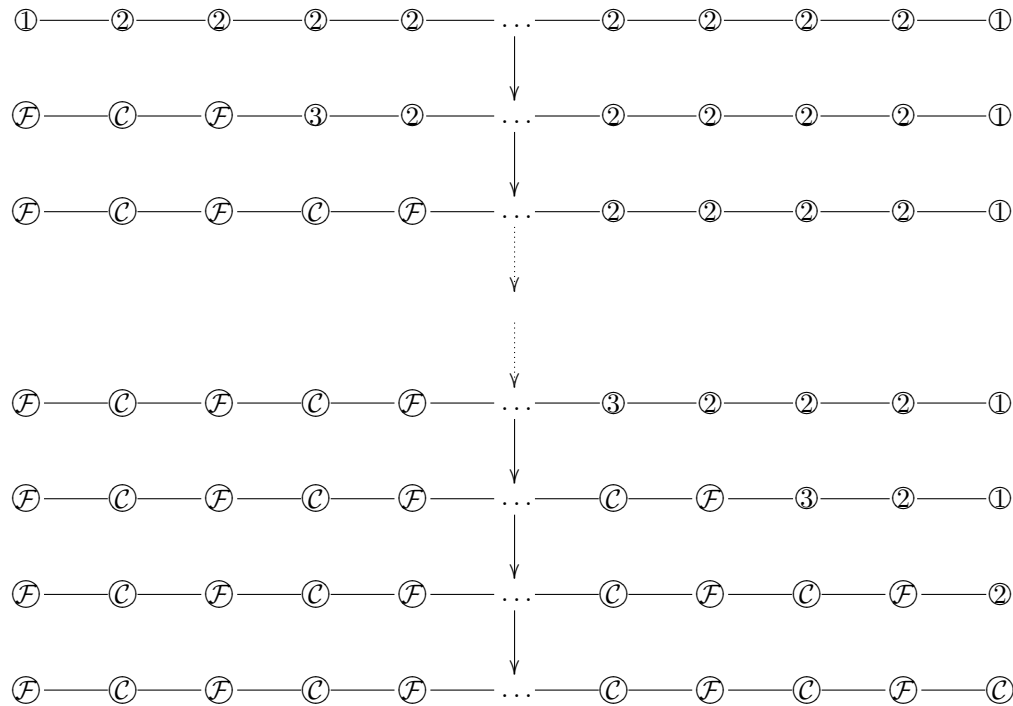
$$S_i^T = S_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n.$$

Nun differenzieren wir Fein- und Grobgitterpunkte anhand des ungerichteten Graphen von  $A$ . Man sieht, dass jeder Knoten  $i$  nur eine Verbindung zu  $i - 1$  und  $i + 1$  hat. Somit sieht der Graph wie folgt aus.



Als nächstes betrachten wir den ersten Teil des Coarsingprozesses. In den Knoten des Graphen schreiben wir die  $\lambda_i = \#S_i^T$ , bzw. nach der Wahl der Fein- und Grobgitterpunkte ein  $\mathcal{F}$  bzw. ein  $\mathcal{C}$ .

Wir starten mit einem maximalen  $\lambda_i$ , z.B.  $i = 2$ :



Man erhält:  
 $\mathcal{C} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  und  $\mathcal{F} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ .



Das heißt aber auch, dass es keine  $\mathcal{F} - \mathcal{F}$ -Verbindung gibt, somit der zweite Teil des Coarsingprozesses keine Veränderung liefert.

Man erhält für gerades  $n$ :

$$A_{FF} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{CC} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Die entstehende Interpolationsmatrix sieht dann wie folgt aus:

$$\pi P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Und für ungerades  $n$  sieht die Aufteilung wie folgt aus:

$$A_{FF} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{CC} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Interpolationsmatrix gegeben durch:

$$\pi P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**Beispiel 4.4.2** (Laplace-Matrix(2D))Sei  $\omega = \frac{1}{4}$  und

$$A_1 = \begin{bmatrix} T & -I & & & & \\ -I & T & -I & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I & T & -I \\ & & & & -I & T \end{bmatrix} \quad \text{mit } T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

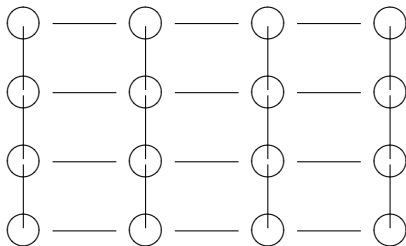
und  $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n^2,n^2}$ .

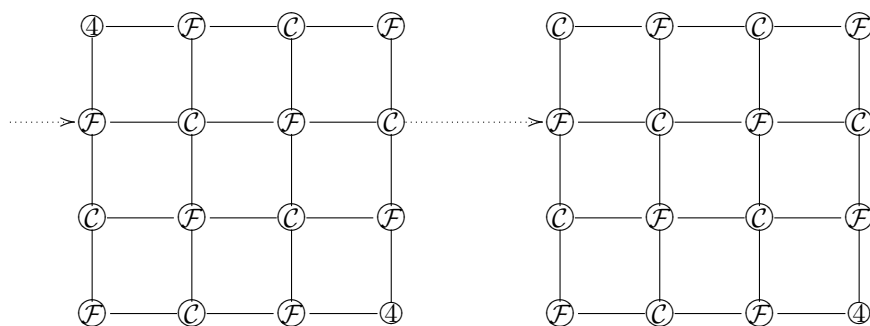
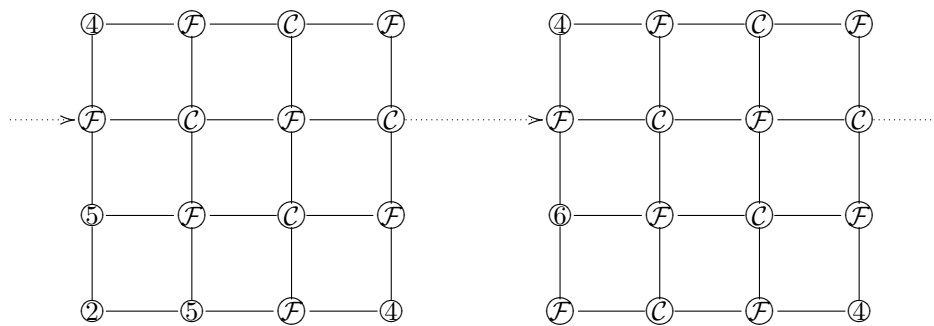
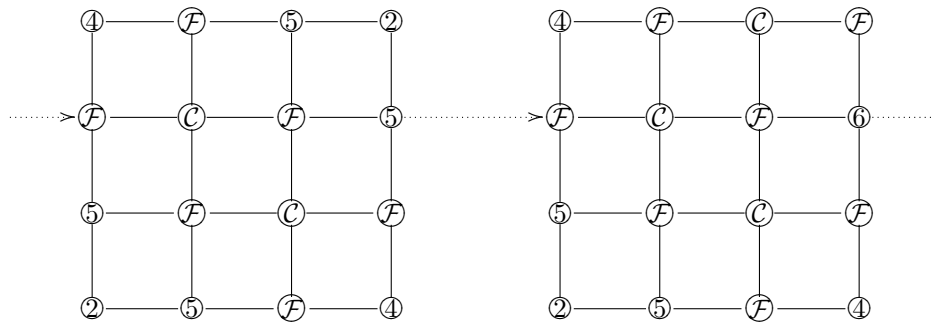
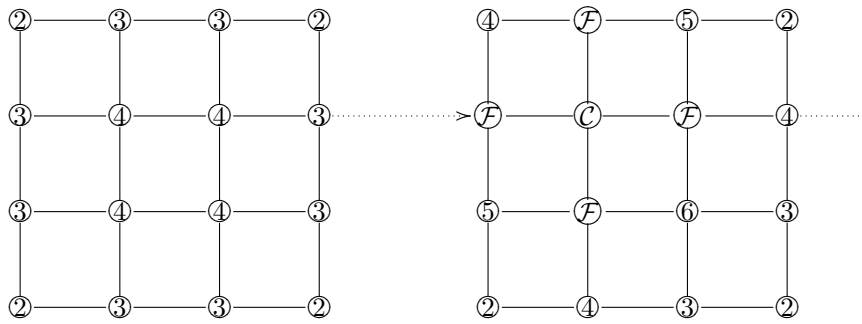
Hier ist die Bestimmung der starken Nachbarn etwas aufwändiger:

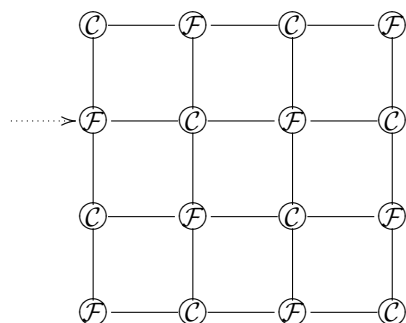
$$\begin{aligned} S_1 &= \{2, n+1\}, \\ S_i &= \{i-1, i+1, i+n\} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n-1, \\ S_n &= \{n-1, 2n\}, \\ S_{jn+1} &= \{(j-1)n+1, jn+1, (j+1)n+1\}, \\ S_{jn+i} &= \{(j-1)n+i, jn+i-1, jn+i+1, (j+1)n+i\} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n-1, j = 2, \dots, n-2, \\ S_{jn+n} &= \{jn, (j+1)n-1, (j+2)n\} \quad \text{für } j = 2, \dots, n-2, \\ S_{n^2-n+1} &= \{n^2-2n, n^2-n+2\}, \\ S_{n^2-n+i} &= \{n^2-2n+i, n^2-n+i-1, n^2-n+i+1\} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n-1, \\ S_{n^2} &= \{n^2-n, n^2-1\}. \end{aligned}$$

Da die Matrix symmetrisch ist, erhält man für die zu  $S_i$  adjungierten Mengen:

$$S_i^T = S_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n^2.$$

Betrachte erneut den ungerichteten Graphen der Matrix. Um es etwas zu vereinfachen, wählen wir  $n = 4$ .Wir starten mit einem maximalen  $\lambda_i$ , zum Beispiel  $i = 6$ :





In den beiden Beispielen wurden Matrizen betrachtet, die aus einer PDE entstanden sind. Daher hatten diese eine gewisse Struktur. Man muss kein algebraisches Mehrgitter-Verfahren benutzen, um solch ein Gleichungssystem zu lösen. Es genügt ein geometrisches Mehrgitter-Verfahren, da man die Prolongation und die Restriktion aus der PDE bzw. der Diskretisierung erhalten kann. Als drittes Beispiel betrachten wir eine nichtsymmetrische M-Matrix.

### Beispiel 4.4.3

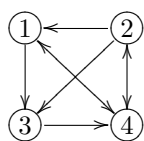
Sei  $\omega = \frac{1}{4}$  und

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Man erhält:

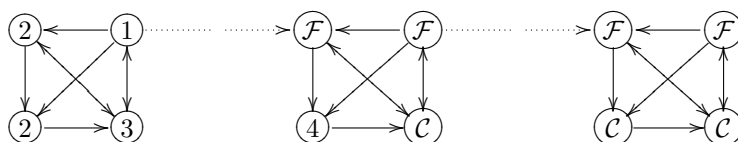
$$S_1 = \{3, 4\}, S_2 = \{1, 3, 4\}, S_3 = \{4\}, S_4 = \{1, 2\} \\ S_1^T = \{2, 4\}, S_2^T = \{4\}, S_3^T = \{1, 2\}, S_4^T = \{1, 2, 3\}.$$

Somit sieht der Graph wie folgt aus:



Hier bedeutet  $\textcircled{i}$  der  $i$ -te Knoten des Graphen.

Nun beginnen wir wieder mit dem ersten Teil des Coarsingprozesses. In die Knoten schreiben wir nun erneut die  $\lambda_i$ .



Man sieht, dass die Knoten eins und zwei eine  $\mathcal{F} - \mathcal{F}$ -Verbindung haben. Wir starten den zweiten Teil des Coarsingprozesses.

Es ist:

$$\mathcal{F} = \{1, 2\}, \mathcal{C} = \{3, 4\}.$$

Wir testen die Feingitterpunkte. Für

$$F_1 = S_1 \setminus \mathcal{C} = \emptyset$$

muss man keine weiteren Untersuchungen anstellen.

Jedoch für  $i = 2$  erhält man:

$$F_2 = S_2 \setminus \mathcal{C} = \{1\}.$$

Wir starten den ersten Versuch. Hat der starke Feingitternachbar 2 von 1 einen mit 1 gemeinsamen starken Grobgitternachbarn? Also:

$$S_1 \cap C_2 = \{3, 4\} \cap \{3, 4\} = \{3, 4\} \neq \emptyset.$$

Somit hat Feingitterpunkt 1 (mindestens) einen mit Feingitterpunkt 2 gemeinsamen starken Nachbarn. Also werden die Gewichte von 1 auf die Grobgitterpunkte 3 und 4 verschoben.

Es ist:

$\mathcal{C} = \{3, 4\}$  und  $\mathcal{F} = \{1, 2\}$ .

## 5 MAMLI, RMAMLI, SMAMLI

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung der Verfahren *MAMLI*, *RMAMLI*, *SMAMLI* gegeben. Die Ergebnisse stammen aus der Dissertation von Christian Mense (TU-Berlin) [9]. In der Dissertation werden sie als Mehrgitter-Verfahren untersucht. Wir beschränken uns auf die Zwei-Level-Verfahren.

### 5.1 Die Iterationsmatrizen

Ausgehend von einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , die die Aufteilung

$$A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$$

mit  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$ ,  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$  und  $n = n_F + n_C$  besitzt, werden Restriktions- und Prolongationsoperatoren konstruiert. Die Matrix  $A$  läßt sich schreiben als

$$A = \begin{bmatrix} I_F & 0 \\ A_{CF}A_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{FF} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_F & A_{FF}^{-1}A_{FC} \\ 0 & I_C \end{bmatrix},$$

wobei

$$(A/A_{FF}) = A_{CC} - A_{CF}A_{FF}^{-1}A_{FC}$$

das Schurkomplement von  $A$  ist.

Da das Gleichungssystem (3.1) gelöst werden soll, interessiert man sich für die Inverse von  $A$ . Für  $A^{-1}$  gilt:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -A_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} (A/A_{FF})^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}A_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da die Matrizen  $A_{FF}$  und  $(A/A_{FF})$  invertiert werden müssen, werden Approximationen  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{S}$  verwendet. Somit erhält man als Approximation an  $A$  und  $A^{-1}$ :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Weiter sieht man:

$$\begin{aligned} (A/\tilde{A}_{FF}) &= A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ &= \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \tilde{A} \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \\ &=: S \end{aligned}$$

Somit wähle als Prolongationsoperator

$$P = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix},$$

als Restriktionsoperator

$$R = [ -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} \quad I_C ]$$

und als Glätter

$$(I - B^{-1}A) = \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right).$$

Man erhält als Iterationsmatrix für die Zwei-Level-Verfahren die Matrizen

1. (mit Vorglätter)

$$\begin{aligned} T_{MAMLI} &= (I - P\tilde{S}^{-1}RA) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} [ -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} \quad I_C ] A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right), \end{aligned}$$

2. (mit Nachglätter)

$$\begin{aligned} T_{RMAMLI} &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) (I - P\tilde{S}^{-1}RA) \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} [ -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} \quad I_C ] A \right), \end{aligned}$$

3. (mit Vor- und Nachglätter)

$$\begin{aligned} T_{SMAMLI} &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) (I - P\tilde{S}^{-1}RA) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} [ -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} \quad I_C ] A \right) \\ &\quad \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right). \end{aligned}$$

Im Weiteren werden die benötigten Eigenschaften der Approximation  $\tilde{A}_{FF}$  an  $A_{FF}$  und  $\tilde{S}$  an  $S = (A/\tilde{A}_{FF})$  untersucht.

## 5.2 Konvergenz von MAMLI, RMAMLI, SMAMLI

In [9] wird gezeigt, dass die Verfahren *MAMLI*, *RMAMLI* und *SMAMLI* unter gewissen Voraussetzungen konvergieren.

**Satz 5.2.1** ([9])

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{FF}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

1.  $\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1$ ,
2.  $\rho(T_{RMAMLI}) < 1$ ,
3.  $\rho(T_{SMAMLI}) \leq \|T_{SMAMLI}\|_w < 1$ ,

mit  $w = A^{-1}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

Wir benötigen später folgendes Lemma aus [10]:

**Lemma 5.2.2** ([10])

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{FF}$  ist, dann gilt:

$$\left\| I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right\|_w = 1,$$

für  $w = A^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.



### 5.3 MAMLI, RMAMLI, SMAMLI als Splittings

Außerdem wird in der Arbeit [9] gezeigt, dass die Verfahren *MAMLI*, *RMAMLI* und *SMAMLI* nicht nur konvergent sind, sondern auch die Splittingeigenschaft von  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  erben.

Es gilt:

**Satz 5.3.1** ([9])

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

1. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{FF}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ebenfalls ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$(M_{MAMLI}, M_{MAMLI} - A)$  ist ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$ , wobei

$$M_{MAMLI}^{-1} = P\tilde{S}^{-1}R + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - P\tilde{S}^{-1}RA \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ist.

2. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{FF}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ebenfalls ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$(M_{RMAMLI}, M_{RMAMLI} - A)$  ist ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$ , wobei

$$M_{RMAMLI}^{-1} = P\tilde{S}^{-1}R + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} AP\tilde{S}^{-1}R$$

ist.

3. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein nichtnegatives Splitting von  $A_{FF}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ebenfalls ein nichtnegatives Splitting von  $S$  ist, dann gilt:

$(M_{SMAMLI}, M_{SMAMLI} - A)$  ist ein nichtnegatives Splitting von  $A$ , wobei

$$\begin{aligned} M_{SMAMLI}^{-1} = & P\tilde{S}^{-1}R + 2 \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & - P\tilde{S}^{-1}RA \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} AP\tilde{S}^{-1}R - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} AP\tilde{S}^{-1}RA \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ist.

# 6 Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit durch zusätzlichen Glätter

In diesem Kapitel betrachten wir ein Zwei-Level-Verfahren mit einer Iterationsmatrix  $T$ . Wir werden zeigen, dass der Spektralradius einer Iterationsmatrix  $\tilde{T}$  eines Verfahrens, das mindestens einen Glätter mehr als das Verfahren mit  $T$  verwendet, nicht größer wird, d.h.

$$\rho(\tilde{T}) \leq \rho(T).$$

Somit kann im Allgemeinen eine schnellere Konvergenz durch weitere Glättung erwartet werden. Der Glätter muß gewisse Tupeleigenschaften besitzen.

Am Ende dieses Kapitels werden wir die Verfahren *MAMLI*, *RMAMLI* und *SMAMLI*, die nur auf den Feingitterpunkten glätten, mit Verfahren vergleichen, die das *Block-Gauß-Seidel-Verfahren* als Glätter verwenden, somit also auf dem ganzen Gebiet glätten.

Um das zeigen zu können, benötigen wir einige Hilfsmittel.

## 6.1 Vererbung von Splittingeigenschaften

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Eigenschaften eines Tupels  $(C, A)$  und eines Splittings  $(M, N)$  sich auf eine Kombination dieser beiden vererben.

### 6.1.1 Schwach reguläre Tupel/Splittings vom ersten Typ

Zuerst betrachten wir schwach reguläre Tupel bzw. Splittings vom ersten Typ.

#### Lemma 6.1.1

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Weiter seien  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$  und  $[C_2, A]$  ein schwach reguläres Tupel vom ersten Typ.

Dann ist

$$C_{12} = C_1 + C_2 - C_1 A C_2$$

invertierbar und es gilt:

$(C_{12}^{-1}, C_{12}^{-1} - A)$  ist ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$ .

*Beweis:*

Wir wenden Satz 2.5.4 an.

Also ist zu zeigen:

1.  $I - C_{12}A \geq 0$ .
2.  $C_{12} \geq 0$ .
3.  $C_{12}$  hat keine Nullzeilen.

zu 1. Betrachte:

$$\begin{aligned}(I - C_1A)(I - C_2A) &= I - (C_1 + C_2 - C_1AC_2)A \\ &= I - C_{12}A.\end{aligned}$$

Da  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$  ist, gilt:

$$I - C_1A \geq 0.$$

Nach Voraussetzung ist

$$I - C_2A \geq 0.$$

Somit gilt auch für das Produkt

$$(I - C_1A)(I - C_2A) \geq 0.$$

und damit ist

$$I - C_{12}A \geq 0.$$

zu 2. Außerdem haben wir schon gesehen, dass

$$C_{12} = C_1 + C_2 - C_1AC_2 = C_1 + (I - C_1A)C_2.$$

ist. Nach den Voraussetzungen ist

$$C_1 \geq 0, C_2 \geq 0 \text{ und } I - C_1A \geq 0.$$

Somit ist auch

$$C_{12} \geq 0.$$

zu 3. Da  $C_1^{-1}$  aus einem Splitting stammt, ist  $C_1^{-1}$  nichtsingulär, somit hat  $C_1$  auch keine Nullzeilen. Da

$$C_{12} = C_1 + (I - C_1A)C_2$$

gilt, und

$$C_1 \geq 0 \text{ und } (I - C_1A)C_2 \geq 0$$

ist, hat auch  $C_{12}$  keine Nullzeilen.

□

### 6.1.2 Schwach reguläre Tupel/Splittings vom zweiten Typ

Analog zum letzten Abschnitt kann folgendes für schwach reguläre Tupel bzw. Splittings vom zweiten Typ gezeigt werden:

#### Lemma 6.1.2

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Weiter seien  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$  und  $[C_2, A]$  ein schwach reguläres Tupel vom zweiten Typ.

Dann ist

$$C_{21} = C_1 + C_2 - C_2AC_1$$

invertierbar und es gilt:

$(C_{21}^{-1}, C_{21}^{-1} - A)$  ist ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$ .

*Beweis:*

Erneut wenden wir Satz 2.5.4 an.

Zu zeigen ist:

1.  $I - AC_{21} \geq 0$ .
2.  $C_{21} \geq 0$ .
3.  $C_{21}$  hat keine Nullzeilen.

zu 1. Es gilt:

$$\begin{aligned}(I - AC_2)(I - AC_1) &= I - A(C_1 + C_2 - C_2AC_1) \\ &= I - AC_{21}\end{aligned}$$

Da  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$  ist, gilt:

$$I - AC_1 \geq 0.$$

Nach Voraussetzung ist

$$I - AC_2 \geq 0.$$

Somit gilt auch für das Produkt

$$(I - AC_2)(I - AC_1) \geq 0$$

und damit ist

$$I - AC_{21} \geq 0.$$

zu 2. Außerdem haben wir schon gesehen, dass

$$C_{21} = C_1 + C_2 - C_2AC_1 = C_1 + C_2(I - AC_1)$$

ist. Nach den Voraussetzungen ist

$$C_1 \geq 0, C_2 \geq 0 \text{ und } I - AC_1 \geq 0.$$

Somit ist auch

$$C_{21} \geq 0.$$

zu 3. Da  $C_1^{-1}$  aus einem Splitting kommt, ist  $C_1^{-1}$  nichtsingulär, somit hat  $C_1$  auch keine Nullzeilen. Da

$$C_{21} = C_1 + C_2(I - AC_1)$$

gilt, und

$$C_1 \geq 0 \text{ und } C_2(I - AC_1) \geq 0$$

ist, hat auch  $C_{21}$  keine Nullzeilen.

□

### 6.1.3 Nichtnegative Tupel/Splittings

Auch für nichtnegative Tupel bzw. Splittings gilt ein analoger Zusammenhang.

**Lemma 6.1.3**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Weiter seien  $(C_1^{-1}C_1^{-1} - A)$  ein nichtnegatives Splitting von  $A$  und  $[C_2, A]$  ein nichtnegatives Tupel. Dann sind

$$C_{12} = C_1 + C_2 - C_1AC_2$$

und

$$C_{21} = C_1 + C_2 - C_2AC_1$$

invertierbar und es gilt:

$(C_{12}^{-1}, C_{12}^{-1} - A)$  und  $(C_{21}^{-1}, C_{21}^{-1} - A)$  sind nichtnegatives Splittings von  $A$ .

*Beweis:*

1.  $(C_{12}^{-1}, C_{12}^{-1} - A)$  ist ein nichtnegatives Splitting von  $A$ :  
Da  $(C_1^{-1}, C_1^{-1} - A)$  ein nichtnegatives Splitting von  $A$ , ist es insbesondere ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ. Mit Lemma 6.1.1 folgt, dass  $(C_{12}^{-1}, C_{12}^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ ist. Somit muss nur noch gezeigt werden:

$$I - AC_{12} \geq 0.$$

Es gilt:

$$I - AC_{12} = I - A(C_1 + C_2 - C_1AC_2) = (I - AC_1)(I - AC_2) \geq 0.$$

2.  $(C_{21}^{-1}, C_{21}^{-1} - A)$  ist ein nichtnegatives Splitting von  $A$ :  
Auch hier folgt mir Lemma 6.1.2, dass  $(C_{21}^{-1}, C_{21}^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ ist. Außerdem gilt:

$$I - C_{21}A = I - (C_1 + C_2 - C_2AC_1)A = (I - C_2A)(I - C_1A) \geq 0.$$

Somit ist  $(C_{21}^{-1}, C_{21}^{-1} - A)$  ein nichtnegatives Splitting von  $A$

□

## 6.2 Konvergenz vom Iterationsverfahren durch Splittings

In diesem Abschnitt wollen wir den Spektralradius von Produkten verschiedener Operatoren, die gewisse Splittingsigenschaften besitzen, untersuchen. Ausgehend von einem konvergenten Verfahren mit der Iterationsmatrix  $I - CA$  werden wir sehen, dass durch weitere Glättung die Konvergenz erhalten bleibt und die Konvergenzgeschwindigkeit erhöht wird.

### 6.2.1 Vorglätter

Zuerst betrachten wir das Verfahren mit einen zusätzlichen Vorglätter  $I - B_{pre}A$ .  
Dann gilt:

#### Korollar 6.2.1

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix. Weiter seien  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$  und  $[B_{pre}, A]$  ein schwachreguläres Tupel vom ersten Typ.  
Dann gilt für

$$T_{pre} = (I - CA)(I - B_{pre}A)$$

und  $w = A^{-1}d$  mit einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ :

$$\rho(T_{pre}) \leq \|T_{pre}\|_w < 1.$$

*Beweis:*

Mit Lemma 6.1.1 folgt, dass  $(C_{pre}^{-1}, C_{pre}^{-1} - A)$  mit  $C_{pre} = C + B_{pre} - CAB_{pre}$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ ist. Außerdem gilt:

$$T_{pre} = (I - CA)(I - B_{pre}A) = I - (C + B_{pre} - CAB_{pre})A = I - C_{pre}A.$$

Somit gilt nach Satz 2.5.6:

$$\rho(T_{pre}) \leq \|T_{pre}\|_w < 1.$$

□

### 6.2.2 Nachglätter

Betrachten das Verfahren mit einen zusätzlichen Nachglätter  $I - B_{post}A$ .  
Dann gilt:

#### Korollar 6.2.2

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix. Weiter seien  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$  und  $[B_{post}, A]$  ein schwachreguläres Tupel vom zweiten Typ.  
Dann gilt für

$$T_{post} = (I - B_{post}A)(I - CA) = I - C_{post}A$$

und  $w = A^{-T}d$  mit einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ :

$$\rho(T_{post}) \leq \|I - C_{post}^T A^T\|_w < 1.$$

*Beweis:*

Mit Lemma 6.1.2 folgt, dass  $(C_{post}^{-1}, C_{post}^{-1} - A)$  mit  $C_{post} = C + B_{post} - B_{post}AC$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ ist. Außerdem gilt:

$$T_{post} = (I - B_{post}A)(I - CA) = I - (C + B_{post} - B_{post}AC)A = I - C_{post}A.$$

Somit gilt nach Satz 2.5.6:

$$\rho(T_{post}) = \rho(I - C_{post}A) = \rho(I - AC_{post}) \leq \|I - C_{post}^T A^T\|_w < 1.$$

□

## 6.3 Vergleichsätze

In diesem Abschnitt wollen wir die Konvergenzgeschwindigkeit zweier Verfahren vergleichen. Die Verfahren unterscheiden sich durch einen Glättungsoperator. Als Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit nutzen wir den Konvergenzradius der Iterationsmatrizen.

Wir werden sehen, dass die Konvergenzradien verglichen werden können, falls **nichtnegative** Splittings bzw. Tupels vorausgesetzt werden.

### 6.3.1 Vorglätter

Zuerst betrachten wir eine Iterationsmatrix  $T_{pre}$ , die einen Vorglätter  $I - B_{pre}A$  verwendet.

#### Satz 6.3.1

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix.  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  sei ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$ , und  $[B_{pre}, A]$  sei ein schwachreguläres Tupel vom ersten Typ.

Dann gilt für

$$\begin{aligned} T &= I - CA, \\ T_{pre} &= (I - CA)(I - B_{pre}A) \end{aligned}$$

und  $w = A^{-1}d$  mit einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|T_{pre}\|_w \leq \|T\|_w.$$

*Beweis:*

Aus Lemma 6.1.1 ist bekannt, dass  $(C_{pre}^{-1}, C_{pre}^{-1} - A)$  mit  $C_{pre} = C + B_{pre} - CAB_{pre}$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$  ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} C_{pre} &= C + B_{pre} - CAB_{pre} \\ &= C + \underbrace{(I - CA)}_{\geq 0} \underbrace{B_{pre}}_{\geq 0} \\ &\geq C. \end{aligned}$$

Weiter folgt dann mit Satz 2.5.7:

$$\|T_{pre}\|_w \leq \|T\|_w.$$

□

Bisher konnten wir nur die Normen der beiden Verfahren vergleichen. Da wir aber eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit treffen wollen, müssen wir für das Splitting  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  eine etwas stärkere Eigenschaft fordern.



**Satz 6.3.2**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix.  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  sei ein nichtnegatives Splitting von  $A$ , und  $[B_{pre}, A]$  sei ein schwachreguläres Tupel vom ersten Typ. Dann gilt für  $T = I - CA$  und  $T_{pre} = (I - CA)(I - B_{pre}A)$ :

$$\rho(T_{pre}) \leq \rho(T).$$

*Beweis:*

Wie wir in Satz 6.3.1 gesehen haben, ist  $(C_{pre}^{-1}, C_{pre}^{-1} - A)$  mit  $C_{pre} = C + B_{pre} - CAB_{pre}$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$  und es gilt:

$$C_{pre} \geq C.$$

Da  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ein nichtnegatives Splitting von  $A$  ist, ist es insbesondere auch ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$ . Somit ist Satz 2.5.9 anwendbar und es gilt:

$$\rho(T_{pre}) \leq \rho(T).$$

□

**6.3.2 Nachglätter**

Analog zum vorherigen Abschnitt betrachten wir nun eine Iterationsmatrix  $T_{post}$ , die einen Nachglätter  $I - B_{post}A$  benutzt.

Für den Vergleich der  $w$ -Norm erhält man:

**Satz 6.3.3**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix.  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  sei ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$ , und  $[B_{post}, A]$  sei ein schwachreguläres Tupel vom zweiten Typ. Dann gilt für

$$\begin{aligned} T &= I - CA, \\ T_{post} &= (I - B_{post}A)(I - CA) \end{aligned}$$

und  $w = A^{-T}d$  mit einem beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ :

$$\| (I - C^T A^T) (I - B_{post}^T A^T) \|_w \leq \| I - C^T A^T \|_w.$$

*Beweis:*

Aus Lemma 6.1.2 ist bekannt, dass  $(C_{post}^{-1}, C_{post}^{-1} - A)$  mit  $C_{post} = C + B_{post} - B_{post}AC$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$  ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} C_{post} &= C + B_{post} - B_{post}AC \\ &= C + \underbrace{B_{post}}_{\geq 0} \underbrace{(I - AC)}_{\geq 0} \\ &\geq C. \end{aligned}$$

Weiter folgt dann mit Satz 2.5.8:

$$\| I - C_{post}^T A^T \|_w = \| (I - C^T A^T) (I - B_{post}^T A^T) \|_w \leq \| I - C^T A^T \|_w$$

mit  $w = A^{-T}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

□

Auch hier wollen wir nicht nur die Normen vergleichen, sondern auch eine Aussage über die Spektralradien treffen.

**Satz 6.3.4**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix.  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  sei ein nichtnegatives Splitting von  $A$ , und  $[B_{post}, A]$  sei ein schwachreguläres Tupel vom zweiten Typ. Dann gilt für  $T = I - CA$  und  $T_{post} = (I - B_{post}A)(I - CA)$ :

$$\rho(T_{post}) \leq \rho(T).$$

*Beweis:*

Wie wir in Satz 6.3.3 gesehen haben, ist  $(C_{post}^{-1}, C_{post}^{-1} - A)$  mit  $C_{post} = C + B_{post} - B_{post}AC$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$  und gilt:

$$C_{post} \geq C.$$

Da  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  ein nichtnegatives Splitting von  $A$  ist, ist es insbesondere auch ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$ . Somit ist Satz 2.5.9 anwendbar und es gilt:

$$\rho(T_{post}) \leq \rho(T).$$

□

### 6.3.3 Kombination von Vor- und Nachglätter

Zuletzt fehlt uns noch die Kombination von Vorglätter und Nachglätter.  
Hier erhalten wir folgenden Satz:

**Satz 6.3.5**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix.  $(C^{-1}, C^{-1} - A)$  sei ein nichtnegatives Splitting von  $A$ . Außerdem seien  $B_{pre,i}$  und  $B_{post,j}$  so, dass  $[B_{pre,i}, A]$  und  $[B_{post,j}, A]$  nichtnegative Tupel sind (für alle  $i = 1, 2, \dots, \gamma$  und  $j = 1, 2, \dots, \delta$ ). Dann haben die Iterationsmatrizen

$$T_{\gamma,\delta} = (I - B_{post,\gamma}A) \dots (I - B_{post,1}A)(I - CA)(I - B_{pre,1}A) \dots (I - B_{pre,\delta}A)$$

folgende Eigenschaften:

1.  $\rho(T_{\gamma+1,\delta}) \leq \rho(T_{\gamma,\delta}) \quad \forall \gamma \geq 1, \delta \geq 1.$
2.  $\rho(T_{\gamma,\delta+1}) \leq \rho(T_{\gamma,\delta}) \quad \forall \gamma \geq 1, \delta \geq 1.$

*Beweis:*

Sei  $\gamma$  und  $\delta$  fest gewählt. Mit Lemma 6.1.3 erhält man, dass  $(C_{\gamma,\delta}^{-1}, C_{\gamma,\delta}^{-1} - A)$  nichtnegative Splittings sind, wobei für  $C_{\gamma,\delta}$  gilt:

$$T_{\gamma,\delta} = I - C_{\gamma,\delta}A.$$

Weiter gilt:

1.

$$\begin{aligned} C_{\gamma,\delta} &= C_{\gamma-1,\delta} + B_{post\gamma} - B_{post\gamma}AC_{\gamma-1,\delta} \\ &= C_{\gamma-1,\delta} + B_{post\gamma}(I - AC_{\gamma-1,\delta}) \\ &\geq C_{\gamma-1,\delta}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} C_{\gamma,\delta} &= C_{\gamma,\delta-1} + B_{pre,\delta} - C_{\gamma,\delta-1}AB_{pre,\delta} \\ &= C_{\gamma,\delta-1} + (I - C_{\gamma,\delta-1}A)B_{pre,\delta} \\ &\geq C_{\gamma,\delta-1}. \end{aligned}$$

Also folgt mit Satz 2.5.9 die Behauptung.

□

## 6.4 Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter

### 6.4.1 Einführung

Im Folgenden betrachten wir erneut das *MAMLI-Verfahren*. Wir wollen nun die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte anwenden, um das *MAMLI*, *RMAMLI* und *SMAMLI* mit Iterationsverfahren zu vergleichen, die einen weiteren Glätter benutzen. Dieser Glätter wird so gewählt, dass die Iterationsmatrizen eine Kombination des Grobgitterschrittes und des *Gauß-Seidel-Verfahrens* sind.

Dafür nutzen wir folgende Operatoren:

- $P = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$ ,
- $R = [ A_{FC} \tilde{A}_{FF}^{-1} \quad I_C ]$ ,
- $G = (I - P\tilde{S}^{-1}RA)$ ,
- $B_F = \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right)$ ,
- $B_C = \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right)$ .

Das führt uns auf folgende Iterationsmatrizen:

1. *Verfahren mit F-Glätter:*

- *MAMLI-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{MAMLI} &= G \cdot B_F \\ &= (I - P\tilde{S}^{-1}RA) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right), \end{aligned}$$

- *RMAMLI-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{RMAMLI} &= B_F \cdot G \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) (I - P\tilde{S}^{-1}RA), \end{aligned}$$

- *SMAMLI-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{SMAMLI} &= B_F \cdot G \cdot B_F \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) (I - P\tilde{S}^{-1}RA) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right). \end{aligned}$$

2. *Iteration mit dem Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter:*

- *GFC-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{GFC} &= G \cdot B_F \cdot B_C \\ &= (I - P\tilde{S}^{-1}RA) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right), \end{aligned}$$

- *GCF-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{GCF} &= G \cdot B_C \cdot B_F \\ &= \left( I - P\tilde{S}^{-1}RA \right) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right), \end{aligned}$$

- *FCG-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{FCG} &= B_F \cdot B_C \cdot G \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \left( I - P\tilde{S}^{-1}RA \right), \end{aligned}$$

- *CFG-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{CFG} &= B_C \cdot B_F \cdot G \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - P\tilde{S}^{-1}RA \right), \end{aligned}$$

- *CFGFC-Verfahren:*

$$\begin{aligned} T_{CFGFC} &= B_C \cdot B_F \cdot G \cdot B_F \cdot B_C \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - P\tilde{S}^{-1}RA \right) \\ &\quad \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right). \end{aligned}$$

Dabei sind die Matrizen  $\tilde{A}_{FF}$ ,  $\tilde{A}_{CC}$  und  $\tilde{S}$  Approximationen an die Matrizen  $A_{FF}$ ,  $A_{CC}$  und  $S$ , die leicht zu invertieren sein sollten.

Die Glätter  $B_F \cdot B_C$  und  $B_C \cdot B_F$  kann man als Glätter, der durch das *Gauß-Seidel-Verfahren* bzw. *rückwärts Gauß-Seidel-Verfahren* gegeben ist, interpretieren:

1. Für  $B_F \cdot B_C$  gilt Folgendes:

- Man erhält:

$$\begin{aligned} B_F \cdot B_C &= \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \\ &= I - \left( \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} \right) A \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{A}_{CC}^{-1} \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A. \end{aligned}$$

- Das entspricht dem Glätter, der durch das *Block-Gauß-Seidel-Verfahren* von der Matrix  $A$  entsteht (obere Dreiecksmatrix), d.h.

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & A_{FC} \\ 0 & \tilde{A}_{CC} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{A}_{CC}^{-1} \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix}.$$

2. Für  $B_C \cdot B_F$  gilt Folgendes:

- Auch hier ist analog:

$$\begin{aligned} B_C \cdot B_F &= \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ -\tilde{A}_{CC}^{-1} A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A. \end{aligned}$$

- Dies entspricht dem Glätter, der durch das rückwärts *Block-Gauß-Seidel-Verfahren* der Matrix  $A$  entsteht (diese Mal die untere Dreiecksmatrix), d.h.

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & 0 \\ A_{CF} & \tilde{A}_{CC} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ -\tilde{A}_{CC}^{-1} A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix}.$$

### 6.4.2 Konvergenz

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Konvergenz der Verfahren  $GFC$ ,  $CFG$ ,  $FGC$ ,  $CGF$  und  $GFCFG$ .

Dafür benötigen wir eine Abschätzung der Norm des Glätters  $C$ :

**Lemma 6.4.1**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre M-Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{CC}$  ist, dann gilt:

$$I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \geq 0,$$

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right\|_w = 1,$$

mit  $w = A^{-1}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis:*

Es gilt:

$$I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I_F & 0 \\ \tilde{A}_{CC}^{-1} A_{CF} & I_C - \tilde{A}_{CC}^{-1} A_{CC} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Sei nun  $d \in \mathbb{R}^n$  ein beliebiger positiver Vektor. Da  $A$  eine nichtsinguläre M-Matrix ist, ist auch  $w = A^{-1}d$  positiv und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) w \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) A^{-1}d \\ &= w - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} d \\ &\leq w. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.8 folgt:

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right\|_w \leq 1.$$

Betrachte nun folgenden Vektor:

$$(\bar{v})_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, \dots, n_F \\ 0 & \text{für } i = n_F + 1, \dots, n \end{cases}.$$

Dann erhält man für  $v = A^{-1}\bar{v}$ :

$$\left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) v = v.$$

Somit ist Eins ein Eigenwert zum Eigenvektor  $v$  und es folgt weiter:

$$1 \leq \rho \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right).$$

Insgesamt erhält man:

$$1 \leq \rho \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \leq \left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right\|_w \leq 1.$$

Also ist die Behauptung gezeigt. □

Ein analoges Ergebnis kann für ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ gezeigt werden.

**Lemma 6.4.2**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{CC}$  ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T &\geq 0, \\ \left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_w &= 1, \end{aligned}$$

mit  $w = A^{-T}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis:*

Es gilt:

$$I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} I_F & 0 \\ -(A_{FC}\tilde{A}_{CC}^{-1})^T & (I_C - A_{CC}\tilde{A}_{CC}^{-1})^T \end{bmatrix} \geq 0.$$

Sei im Weiteren  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv und  $w = A^{-T}d$ . Dann erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right) w \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right) A^{-T}d \\ &= w - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} d \\ &\leq w. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.8 folgt:

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_w \leq 1.$$

Setze  $v = A^{-T}\bar{v}$  mit  $\bar{v}$  aus dem Beweis vom Lemma 6.4.1. Man erhält:

$$\left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right) v = v.$$

Somit ist Eins ein Eigenwert und es gilt:

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_w = 1.$$

□



Nun kann man die Konvergenz für das *GFC*-Verfahren zeigen:

**Satz 6.4.3**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typen von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$$\rho(T_{GFC}) \leq \|T_{GFC}\|_w < 1,$$

mit  $w = A^{-1}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis:*

Es gilt:

$$\begin{aligned} T_{GFC} &= (I - P\tilde{S}^{-1}RA) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \\ &= T_{MAMLI} \cdot \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right). \end{aligned}$$

Da nach Satz 5.2.1

$$\|T_{MAMLI}\|_w \leq 1$$

und nach Lemma 6.4.1

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right\|_w = 1,$$

mit  $w = A^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv ist, gilt weiter:

$$\begin{aligned} \|T_{GFC}\|_w &= \left\| T_{MAMLI} \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \right\|_w \\ &\leq \|T_{MAMLI}\|_w \left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right\|_w \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Somit erhält man die Behauptung:

$$\rho(T_{GFC}) \leq \|T_{GFC}\|_w < 1.$$

□

Analog kann man auch die Konvergenz des *CFG*-Verfahrens zeigen:

**Satz 6.4.4**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$$\rho(T_{CFG}) < 1.$$

*Beweis:*

Betrachte folgendes:

$$\begin{aligned} \rho(T_{CFG}) &= \rho(T_{CFG}^T) \\ &= \rho(G^T B_F^T B_C^T) \\ &= \rho(A^{-T} G^T B_F^T B_C^T A^T) \\ &\leq \|A^{-T} G^T B_F^T B_C^T A^T\|_w \\ &= \|A^{-T} G^T B_F^T A^T A^{-T} B_C^T A^T\|_w \\ &\leq \|A^{-T} G^T B_F^T A^T\|_w \|A^{-T} B_C^T A^T\|_w, \end{aligned}$$

für  $w = A^{-T}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

Es gilt weiter:

$$\begin{aligned} A^{-T} G^T B_F^T A^T &= A^{-T} (I - P\tilde{S}^{-1}RA)^T \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right)^T A^T \\ &= A^{-T} (I - A^T R^T \tilde{S}^{-T} P^T) A^T A^{-T} \left( I - A^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) A^T \\ &= (I - R^T \tilde{S}^{-T} P^T A^T) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T \right) \\ &= (I - AP\tilde{S}^{-1}R)^T \left( I - A \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \left( \left( I - A \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) (I - AP\tilde{S}^{-1}R) \right)^T \\ &= (I - AM_{RMAMLI}^{-1})^T. \end{aligned}$$

Aus Satz 5.3.1 wurde gezeigt, dass  $(M_{RMAMLI}, M_{RMAMLI} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ ist, somit folgt mit Satz 2.5.8:

$$\left\| (I - AM_{RMAMLI}^{-1})^T \right\|_w < 1,$$

mit  $w = A^{-T}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv. Also haben wir gesehen, dass gilt:

$$\|A^{-T} G^T B_F^T A^T\|_w < 1.$$

Wir untersuchen nun den Term  $\|A^{-T} B_C^T A^T\|_w$ . Es gilt:

$$\|A^{-T} B_C^T A^T\|_w = \left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_w$$

In Lemma 6.4.2 wurde gezeigt:

Falls  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{CC}$  ist und  $w = A^{-T}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv, dann folgt:

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_w = 1.$$

Somit ist insgesamt gezeigt worden:

$$\rho(T_{CFG}) \leq \|A^{-T}G^T B_F^T A^T\|_w \|A^{-T}B_C^T A^T\|_w < 1,$$

für  $w = A^{-T}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv. □

Mit Hilfe dieser Sätze können wir nun die Konvergenz der Verfahren  $GCF$  und  $FCG$  zeigen:

**Satz 6.4.5**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

1. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$$\rho(T_{FCG}) < 1.$$

2. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$$\rho(T_{GCF}) < 1.$$

*Beweis:*

Seien  $A \in \mathbb{R}^{n, n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n, n}$  zwei beliebige Matrizen, dann gilt nach Lemma 2.2.2:

$$\rho(AB) = \rho(BA).$$

Also erhält man:

- $T_{FCG}$ :

In Satz 6.4.3 wurde gezeigt, dass unter obigen Voraussetzungen gilt:

$$\rho(T_{GFC}) < 1.$$

Somit erhält man:

$$\rho(T_{FCG}) = \rho(B_F \cdot B_C \cdot G) = \rho(G \cdot B_F \cdot B_C) = \rho(T_{GFC}) < 1.$$

- $T_{GCF}$ :

In Satz 6.4.4 wurde gezeigt, dass unter obigen Voraussetzungen gilt:

$$\rho(T_{CFG}) < 1.$$

Somit erhält man:

$$\rho(T_{GCF}) = \rho(G \cdot B_C \cdot B_F) = \rho(B_C \cdot B_F \cdot G) = \rho(T_{CFG}) < 1.$$

□

Somit fehlt nur noch die Konvergenz für das *CFGFC*-Verfahren:

**Satz 6.4.6**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$$\rho(T_{CFGFC}) \leq \|T_{CFGFC}\|_w < 1,$$

mit  $w = A^{-1}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis:*

Wie oben gesehen gilt:

$$\|T_{CFGFC}\|_w = \|B_C \cdot B_F \cdot G \cdot B_F \cdot B_C\|_w \leq \|B_C\|_w \|B_F\|_w \|T_{GFC}\|_w < 1$$

mit  $w = A^{-1}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

Hier wurden folgende Zusammenhänge genutzt:

Aus Lemma 5.2.2 folgt:

$$\|B_F\|_w = 1,$$

aus Lemma 6.4.1 folgt:

$$\|B_C\|_w = 1$$

und aus Satz 6.4.3 folgt:

$$\|T_{GFC}\|_w < 1.$$

Also erhält man auch:

$$\rho(T_{CFGFC}) \leq \|T_{CFGFC}\|_w < 1.$$

□

### 6.4.3 Vergleich: (R/S)MAMLI - (R/S)MAMLI mit dem Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter

In diesem Abschnitt wird die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren *MAMLI*, *RMAMLI* und *SMAMLI* mit jener von den Verfahren *GFC*, *CFG* und *CFGFC* verglichen. Wir werden sehen, dass die Verfahren, die auf dem ganzen Gebiet glätten, i.A. einen kleineren Konvergenzradius besitzen und somit eine schnellere Konvergenz zu erwarten ist.

Zuvor zeigen wir, dass

$$\left[ \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \right]$$

und

$$\left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix}, A \right]$$

nichtnegative Tupel sind.

#### Lemma 6.4.7

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  und  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  nichtnegative Splittings von  $A_{FF}$  bzw.  $A_{CC}$  sind, dann gilt:

1.  $\left[ \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \right]$  ist ein nichtnegatives Tupel.
2.  $\left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix}, A \right]$  ist ein nichtnegatives Tupel.

*Beweis:*

1. Zu zeigen ist:

- a)  $\begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$ .
- b)  $I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \geq 0$ .
- c)  $I - A \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$ .

zu (a) Da  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein nichtnegatives Splitting von  $A_{FF}$  ist, gilt:

$$\tilde{A}_{FF}^{-1} \geq 0.$$

zu (b) Es gilt:

$$I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF} & -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \\ 0 & I_C \end{bmatrix} \geq 0,$$

da erneut  $(\tilde{A}_{FF}, -\tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein nichtnegatives Splitting von  $A_{FF}$  ist und  $A_{FC} \leq 0$  ist.

zu (c) Analog erhält man:

$$I - A \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF} & 0 \\ -A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \geq 0.$$

2. Folgt analog zu 1..

□

Wie schon erwähnt, werden wir nun die Verfahren *MAMLI*, *RMAMLI* und *SMAMLI* mit dem jeweiligen Verfahren vergleichen, das mit *Gauß-Seidel-Verfahren* als zusätzlichen Glätter arbeitet.

**Satz 6.4.8**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

1. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$$\|I - M_{GFC}^{-1} A\|_w \leq \|I - M_{MAMLI}^{-1} A\|_w$$

mit  $w = A^{-1}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

2. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $S$  ist, dann gilt:

$$\|I - M_{CFG}^{-T} A^T\|_w \leq \|I - M_{RMAMLI}^{-T} A^T\|_w$$

mit  $w = A^{-T}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

3. Falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein nichtnegatives Splitting von  $A_{FF}$ ,  $(\tilde{A}_{CC}, \tilde{A}_{CC} - A_{CC})$  ein nichtnegatives Splitting von  $A_{CC}$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  ein nichtnegatives Splitting von  $S$  ist, dann gilt:

$$\rho(T_{CFGFC}) \leq \rho(T_{SMAMLI}).$$

*Beweis:*

zu 1. Es ist

$$I - M_{GFC}^{-1}A = (I - M_{MAMLI}^{-1}A) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right).$$

Da nach Satz 5.3.1  $(M_{MAMLI}, M_{MAMLI} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $A$  ist, und wir zuvor gesehen haben, dass  $\left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix}, A \right]$  ein nichtnegatives Tupel ist, folgt mit Satz 6.3.1:

$$\|I - M_{GFC}^{-1}A\|_w \leq \|I - M_{MAMLI}^{-1}A\|_w.$$

mit  $w = A^{-1}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

zu 2. Für  $T_{CFG}$  gilt:

$$I - M_{CFG}^{-1}A = \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) (I - M_{RMAMLI}^{-1}A).$$

Außerdem ist nach Satz 5.3.1  $(M_{RMAMLI}, M_{RMAMLI} - A)$  ein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ von  $A$ . Mit Satz 6.3.3 folgt also:

$$\|I - M_{CFG}^{-T}A^T\|_w \leq \|I - M_{RMAMLI}^{-T}A^T\|_w$$

mit  $w = A^{-T}d$  für einen beliebigen positiven Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$ .

zu 3. Es ist:

$$T_{CFGFC} = \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) (I - M_{SMAMLI}^{-1}A) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right),$$

und  $(M_{SMAMLI}, M_{SMAMLI} - A)$  ist nach Satz 5.3.1 ein nichtnegatives Splitting von  $A$ . Somit erhält man nach Satz 6.3.2:

$$\rho \left( (I - M_{SMAMLI}^{-1}A) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \right) \leq \rho(I - M_{SMAMLI}^{-1}A).$$

Es gilt:

$$(I - M_{SMAMLI}^{-1}A) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) = I - M_{FGFC}^{-1}A.$$

Nach Lemma 6.1.3 ist  $(M_{FGFC}, M_{FGFC} - A)$  wieder ein nichtnegatives Splitting von  $A$ . Somit folgt nun nach Satz 6.3.4:

$$\begin{aligned} & \rho(T_{CFGFC}) \\ &= \rho \left( \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) (I - M_{SMAMLI}^{-1}A) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \right) \\ &\leq \rho \left( (I - M_{SMAMLI}^{-1}A) \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right) \right) \\ &\leq \rho(I - M_{SMAMLI}^{-1}A). \end{aligned}$$

□



**Bemerkung 6.4.9**

*Im Beweis des Satzes 6.4.8 wurde auch Folgendes gezeigt:*

$$\rho(T_{SMAMLI} \cdot C) \leq \rho(T_{SMAMLI}),$$

*d.h. man benötigt kein symmetrisches Verfahren, um den Konvergenzradius zu verkleinern. Es reicht bereits eine Vorglättung.*

*Analog kann gezeigt werden:*

$$\rho(C \cdot T_{SMAMLI}) \leq \rho(T_{SMAMLI}).$$

## 7 Spezielle Approximationen

In den letzten Kapiteln wurde gezeigt, dass gewisse Verfahren, u.a. *MAMLI*, *RMAMLI*, *SMAMLI*, konvergieren, falls  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  gewisse Splittingeigenschaften haben.

Es stellt sich die Frage, ob dieses Setting auch für das *Verfahren von Ruge und Stüben* anwendbar ist.

In Kapitel 4 haben wir bereits gesehen, wie die Approximation  $\tilde{A}_{FF}$  an  $A_{FF}$  aussehen.

Es stellt sich nun die Frage, ob  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ ist?

Dies muss leider mit Nein beantwortet werden, denn es gilt für  $A_{FF} = [a_{ij}]$  und  $\tilde{A}_{FF} = [\tilde{a}_{ij}]$ :

$$\tilde{a}_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq j \\ \leq a_{ij} & \text{für } i = j \end{cases} .$$

Somit folgt:

$$\left( I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF} \right)_{ii} = 1 - \frac{a_{ii}}{\tilde{a}_{ii}} \leq 0.$$

Also ist  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  im Allgemeinen kein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ. Analog kann gezeigt werden, dass  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  im Allgemeinen auch kein schwach reguläres Splitting vom zweiten Typ ist.

Somit läßt sich die Konvergenztheorie mit Hilfe von Splittings nicht auf das *Verfahren von Ruge und Stüben* anwenden.

Im Folgenden werden Methoden vorgestellt, die uns später eine Möglichkeit liefern, einen Konvergenzbeweis des *Verfahrens von Ruge und Stüben* zu zeigen.

Doch zuerst entfernen wir uns von den Splittingeigenschaften und untersuchen, wie die Approximationen  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{S}$  aussehen können, damit die Konvergenz der Verfahren gezeigt werden kann.

### 7.1 Einführung

Es stellt sich zunächst die Frage, welche Eigenschaften die Approximationen haben müssen, damit wir ein nichtnegatives Splitting erzeugen.

Es gilt:

Falls  $\tilde{A}_{FF}, \tilde{S}$  monoton sind, und außerdem  $\tilde{A}_{FF} \geq A_{FF}$  und  $\tilde{S} \geq S$  erfüllt ist, dann sind  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - A_{FF})$  und  $(\tilde{S}, \tilde{S} - S)$  nichtnegative Splittings von  $A_{FF}$  bzw.  $S$ .

Dieses zeigen wir mit folgendem Lemma:

**Lemma 7.1.1**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  monoton, d.h.  $M^{-1} \geq 0$ . Außerdem sei

$$M \geq A.$$

Dann gilt:

$(M, M - A)$  ist ein nichtnegatives Splitting von  $A$ .

*Beweis:*

Da  $M \geq A$  ist, gilt:

$$M - A \geq 0.$$

Somit ist  $(M, M - A)$  ein reguläres Splitting. Da jedes reguläre Splitting auch ein nichtnegatives Splitting ist, ist  $(M, M - A)$  auch ein nichtnegatives Splitting.  $\square$

Damit haben wir eine große Klasse von Matrizen, die als Approximationen zugelassen werden können, u.a. kann man die Approximationen, die durch das Jacobi-Verfahren oder auch durch das Gauß-Seidel-Verfahren erzeugt werden, wählen.

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist jedoch, was geschieht, wenn die Approximation  $M$  nicht die Eigenschaft

$$M \geq A$$

erfüllt.

Wir untersuchen, ob man mit zusätzlichen Bedingungen die Konvergenz der Iterationsverfahren trotzdem noch zeigen kann.

Im Folgenden beschränken wir uns zunächst auf das *MAMLI-Verfahren*.

## 7.2 MAMLI-Verfahren

### 7.2.1 Der grundlegende Konvergenzsatz

In diesem Abschnitt werden wir den Konvergenzsatz 5.2.1 für das *MAMLI-Verfahren* verallgemeinern.

#### Satz 7.2.1

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Nun sei Folgendes erfüllt:

Es gibt eine Matrix  $B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix}$  mit

1.  $B_{CF} \leq A_{CF}$ ,  $B_{FC} \leq A_{FC}$ ,
2.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix,
3.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
4.  $\tilde{S}$  ist monoton,
5.  $|I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF}| \leq I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}$ ,
6.  $|I_C - \tilde{S}^{-1} S_\alpha| \leq I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta$   
wobei  $S_\alpha = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC}$  und  $S_\beta = B_{CC} - B_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}$ .

Dann gilt:

$$\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

*Beweis:*

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile.

Zunächst wird gezeigt:

$$0 \leq T_{MAMLI}^B w < w,$$

wobei

$$T_{MAMLI}^B = \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right) \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right)$$

und  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  ein positiver Vektor ist.

Anschließend bleibt noch zu zeigen:

$$|T_{MAMLI}| \leq T_{MAMLI}^B.$$

Dann würde

$$|T_{MAMLI}| w < w$$

folgen, also auch mit Satz 2.2.8

$$\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1.$$

Um den ersten Teil zu zeigen, verwenden wir den Satz 2.5.4.

Es gilt:

$$I - M_{MAMLI,B}^{-1}B = T_{MAMLI}^B \geq 0.$$

Denn betrachte dazu:

$$\begin{aligned} & T_{MAMLI}^B \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right) \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right) \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \\ &\quad \cdot \left( \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF} & -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} + B_{CC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \right) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1} - B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}) & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & S_\beta - A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}(-A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})) & 0 \\ \tilde{S}^{-1}(-A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})) & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}(S_\beta - A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}) \\ 0 & \tilde{S}^{-1}(S_\beta - A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung 1 erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
& T_{MAMLI}^B \\
& \geq \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} & -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \tilde{S}^{-1} (A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} - A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})) & 0 \\ \tilde{S}^{-1} (A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} - A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})) & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \tilde{S}^{-1} (S_\beta - A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}) \\ 0 & \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} & -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} (I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta) \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \end{bmatrix} \\
& \geq 0.
\end{aligned}$$

Die Nichtnegativität folgt durch die Voraussetzungen 2 - 6 des Satzes und der Vorzeichenstruktur der M-Matrix  $B$ .

Nun müssen noch zwei Eigenschaften gezeigt werden:

1.  $M_{MAMLI,B}^{-1} \geq 0$ ,
2.  $M_{MAMLI,B}^{-1}$  besitzt keine Nullzeilen.

Dies zeigen wir analog zu dem Beweis des Theorems 4.7 in [10].

Man sieht:

$$M_{MAMLI,B}^{-1} =: C_{MAMLI,B} = M_{CG} + M_S - M_{CG} B M_S \geq 0, \quad (7.1)$$

mit

$$\begin{aligned}
M_S &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \\
M_{CG} &= \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \geq 0.
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir

$$-M_{CG} B M_S \geq 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& -M_{CG}BM_S \\
= & - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}(\underbrace{-B_{CF} + A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}}_{\geq -A_{CF}}) & 0 \\ \tilde{S}^{-1}(\underbrace{-B_{CF} + A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}}_{\geq -A_{CF}}) & 0 \end{bmatrix} \\
\geq & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}) & 0 \\ -\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}) & 0 \end{bmatrix} \\
\geq & 0.
\end{aligned}$$

Zum Abschluss zeigen wir, dass  $C_{MAMLI,B}$  keine Nullzeilen besitzt. Da alle drei Terme in (7.1) nichtnegativ sind, reicht es zu zeigen, dass  $M_{CG} + M_S$  keine Nullzeilen besitzt. Da  $\tilde{A}$  und  $\tilde{S}$  invertierbare Matrizen sind, haben  $\tilde{A}^{-1}$  und  $\tilde{S}^{-1}$  keine Nullzeilen. Somit sind die ersten  $n_F$ -Zeilen in  $M_S$  und die letzten  $n_C$ -Zeilen in  $M_{CG}$  keine Nullzeilen. Also besitzt die Summe dieser beiden keine Nullzeilen. Da  $n = n_F + n_C$  ist, hat  $C_{MAMLI,B}$  keine Nullzeilen.

Weil nach Voraussetzung 2  $B$  eine M-Matrix ist, folgt mit Satz 2.5.4 die Aussage

$$0 \leq T_{MAMLI}^B w < w.$$

Somit bleibt zu zeigen:

$$|T_{MAMLI}| \leq T_{MAMLI}^B.$$

Es gilt analog zu obiger Rechnung:

$$\begin{aligned} & |T_{MAMLI}| \\ & \leq \begin{bmatrix} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})^2| & 0 \\ |-\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})^2| & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & |-\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} + \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}S_\alpha| \\ 0 & |I_C - \tilde{S}^{-1}S_\alpha| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & |-\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}| \\ 0 & |\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}| \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}|I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}|^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1}A_{CF}|I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}|^2 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}|I_C - \tilde{S}^{-1}S_\alpha| \\ 0 & |I_C - \tilde{S}^{-1}S_\alpha| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}|I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}|\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1}A_{CF}|I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}|\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit den Voraussetzungen (1), (5) und (6) folgt nun:

$$\begin{aligned} & |T_{MAMLI}| \\ & \leq \begin{bmatrix} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}(I_C - \tilde{S}^{-1}S_\beta) \\ 0 & |I_C - \tilde{S}^{-1}S_\beta| \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \end{bmatrix} \\ & \leq T_{MAMLI}^B. \end{aligned}$$

Also gilt, wie oben ausgeführt:

$$\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1.$$

□

Dieser Satz liefert allgemeine Kriterien für die Konvergenz des *MAMLI-Verfahrens*. Der Schwerpunkt in diesem Beweis lag auf der Verwendung einer Matrix  $B$ , die nach Voraussetzung eine M-Matrix sein muss.

In den nächsten Abschnitten untersuchen wir, welche Approximationen  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{S}$  an  $A_{FF}$  und  $S$  zugelassen werden können, und welche Gestalt die Matrix  $B$  haben kann, damit die Voraussetzungen an den Satz 7.2.1 erfüllt sind.



### 7.2.2 Wahl der Matrix $B$

Im vorigen Abschnitt haben wir ein Konvergenzresultat hergeleitet, das stark von einer Matrix  $B$  abhängt. In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie die Matrix  $B$  gewählt werden kann, damit die Voraussetzungen des Satzes 7.2.1 erfüllt sind.

Außerdem stellt sich die Frage, wie wir  $\tilde{S}$  wählen. Zunächst sei

$$\tilde{S} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$$

die Approximation an

$$S = A_{CC} - A_{CF}A_{FF}^{-1}A_{FC}.$$

Später werden wir diesen Ansatz mit Hilfe einer veränderten Approximation, der sogenannten *Galerkin-Approximation* erweitern.

Betrachte zunächst folgendes Lemma:

#### Lemma 7.2.2

Sei

$$B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ 2 \min(\tilde{A}_{CF}, A_{CF}) - A_{CF} & 2 \min(\tilde{A}_{CC}, A_{CC}) - A_{CC} \end{bmatrix}$$

eine  $M$ -Matrix.

Außerdem seien  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{S} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$  monoton.

Dann sind die Voraussetzungen des Satzes 7.2.1 erfüllt, d.h. es gilt:

1.  $B_{CF} \leq A_{CF}$ ,  $B_{FC} \leq A_{FC}$ ,
2.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix,
3.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
4.  $\tilde{S}$  ist monoton,
5.  $\left| I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF} \right| \leq I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}$ ,
6.  $\left| I_C - \tilde{S}^{-1}S_\alpha \right| \leq I_C - \tilde{S}^{-1}S_\beta$   
wobei  $S_\alpha = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}$  und  $S_\beta = B_{CC} - B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}$ .

*Beweis:*

Die Eigenschaften 1-4 sind nach Voraussetzung erfüllt. Zu zeigen bleibt 5 und 6.

Zu 5:

Es gilt komponentenweise:

$$\begin{aligned} \left( \left| I - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF} \right| \right)_{ij} &\leq \left( \tilde{A}_{FF}^{-1} \left| \tilde{A}_{FF} - A_{FF} \right| \right)_{ij} \\ &= \begin{cases} \left( \tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FF} - A_{FF}) \right)_{ij} & \text{für } (\tilde{A}_{FF})_{ij} \geq (A_{FF})_{ij} \\ \left( \tilde{A}_{FF}^{-1}(A_{FF} - \tilde{A}_{FF}) \right)_{ij} & \text{für } (\tilde{A}_{FF})_{ij} \leq (A_{FF})_{ij} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left( \tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FF} - A_{FF}) \right)_{ij} & \text{für } (\tilde{A}_{FF})_{ij} \geq (A_{FF})_{ij} \\ \left( \tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FF} - (2\tilde{A}_{FF} - A_{FF})) \right)_{ij} & \text{für } (\tilde{A}_{FF})_{ij} \leq (A_{FF})_{ij} \end{cases} \\ &= \left( \tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FF} - B_{FF}) \right)_{ij} \\ &= \left( I - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} \right)_{ij}. \end{aligned}$$

Nebenbei wurde gezeigt:

$$\left| \tilde{A}_{FF} - A_{FF} \right| = (\tilde{A}_{FF} - B_{FF}). \quad (7.2)$$

Dies wird später gebraucht.

Zu 6:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left( - \left| A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \right| \right)_{ij} &= \begin{cases} -(A_{FC} - \tilde{A}_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ -(\tilde{A}_{FC} - A_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(A_{FC} - 2\tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ -(\tilde{A}_{FC} - B_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{cases} \\ &= \begin{cases} ((2\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) - \tilde{A}_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (B_{FC} - \tilde{A}_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{cases} \\ &= (B_{FC} - \tilde{A}_{FC})_{ij}. \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$\left| \tilde{A}_{FC} - A_{FC} \right| = \tilde{A}_{FC} - B_{FC}.$$

Analogt zeigt man:

1.  $\left| \tilde{A}_{CF} - A_{CF} \right| = \tilde{A}_{CF} - B_{CF},$
2.  $\left| \tilde{A}_{CC} - A_{CC} \right| = \tilde{A}_{CC} - B_{CC}.$

Damit erhalten wir die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} &\left| I_C - \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right| \\ &= \tilde{S}^{-1} \left| \tilde{S} - S_\alpha \right| \\ &= \tilde{S}^{-1} \left| (\tilde{A}_{CC} - A_{CC}) - (\tilde{A}_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC}) \right| \\ &= \tilde{S}^{-1} \left| (\tilde{A}_{CC} - A_{CC}) - (\tilde{A}_{CF} - A_{CF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} (\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) \right| \\ &\leq \tilde{S}^{-1} \left( \left| \tilde{A}_{CC} - A_{CC} \right| + \left| \tilde{A}_{CF} - A_{CF} \right| \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} + A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \left| \tilde{A}_{FC} - A_{FC} \right| \right) \\ &= \tilde{S}^{-1} \left( (\tilde{A}_{CC} - B_{CC}) - (\tilde{A}_{CF} - B_{CF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \underbrace{- A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}}_{\leq -B_{CF}} - B_{FC} \right) \\ &\leq \tilde{S}^{-1} \left( (\tilde{A}_{CC} - B_{CC}) - (\tilde{A}_{CF} - B_{CF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} - B_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} (\tilde{A}_{FC} - B_{FC}) \right) \\ &= \tilde{S}^{-1} \left( (\tilde{A}_{CC} - B_{CC}) - (\tilde{A}_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} - B_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}) \right) \\ &= \tilde{S}^{-1} (\tilde{S} - S_\beta) \\ &= I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta. \end{aligned}$$

Hier wurde auch gezeigt:

$$\left| \tilde{S} - S_\alpha \right| \leq (\tilde{S} - S_\beta). \quad (7.3)$$

Dies wird ebenfalls später benötigt.  $\square$

Es bleibt zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Matrix  $B$  eine M-Matrix ist.

### Die M-Matrix-Eigenschaft der Matrix $B$

Da die Matrix  $B$  sowohl von  $A$  als auch von  $\tilde{A}$  abhängt, gibt es zwei Möglichkeiten der Interpretation:

1. Sei  $A$  gegeben. Welche Approximationen  $\tilde{A}$  können zugelassen werden, damit  $B$  eine M-Matrix ist?
2. Sei ein bestimmtes Verfahren vorgegeben und somit die Approximation  $\tilde{A}$ . Für welche Matrizen  $A$  ist die Konvergenz sichergestellt?

Ein einfaches Kriterium, um zu zeigen, dass  $B$  eine M-Matrix ist, ist

$$(Be)_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Wir untersuchen nun beide Möglichkeiten der Interpretation auf diese Eigenschaft.

1. Sei die Matrix  $A$  gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (Be)_i &= 2 \sum_{j \in \mathcal{F}} \min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}) - \sum_{j \in \mathcal{F}} a_{ij} + 2 \sum_{j \in \mathcal{C}} \min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}) - \sum_{j \in \mathcal{C}} a_{ij} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}) - \sum_{j=1}^n a_{ij}. \end{aligned}$$

Definiere Indexmenge  $MIN_i$  und  $MAX_i$  folgendermaßen:

Für  $i = 1, \dots, n$ :

$$MIN_i := \{j : \tilde{a}_{ij} < a_{ij}\}$$

und

$$MAX_i := \{j : \tilde{a}_{ij} \geq a_{ij}\}.$$

Dann gilt weiter:

$$\begin{aligned} (Be)_i > 0 &\Leftrightarrow 2 \sum_{j=1}^n \min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}) - \sum_{j=1}^n a_{ij} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in MIN_i} \tilde{a}_{ij} + \sum_{j \in MAX_i} a_{ij} > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in MIN_i} \tilde{a}_{ij} > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{j \in MAX_i} a_{ij} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in MIN_i} \tilde{a}_{ij} > \frac{1}{2} \sum_{j \in MIN_i} a_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{j \in MAX_i} a_{ij}. \end{aligned}$$

Man sieht also folgenden Zusammenhang:

Um so kleiner die Approximation  $\tilde{A}$  ist, desto unwahrscheinlicher ist die Matrix  $B$  eine M-Matrix.

2. Oft soll ein bestimmtes Verfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems benutzt werden.

Sei nun also die Approximation  $\tilde{A}$  vorgegeben. Es ist erneut für  $e = [1, \dots, 1]^T$ :

$$(Be)_i = 2 \sum_{j=1}^n \min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}) - \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Damit also  $(Be)_i > 0$  ist, muss für  $A$  gelten:

$$(Ae)_i < 2 \sum_{j=1}^n \min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}).$$

Dies schreiben wir um zu:

$$\begin{aligned} (Ae)_i &< 2 \sum_{j=1}^n \min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}) = 2 \sum_{j \in MIN} \tilde{a}_{ij} + 2 \sum_{j \in MAX} a_{ij} \\ &= 2 \sum_{j \in MIN} \tilde{a}_{ij} + 2(Ae)_i - 2 \sum_{j \in MIN} a_{ij}. \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$(Ae)_i > 2 \sum_{j \in MIN} (a_{ij} - \tilde{a}_{ij}) \quad \forall i.$$

Somit kann die Konvergenz für Matrizen  $A$  mit der Eigenschaft

$$(Ae)_i > 2 \sum_{j \in MIN} (a_{ij} - \tilde{a}_{ij}) \quad \forall i$$

garantiert werden.

Auch hier kann ein Zusammenhang zwischen der Zeilensumme von  $A$  und der Eigenschaft, dass  $B$  eine M-Matrix ist, abgelesen werden. Es gilt:

Umso größer die Zeilensumme von  $A$  ist, desto wahrscheinlicher ist  $B$  eine M-Matrix.

### 7.2.3 Approximation in der Prolongation und in der Restriktion

Bisher haben wir untersucht, welche Approximationen an  $A_{FF}$  und  $S$  zugelassen werden können. Im Verlauf dieser Untersuchungen wurden u.a. auch  $A_{FC}$  und  $A_{CF}$  approximiert. Bei dem *MAMLI-Verfahren* sehen die Prolongationen und Restriktionen wie folgt aus:

$$P = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}.$$

In diesem Abschnitt untersuchen wir, ob die Approximationen an  $A_{FC}$  und  $A_{CF}$  auch in die Prolongation bzw. Restriktion eingebaut werden können. Somit sind die neuen Prolongations- und Restriktionsmatrizen:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix},$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}.$$

Wir betrachten die Iterationsmatrizen

$$T_{MAMLI}^P = \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right),$$

$$T_{MAMLI}^R = \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right),$$

$$T_{MAMLI}^{PR} = \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} A \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right).$$

Auch hier können wir die Konvergenz der zugehörigen Iterationsverfahren zeigen.

**Satz 7.2.3**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Wir betrachten folgende Voraussetzungen:

Es gibt eine Matrix  $B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix}$  mit

1.  $B_{CF} \leq A_{CF} \quad B_{FC} \leq A_{FC}$ ,
2.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix,
3.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
4.  $\tilde{S}$  ist monoton,
5.  $\left| I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF} \right| \leq I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}$ ,
6.  $\left| I_C - \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right| \leq I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta$   
wobei  $S_\alpha = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC}$  und  $S_\beta = B_{CC} - B_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}$ ,
7.  $\tilde{A}_{CF} \leq 0$ ,
8.  $\tilde{A}_{FC} \leq 0$ ,
9.  $B_{FC} \leq \tilde{A}_{FC}$ ,
10.  $\left| -A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right| \leq -B_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\beta$ .

- Falls die Voraussetzungen 1-7 erfüllt sind, dann gilt:

$$\rho(T_{MAMLI}^R) \leq \|T_{MAMLI}^R\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

- Falls die Voraussetzungen 1-6 und 8-10 erfüllt sind, dann gilt:

$$\rho(T_{MAMLI}^P) \leq \|T_{MAMLI}^P\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

- Falls die Voraussetzungen 1-10 erfüllt sind, dann gilt:

$$\rho(T_{MAMLI}^{PR}) \leq \|T_{MAMLI}^{PR}\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

*Beweis:*

1.  $T_{MAMLI}^R$ :

Die Aussage für  $T_{MAMLI}^R$  folgt analog zum Satz 7.2.1.

Es wird lediglich  $A_{CF}$  durch  $\tilde{A}_{CF}$  ersetzt wird. Für den Beweis vom Satz 7.2.1 wurde benötigt, dass  $A_{CF} \leq 0$  ist. Da in der Voraussetzungen  $\tilde{A}_{CF} \leq 0$  gefordert wird, ist dies erfüllt.

2.  $T_{MAMLI}^P$ :

Wir gehen analog zum Beweis von Satz 7.2.1 vor.

Wir zeigen zuerst

$$T_{MAMLI}^{P,B} \geq 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & T_{MAMLI}^{P,B} \\ &= \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right) \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right) \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \\ &\quad \cdot \left( \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF} & -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} + B_{CC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \right) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1} - B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}) & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & S_\beta - A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}(-A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})) & 0 \\ \tilde{S}^{-1}(-A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})) & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}(S_\beta - A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}) \\ 0 & \tilde{S}^{-1}(S_\beta - A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung 1 folgt:

$$\begin{aligned}
& T_{MAMLI}^{P,B} \\
& \geq \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} & -\tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} (A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} - A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})) & 0 \\ \tilde{S}^{-1} (A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} - A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})) & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} (S_\beta - A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}) \\ 0 & \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{FF}^{-1} (-B_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\beta) \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit Voraussetzung 9 erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
& T_{MAMLI}^{P,B} \\
& \geq \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{FF}^{-1} (-\tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\beta) \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} (I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta) \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}) \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \end{bmatrix} \\
& \geq 0.
\end{aligned}$$

Die Nichtnegativität folgt durch die Voraussetzungen 2 - 6, 8 und die Vorzeichenstruktur der M-Matrix  $B$ .

Nun wäre erneut zu zeigen, dass

$$\tilde{M}_{MAMLI,B}^{-1} \geq 0$$

ist und keine Nullzeile besitzt, wobei

$$\tilde{M}_{MAMLI,B}^{-1} = \tilde{M}_{CG} + M_S - \tilde{M}_{CG} B M_S,$$



mit

$$M_S = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_{CG} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}$$

ist. Dies entspricht im Wesentlichen der Matrix  $M_{MAMLI}^{-1}$  aus (7.1). Einzig die Matrix  $A_{FC}$  wird durch  $\tilde{A}_{FC}$  ersetzt. Da jedoch  $\tilde{A}_{FC}$  die gleiche Vorzeichenstruktur wie  $A_{FC}$  hat, folgt analog zum Beweis von Satz 7.2.1, dass

$$\tilde{M}_{MAMLI,B}^{-1} \geq 0$$

ist und keine Nullzeile besitzt.

Also gilt:

$$T_{MAMLI}^{P,B} w < w$$

mit  $w = B^{-1}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

Somit bleibt zu zeigen:

$$|T_{MAMLI}^P| \leq T_{MAMLI}^{P,B} :$$

Analog zur obigen Rechnung erhält man für  $T_{MAMLI}^P$ :

$$\begin{aligned} & |T_{MAMLI}^P| \\ & \leq \begin{bmatrix} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} |\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})^2| & 0 \\ | -S^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})^2 | & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} 0 & | -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} + \tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}S_\alpha | \\ 0 & | I_C - \tilde{S}^{-1}S_\alpha | \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} 0 & | -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} | \\ 0 & | \tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} | \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF} | I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF} |^2 & 0 \\ -S^{-1}A_{CF} | I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF} |^2 & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{FF}^{-1} | -A_{FC} + \tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}S_\alpha | \\ 0 & | I_C - \tilde{S}^{-1}S_\alpha | \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF} | I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF} | \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1}A_{CF} | I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF} | \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit den Voraussetzungen 1, 5, 6, 9 und 10 gilt:

$$\begin{aligned}
& |T_{MAMLI}^P| \\
& \leq \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & 0 \\ -S^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & 0 \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{FF}^{-1}(-B_{FC} + \tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}S_\beta) \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1}S_\beta \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & \tilde{S}^{-1}A_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \end{bmatrix} \\
& \leq T_{MAMLI}^{P,B}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$|T_{MAMLI}^P| w \leq T_{MAMLI}^{P,B} w < w.$$

Es folgt die Behauptung:

$$\rho(T_{MAMLI}^P) \leq \|T_{MAMLI}^P\|_w < 1$$

für  $w = B^{-1}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

3.  $T_{MAMLI}^{PR}$ :

Die Behauptung für  $T_{MAMLI}^{PR}$  folgt analog zum Beweis der Konvergenz von  $T_{MAMLI}^P$ .  
Es wird erneut  $A_{CF}$  durch  $\tilde{A}_{CF}$  ersetzt.

□

#### Bemerkung 7.2.4

Die Voraussetzungen 1 - 6 des Satzes 7.2.3 sind dieselben wie aus dem Satz 7.2.1.

Wir haben im Lemma 7.2.2 bereits untersucht, wann diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Voraussetzungen 7 und 8 sind neue Bedingungen an  $\tilde{A}_{CF}$  bzw.  $\tilde{A}_{FC}$ .

Es bleibt zu prüfen, wie die Matrix  $B$  aussehen kann, damit auch die Voraussetzungen 9 und 10 erfüllt sind.

Im Folgenden zeigen wir, dass

$$B = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$$

9 und 10 erfüllt.

Es werden also nur  $A_{FF}$  und  $A_{FC}$  approximiert und es gilt:

$$\tilde{A}_{CF} = A_{CF} \text{ und } \tilde{A}_{CC} = A_{CC}.$$

**Lemma 7.2.5**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$  und

$$B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ & A_{CC} \end{bmatrix}.$$

Sei  $\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}$  das approximierte Schurkomplement. Dann gilt die Ungleichungen

$$B_{FC} \leq \tilde{A}_{FC}$$

und

$$\left| -A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right| \leq -B_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\beta \quad (7.4)$$

*Beweis:*

Die erste Ungleichung folgt mit

$$\begin{aligned} (B_{FC})_{ij} &= \begin{cases} (2\tilde{A}_{FC} - A_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (A_{FC})_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{cases} \\ &\leq (\tilde{A}_{FC})_{ij}. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung zeigen wir mithilfe von (7.3):

$$\begin{aligned} -B_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\beta &= -B_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} (\tilde{S} - S_\beta) + \tilde{A}_{FC} \\ &\geq \underbrace{-2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} \left| \tilde{S} - S_\alpha \right|}_{-B_{FC}} \\ &\geq -2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} \left| I_C - \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right| \\ &\geq -2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} + \left| -\tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right|. \end{aligned}$$

Nun betrachte:

$$\begin{aligned} \left( -\tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right)_{ij} &= \left( -\tilde{A}_{FC} (I_C - \tilde{S}^{-1} S_\alpha) \right)_{ij} \\ &= \left( -\tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} (\tilde{S} - S_\alpha) \right)_{ij} \\ &= \left( -\tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} (A_{FC} - \tilde{A}_{FC}) \right)_{ij} \\ &\begin{cases} \geq 0 & \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ \leq 0 & \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{cases}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\left( \left| -\tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right| \right)_{ij} = \begin{cases} \left( -\tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right)_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ \left( \tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right)_{ij} & \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{cases}. \quad (7.5)$$

Da

$$-2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} \geq 0$$

ist, erhält man mit (7.5) weiter:

$$\left. \begin{array}{l} (-2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (-2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{array} \right\} \geq 0. \quad (7.6)$$

Es gilt auch:

$$\begin{aligned} & (-B_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\beta})_{ij} \\ & \geq \left\{ \begin{array}{l} (-2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (-2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{array} \right. \\ & = \left\{ \begin{array}{l} (-2A_{FC} + A_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (-2\tilde{A}_{FC} + A_{FC} + 2\tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{array} \right. \\ & = \left\{ \begin{array}{l} (-A_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Mit (7.6) gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (-A_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{array} \right\} \geq 0. \quad (7.7)$$

Durch die Positivität in (7.7) erhält man insgesamt:

$$\begin{aligned} & (-B_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\beta})_{ij} \\ & \geq \left\{ \begin{array}{l} (-A_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ (A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha})_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{array} \right. \\ & = \left\{ \begin{array}{l} \left| -A_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha} \right|_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \leq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \\ \left| A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha} \right|_{ij} \quad \text{für } (A_{FC})_{ij} \geq (\tilde{A}_{FC})_{ij} \end{array} \right. \\ & = \left( \left| -A_{FC} + \tilde{A}_{FC} \tilde{S}^{-1} S_{\alpha} \right| \right)_{ij} . \end{aligned}$$

Somit ist (7.4) gezeigt.

□

### Bemerkung 7.2.6

Im Beweis des Lemmas 7.2.5 wurde verwendet, dass  $\tilde{S}$  die Form

$$\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}$$

hat.

## 7.3 RMAMLI-Verfahren

In den letzten Abschnitten haben wir das *MAMLI-Verfahren* untersucht. In diesem Abschnitt wollen wir das *RMAMLI-Verfahren* betrachten. Der Unterschied zum *MAMLI-Verfahren* liegt unter anderem darin, dass wir für die Konvergenz und Vererbung von Splittingeigenschaften schwachreguläre Splittings vom zweiten Typ voraussetzen müssen, wie wir es im Satz 5.3.1 gesehen haben. Der allgemeine Konvergenzsatz für das *RMAMLI-Verfahren* sieht wie folgt aus:

### Satz 7.3.1

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Nun sei Folgendes erfüllt:

Es gibt eine Matrix  $B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix}$  mit

1.  $B_{CF} \leq A_{CF}$ ,  $B_{FC} \leq A_{FC}$ ,
2.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix,
3.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
4.  $\tilde{S}$  ist monoton,
5.  $\left| I_F - A_{FF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \right| \leq I_F - B_{FF} \tilde{A}_{FF}^{-1}$ ,
6.  $\left| I_C - S_\alpha \tilde{S}^{-1} \right| \leq I_C - S_\beta \tilde{S}^{-1}$

wobei  $S_\alpha = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC}$  und  $S_\beta = B_{CC} - B_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}$ .

Dann gilt:

$$\rho(T_{RMAMLI}) \leq \left\| \left( I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T A^T \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T \right) \right\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-T}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

*Beweis:*

Es gilt:

$$\begin{aligned} \rho(T_{RMAMLI}) &= \rho(T_{RMAMLI}^T) \\ &= \rho \left( \left( I - A^T (P\tilde{S}^{-1}R)^T \right) \left( I - A^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \rho \left( A^{-T} \left( I - A^T (P\tilde{S}^{-1}R)^T \right) A^T A^{-T} \left( I - A^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) A^T \right) \\ &= \rho \left( \left( I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T A^T \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T \right) \right). \end{aligned}$$

Somit untersuchen wir

$$T_{MAMLI,T} := \left( I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T A^T \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T \right).$$

Die Voraussetzungen 1-6 lassen sich wie folgt umschreiben:

1.  $B_{CF}^T \leq A_{CF}^T$ ,  $B_{FC}^T \leq A_{FC}^T$ ,
2.  $B^T$  ist eine M-Matrix,
3.  $\tilde{A}_{FF}^T$  ist monoton,
4.  $\tilde{S}^T$  ist monoton,
5.  $\left| I_F - \tilde{A}_{FF}^{-T} A_{FF}^T \right| \leq I_F - \tilde{A}_{FF}^{-T} B_{FF}^T$ ,
6.  $\left| I_C - \tilde{S}^{-T} S_\alpha^T \right| \leq I_C - \tilde{S}^{-T} S_\beta$   
wobei  $S_\alpha = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC}$  und  $S_\beta = B_{CC} - B_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}$ .

Analog zum Beweis des Satzes 7.2.1 kann nun gezeigt werden:

1.  $T_{MAMLI,T}^B := \left( I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T B^T \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^T \right) \geq 0$ ,
2.  $T_{MAMLI,T}^B w < w$  mit  $w = B^{-T}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv,
3.  $|T_{MAMLI,T}| \leq T_{MAMLI,T}^B$ .

Damit folgt:

$$|T_{MAMLI,T}| w < w.$$

Somit erhält man mit Satz 2.2.8:

$$\|T_{MAMLI,T}\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-T}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv. Also haben wir gezeigt:

$$\rho(T_{RMAMLI}) \leq \left\| \left( I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T A^T \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T \right) \right\|_w < 1.$$

□

Nun bleibt zu untersuchen, ob

$$B = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ 2 \min(\tilde{A}_{CF}, A_{CF}) - A_{CF} & 2 \min(\tilde{A}_{CC}, A_{CC}) - A_{CC} \end{bmatrix}$$

auch die Voraussetzungen des Satzes 7.3.1 erfüllt.

**Lemma 7.3.2**

Sei

$$B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ 2 \min(\tilde{A}_{CF}, A_{CF}) - A_{CF} & 2 \min(\tilde{A}_{CC}, A_{CC}) - A_{CC} \end{bmatrix}$$

eine  $M$ -Matrix.

Außerdem seien  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{S} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$  monoton.

Dann sind die Voraussetzungen von dem Satz 7.3.1 erfüllt, d.h. es gilt:

1.  $B_{CF} \leq A_{CF}$ ,  $B_{FC} \leq A_{FC}$ ,
2.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix,
3.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
4.  $\tilde{S}$  ist monoton,
5.  $\left| I_F - A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1} \right| \leq I_F - B_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}$ ,
6.  $\left| I_C - S_\alpha\tilde{S}^{-1} \right| \leq I_C - S_\beta\tilde{S}^{-1}$   
wobei  $S_\alpha = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}$  und  $S_\beta = B_{CC} - B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}$ .

*Beweis:*

Auch hier sind die ersten vier Bedingungen durch die Voraussetzungen gegeben.

$$\text{Zu } \left| I_F - A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1} \right| \leq I_F - B_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}:$$

Aus (7.2) folgt:

$$\left| \tilde{A}_{FF} - A_{FF} \right| = (\tilde{A}_{FF} - B_{FF}).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \left| I_F - A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1} \right| &\leq \left| \tilde{A}_{FF} - A_{FF} \right| \tilde{A}_{FF}^{-1} \\ &= (\tilde{A}_{FF} - B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1} \\ &= I_F - B_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Zu } \left| I_C - S_\alpha\tilde{S}^{-1} \right| \leq I_C - S_\beta\tilde{S}^{-1}:$$

Es wurde bereits in (7.3) gezeigt:

$$\left| \tilde{S} - S_\alpha \right| \leq (\tilde{S} - S_\beta).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \left| I_C - S_\alpha\tilde{S}^{-1} \right| &\leq \left| \tilde{S} - S_\alpha \right| \tilde{S}^{-1} \\ &\leq (\tilde{S} - S_\beta)\tilde{S}^{-1} \\ &= I_C - S_\beta\tilde{S}^{-1}. \end{aligned}$$

□

## 7.4 Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

In diesem Abschnitt fassen wir die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels mittels zweier Sätze zusammen.

### Satz 7.4.1

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Sei die Matrix  $B$  definiert durch

$$B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ 2 \min(\tilde{A}_{CF}, A_{CF}) - A_{CF} & 2 \min(\tilde{A}_{CC}, A_{CC}) - A_{CC} \end{bmatrix}.$$

Hierbei sind  $\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FC}, \tilde{A}_{CF}$  und  $\tilde{A}_{CC}$  Approximationen an  $A_{FF}, A_{FC}, A_{CF}$  und  $A_{CC}$ , für die gelten soll:

1.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix ist,
2.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
3.  $\tilde{S} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}$  ist monoton.

Dann gilt für  $w = B^{-1}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv:

- $\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1$ ,
- $\rho(T_{RMAMLI}) < 1$ ,
- $\rho(T_{SMAMLI}) \leq \|T_{SMAMLI}\|_w < 1$ ,
- $\rho(T_{MAMLI}^R) \leq \|T_{MAMLI}^R\|_w < 1$ , falls zusätzlich  $\tilde{A}_{CF} \leq 0$ ,

Wenn außerdem  $\tilde{A}_{CC}$  monoton ist, dann gilt:

- $\rho(T_{GFC}) \leq \|T_{GFC}\|_w < 1$ ,
- $\rho(T_{CFG}) < 1$ ,
- $\rho(T_{FCG}) < 1$ ,
- $\rho(T_{FGC}) < 1$ ,
- $\rho(T_{CFGFC}) \leq \|T_{CFGFC}\|_w < 1$ .

*Beweis:*

Für den Beweis des ersten Teils verwenden wir die Sätze 7.2.1, 7.2.3.

Somit ist zu zeigen:

1.  $B_{CF} \leq A_{CF}, \quad B_{FC} \leq A_{FC}$ ,
2.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix,
3.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
4.  $\tilde{S}$  ist monoton,
5.  $\left| I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF} \right| \leq I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}$ ,
6.  $\left| I_C - \tilde{S}^{-1} S_\alpha \right| \leq I_C - \tilde{S}^{-1} S_\beta$   
wobei  $S_\alpha = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC}$  und  $S_\beta = B_{CC} - B_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC}$ ,



Dies wurde bereits in Lemma 7.2.2 bewiesen.

Somit haben wir für  $w = B^{-1}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv, gezeigt:

- $\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1$ ,
- $\rho(T_{MAMLI}^R) \leq \|T_{MAMLI}^R\|_w < 1$ , falls zusätzlich  $\tilde{A}_{CF} \leq 0$ ,

Dass das *RMAMLI-Verfahren* konvergent ist, wurde mithilfe des Satzes 7.3.1 und Lemma 7.3.2 gezeigt. Also gilt:

$$\rho(T_{RMAMLI}) < 1.$$

Um die Konvergenz weiterer Verfahren zu zeigen, benötigen wir die Aussagen

$$\begin{aligned} \|B_F\|_w &= \left\| I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right\|_w \leq 1, \\ \|B_C\|_w &= \left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-1} \end{bmatrix} A \right\|_w \leq 1. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |B_F| &= \begin{bmatrix} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}| & -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ 0 & I_C \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & I_C \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B. \end{aligned}$$

Da  $(\tilde{A}_{FF}, \tilde{A}_{FF} - B_{FF})$  ein schwach reguläres Splitting vom ersten Typ von  $B_{FF}$ , und  $B$  eine M-Matrix ist, folgt nach [10]

$$\left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B \right) w \leq w,$$

wobei  $w = B^{-1}d, d \in \mathbb{R}^n$  ein positiver Vektor ist.

Damit folgt auch

$$|B_F| w \leq \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B \right) w \leq w.$$

Und mit Satz 2.2.8 erhält man:

$$\|B_F\|_w \leq 1.$$

Falls nun zusätzlich gilt, dass  $\tilde{A}_{CC}$  monoton ist, zeigt man analog:

$$\|B_C\|_w \leq 1$$

mit  $w = B^{-1}d, d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

Somit gilt:

- $\rho(T_{SMAMLI}) \leq \|T_{SMAMLI}\|_w < 1$ :  
Es gilt:

$$\rho(T_{SMAMLI}) \leq \|T_{SMAMLI}\|_w = \|B_F \cdot T_{MAMLI}\|_w \leq \|B_F\|_w \|T_{MAMLI}\|_w < 1.$$

- $\rho(T_{GFC}) \leq \|T_{GFC}\|_w < 1$ :  
Es gilt:

$$\rho(T_{GFC}) \leq \|T_{GFC}\|_w = \|T_{MAMLI} \cdot B_C\|_w \leq \|T_{MAMLI}\|_w \|B_C\|_w < 1.$$

- $\rho(T_{FCG}) < 1$ :

Es gilt:

$$\rho(T_{FCG}) = \rho(B_F \cdot B_C \cdot G) = \rho(G \cdot B_F \cdot B_C) = \rho(T_{GFC}) < 1.$$

- $\rho(T_{CFGFC}) \leq \|T_{CFGFC}\|_w < 1$ :

Es gilt:

$$\rho(T_{CFGFC}) \leq \|T_{CFGFC}\|_w = \|B_C \cdot B_F \cdot T_{GFC}\|_w = \|B_C\|_w \|B_F\|_w \|T_{GFC}\|_w < 1.$$

Somit fehlt noch die Konvergenz für  $CFG$  und  $FGC$ .

Für  $CFG$  betrachte analog zum Beweis des Satzes 7.3.1:

$$\begin{aligned} \rho(T_{CFG}) &= \rho\left(\left(I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T A^T\right) \left(I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T\right) \left(I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T\right)\right) \\ &\leq \left\| \left(I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T A^T\right) \left(I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T\right) \right\|_{\tilde{w}} \left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_{\tilde{w}}. \end{aligned}$$

Für  $\tilde{w} = B^{-T}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv gilt nach Satz 7.3.1 und Lemma 7.3.2:

$$\left\| \left(I - (P\tilde{S}^{-1}R)^T A^T\right) \left(I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^T\right) \right\|_{\tilde{w}} < 1.$$

Somit muss noch gezeigt werden:

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_{\tilde{w}} \leq 1.$$

Für die Matrix  $B$  gilt analog zum Beweis von Lemma 7.3.2:

$$\left| I_F - A_{FF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \right| \leq I_F - B_{FF} \tilde{A}_{FF}^{-1}.$$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \left| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right| &= \begin{bmatrix} I_F & 0 \\ -(A_{FC} \tilde{A}_{CC}^{-1})^T & (I_C - A_{CC} \tilde{A}_{CC}^{-1})^T \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} I_F & 0 \\ -(B_{FC} \tilde{A}_{CC}^{-1})^T & (I_C - B_{CC} \tilde{A}_{CC}^{-1})^T \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} B^T \end{aligned}$$

Weiter haben wir gesehen:

$$I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} B^T \geq 0.$$

Da  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix}$  nichtnegativ ist, erhält man für  $\tilde{w} = B^{-T}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv:

$$\left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} B^T \right) \tilde{w} = \tilde{w} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} d \leq \tilde{w}.$$

Also gilt:

$$\left| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right| w \leq \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} B^T \right) w < w$$

für  $\tilde{w} = B^{-T}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

Somit folgt mit Satz 2.2.8:

$$\left\| I - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{CC}^{-T} \end{bmatrix} A^T \right\|_{\tilde{w}} \leq 1.$$

Also haben wir gezeigt:

$$\rho(T_{CFG}) < 1.$$

Für das *FGC-Verfahren* gilt:

$$\rho(T_{FGC}) = \rho(B_F \cdot G \cdot B_C) = \rho(B_C \cdot B_F \cdot G) = \rho(T_{CFG}) < 1.$$

□

Für die Verfahren mit den Iterationsmatrizen  $T_{MAMLI}^P$  und  $T_{MAMLI}^{PR}$  wird die zusätzliche Bedingung (7.4) benötigt. Die konnte bisher nur für das approximierte Schurkomplement der Form

$$\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}$$

gezeigt werden.

Somit gilt folgender Satz:

**Satz 7.4.2**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und

$A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Sei die Matrix  $B$  definiert durch

$$B = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}.$$

Hier bei sind  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{A}_{FC}$  Approximationen an  $A_{FF}$  und  $A_{FC}$ , für die gelten soll:

1. Die Matrix  $B$  sei eine  $M$ -Matrix ist
2.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
3.  $\tilde{A}_{FC} \leq 0$ ,
4.  $\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}$  ist monoton.

Dann gilt:

- $\rho(T_{MAMLI}^P) \leq \|T_{MAMLI}^P\|_w < 1$
- $\rho(T_{MAMLI}^{PR}) \leq \|T_{MAMLI}^{PR}\|_w < 1$ , falls zusätzlich  $\tilde{A}_{CF} \leq 0$ .

*Beweis:*

Alle Bedingungen, die gezeigt werden müssen, folgen aus dem Beweis des Satzes 7.4.1, da das approximierte Schurkomplement

$$\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$$

ein Spezialfall des approximierten Schurkomplements aus dem Satz 7.4.1 ist.

Nur die Bedingungen

$$B_{FC} \leq \tilde{A}_{FC}$$

und

$$\left| -A_{FC} - \tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}S_\alpha \right| \leq -B_{FC} + \tilde{A}_{FC}\tilde{S}^{-1}S_\beta$$

werden in dem Satz 7.4.1 nicht gezeigt. Diese folgen für

$$\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$$

aus dem Lemma 7.2.5. □

## 7.5 Verallgemeinerung mit Hilfe der Galerkin-Approximation

Bisher haben wir nur Approximationen  $\tilde{S}$  der Form  $\tilde{S} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$  an  $S$  untersucht. Im folgenden Abschnitt wollen wir allgemeinere Approximationen an  $S$  zulassen.

Dazu benötigen wir wieder einen grundlegenden Konvergenzsatz. Der Unterschied ist, dass wir nicht mehr mit dem approximierten Schurkomplement  $S = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}$  arbeiten, sondern für  $S$  die Galerkin-Approximation

$$\begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -A_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$$

nutzen.

In der Arbeit [9] ist gezeigt worden, dass unter gewissen Voraussetzungen ein Iterationsverfahren mit der Galerkin-Approximation im Allgemeinen schneller konvergiert, als dasselbe Verfahren, das jedoch das approximierten Schurkomplement nutzt.

### Satz 7.5.1

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Nun sei folgendes erfüllt:

Es gibt eine Matrix  $B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix}$  mit

1.  $B_{FC} \leq A_{FC}$  und  $B_{CF} \leq A_{CF}$ ,
2.  $B$  ist eine  $M$ -Matrix,
3.  $\left| I - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF} \right| \leq I - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}$  und  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
4.  $\left| I - \tilde{S}^{-1}(RAP) \right| \leq I - \tilde{S}_B^{-1}(R_BBP_B)$  und  $\tilde{S}, \tilde{S}_B$  sind monoton,  
wobei  $R = \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}$ ,  $P = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$ ,  
 $R_B = \begin{bmatrix} -B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}$  und  $P_B = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$ ,
5.  $\tilde{S}^{-1} \leq \tilde{S}_B^{-1}$ .

Dann gilt:

$$\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

*Beweis:*

Zuerst zeigen wir, dass  $T_{MAMLI}^B = \left( I - P_B\tilde{S}_B^{-1}R_BB \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B \right) \geq 0$ .

Doch zuerst betrachte folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} R_BBP_B &= \begin{bmatrix} -B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} + B_{CF} \\ -B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} + B_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \\ &= B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} - B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} - B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} + B_{CC} \\ &= B_{CF}(2I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} + B_{CC}. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& T_{MAMLI}^B \\
&= \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}_B^{-1} \begin{bmatrix} -B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right) \\
&\quad \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \right) \\
&= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}_B^{-1} \begin{bmatrix} -B_{CF}(2I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FC} \\ B_{CF} & B_{CC} \end{bmatrix} \\
&= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}_B^{-1} \begin{bmatrix} B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & R_B B P_B \end{bmatrix} \\
&= I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}_B^{-1} \begin{bmatrix} B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & R_B B P_B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}\tilde{S}_B^{-1}B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}_B^{-1}B_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})^2 & \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC}(I_C - \tilde{S}_B^{-1}(R_B B P_B)) \\ 0 & I_C - \tilde{S}_B^{-1}(R_B B P_B) \end{bmatrix} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Als nächstes ist zu zeigen:

$M_{MAMLI,B}^{-1} = C_{MAMLI,B}$  ist nichtnegativ und hat keine Nullzeilen, wobei

$$C_{MAMLI,B}^B = M_{CG,B} + M_S - M_{CG,B} B M_S$$

mit

$$\begin{aligned}
M_S &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
M_{CG,B} &= \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}_B^{-1} \begin{bmatrix} -B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies folgt analog zum Beweis von Satz 7.2.1.

Somit folgt mit Satz 2.5.4:

$$T_{MAMLI}^B w < w.$$

Weiter gilt:

$$|T_{MAMLI}| \leq T_{MAMLI}^B.$$

Denn analog zu oben erhält man für  $T_{MAMLI}$ :

$$\begin{aligned} & T_{MAMLI} \\ = & \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1} A_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF})^2 & \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} (I_C - \tilde{S}^{-1} (RAP)) & \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} (RAP) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt mit den Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} & |T_{MAMLI}| \\ \leq & \begin{bmatrix} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF}| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} \tilde{S}^{-1} A_{CF} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF}|^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1} A_{CF} |I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF}|^2 & \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FC} |I_C - \tilde{S}^{-1} (RAP)| & \\ 0 & |I_C - \tilde{S}^{-1} (RAP)| \end{bmatrix} \\ \leq & \begin{bmatrix} I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} \tilde{S}^{-1} B_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & 0 \\ -\tilde{S}^{-1} B_{CF} (I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF})^2 & \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FC} (I_C - \tilde{S}^{-1} (R_B B P_B)) & \\ 0 & I_C - \tilde{S}^{-1} (R_B B P_B) \end{bmatrix} \\ = & T_{MAMLI}^B. \end{aligned}$$

Somit erhält man weiter:

$$|T_{MAMLI}| w < w$$

und auch:

$$\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1.$$

□

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes 7.2.1.

Weiter werden wir sehen, dass mit Hilfe des Satzes 7.5.1 auch allgemeinere bzw. weitere Approximationen an  $S$  zugelassen werden können.

Als Approximation an  $S$  betrachten wir nun

$$\tilde{S} = \tilde{R}\hat{A}\tilde{P},$$

wobei

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \text{ und } \tilde{P} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$$

und

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{FF} & \hat{A}_{FC} \\ \hat{A}_{CF} & \hat{A}_{CC} \end{bmatrix}$$

eine Approximation an  $A$  ist.

Damit erhalten wir folgenden Satz:

**Satz 7.5.2**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ \tilde{A}_{CF} & \tilde{A}_{CC} \end{bmatrix}$  und  $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{FF} & \hat{A}_{FC} \\ \hat{A}_{CF} & \hat{A}_{CC} \end{bmatrix}$  seien Approximationen an  $A$  für die gilt:

1.  $B = 2 \min(A, \tilde{A}) - A$  ist eine  $M$ -Matrix,
2.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
3.  $\tilde{A}_{FC} \leq 0$  und  $\tilde{A}_{CF} \leq 0$ ,
4.  $\tilde{S} = \tilde{R}\hat{A}\tilde{P}$  und  $\tilde{S}_B = \tilde{R}\hat{B}\tilde{P}$  sind monoton,

wobei  $\hat{B} = B + A + \hat{A} - 2 \min(A, \hat{A})$ ,  $\tilde{R} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}$  und  $\tilde{P} = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$  ist.

5.  $\min(A, \hat{A}) \geq \min(A, \tilde{A})$ .

Dann gilt:

$$\rho(T_{MAMLI}) \leq \|T_{MAMLI}\|_w < 1.$$

*Beweis:*

Wir werden dieses mit Hilfe vom Satz 7.5.1 beweisen.

Zu zeigen ist:

1.  $B_{FC} \leq A_{FC}$  und  $B_{CF} \leq A_{CF}$ ,
2.  $|I - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}| \leq I - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF}$ ,
3.  $|I - \tilde{S}^{-1}(RAP)| \leq I - \tilde{S}_B^{-1}(R_B B P_B)$ ,

wobei  $R = \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}$ ,  $P = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$ ,

$R_B = \begin{bmatrix} -B_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}$  und  $P_B = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$ ,

4.  $\tilde{S}^{-1} \leq \tilde{S}_B^{-1}$ .



Es gilt:

zu 1.  $B_{FC} - A_{FC} = 2 \min(A_{FC}, \tilde{A}_{FC}) - 2A_{FC} \leq 0$   
 und analog  $B_{CF} - A_{CF} = 2 \min(A_{CF}, \tilde{A}_{CF}) - 2A_{CF} \leq 0$ .

zu 2. Hier zeigen wir zuerst:

$$\left| \tilde{A} - A \right| = \tilde{A} - B. \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \left( \left| \tilde{A} - A \right| \right)_{ij} &= \begin{cases} (\tilde{A} - A)_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \leq (\tilde{A})_{ij} \\ (A - \tilde{A})_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \geq (\tilde{A})_{ij} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\tilde{A} - (2A - A))_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \leq (\tilde{A})_{ij} \\ (\tilde{A} - (2\tilde{A} - A))_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \geq (\tilde{A})_{ij} \end{cases} \\ &= (\tilde{A} - (2 \min(A, \tilde{A}) - A))_{ij} \\ &= (\tilde{A} - B)_{ij}. \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \left| I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1} A_{FF} \right| &\leq \tilde{A}_{FF}^{-1} \left| \tilde{A}_{FF} - A_{FF} \right| \\ &= \tilde{A}_{FF}^{-1} (\tilde{A}_{FF} - B_{FF}) \\ &= I - \tilde{A}_{FF}^{-1} B_{FF}. \end{aligned}$$

zu 3. Das ist etwas technisch. Betrachte:

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}\hat{A}\tilde{P} - R\hat{A}P \\
&= \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{FF} & \hat{A}_{FC} \\ \hat{A}_{CF} & \hat{A}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \\
&= \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\hat{A}_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} - \hat{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\hat{A}_{FC} + \hat{A}_{CC} \\
&\quad - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} + A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} + A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} - A_{CC} \\
&= (\hat{A}_{CC} - A_{CC}) + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FF} - A_{FF} + A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&\quad - \hat{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} + (A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}) + A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&\quad - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\hat{A}_{FC} + (\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}) + A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&= (\hat{A}_{CC} - A_{CC}) + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FF} - A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\
&\quad + (\tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC}) - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&\quad - (\hat{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) \\
&\quad - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FC} - A_{FC}) - (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&= (\hat{A}_{CC} - A_{CC}) \\
&\quad + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FF} - A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\
&\quad + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) + (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&\quad - (\hat{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) \\
&\quad + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) \\
&\quad - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FC} - A_{FC}) - (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&= (\hat{A}_{CC} - A_{CC}) \\
&\quad + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FF} - A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\
&\quad + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) + (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF}\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&\quad - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) - (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&\quad + (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) \\
&\quad - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FC} - A_{FC}) - (\hat{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\
&= (\hat{A}_{CC} - A_{CC}) \\
&\quad + \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FF} - A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\
&\quad - \tilde{A}_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) - (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}A_{FC} \\
&\quad + (\tilde{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - A_{FC}) \\
&\quad - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{A}_{FC} - A_{FC}) - (\hat{A}_{CF} - A_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}\hat{B}\tilde{P} - R_B B P_B \\
&= (\hat{B}_{CC} - B_{CC}) \\
&+ \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{B}_{FF} - B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\
&- \tilde{A}_{CF}(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - B_{FC}) - (\tilde{A}_{CF} - B_{CF})(I_F - \tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FF})\tilde{A}_{FF}^{-1}B_{FC} \\
&+ (\tilde{A}_{CF} - B_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}(\tilde{A}_{FC} - B_{FC}) \\
&- \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}(\hat{B}_{FC} - B_{FC}) - (\hat{B}_{CF} - B_{CF})\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$|\hat{A} - A| = \hat{B} - B. \quad (7.9)$$

Denn es ist für alle  $i, j$ :

$$\begin{aligned}
\left(|\hat{A} - A|\right)_{ij} &= \begin{cases} (\hat{A} - A)_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \leq (\hat{A})_{ij} \\ (A - \hat{A})_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \geq (\hat{A})_{ij} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\hat{A} - A + B - B)_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \leq (\hat{A})_{ij} \\ (A - \hat{A} + B - B)_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \geq (\hat{A})_{ij} \end{cases} \\
&= \begin{cases} ((B + A + \hat{A} - 2\min(A, \hat{A})) - B)_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \leq (\hat{A})_{ij} \\ ((B + A + \hat{A} - 2\min(A, \hat{A})) - B)_{ij} & \text{für } (A)_{ij} \geq (\hat{A})_{ij} \end{cases} \\
&= (\hat{B} - B)_{ij}.
\end{aligned}$$

Mit (7.8) und (7.9) folgt nun:

$$\left|\tilde{R}\hat{A}\tilde{P} - RAP\right| \leq \tilde{R}\hat{B}\tilde{P} - R_B B P_B. \quad (7.10)$$

Weiter erhält man:

$$\begin{aligned}
\hat{A} - \hat{B} &= \hat{A} - (B + A + \hat{A} - 2\min(A, \hat{A})) \\
&= -(2\min(A, \hat{A}) - A) - A + 2\min(A, \hat{A}) \\
&= 2(\min(A, \hat{A}) - \min(A, \tilde{A})) \\
&\geq 0 \quad (\text{nach Voraussetzung}).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\tilde{R}(\hat{A} - \hat{B})\tilde{P} \geq 0$$

und somit

$$\tilde{R}\hat{A}\tilde{P} \geq \tilde{R}\hat{B}\tilde{P}.$$

Da  $\tilde{R}\hat{A}\tilde{P}$  und  $\tilde{R}\hat{B}\tilde{P}$  monoton sind, ist:

$$(\tilde{R}\hat{A}\tilde{P})^{-1} \leq (\tilde{R}\hat{B}\tilde{P})^{-1}. \quad (7.11)$$

Mit (7.10) und (7.11) folgt nun:

$$\begin{aligned}
\left|I_C - (\tilde{R}\hat{A}\tilde{P})^{-1}(RAP)\right| &\leq (\tilde{R}\hat{A}\tilde{P})^{-1} \left|\tilde{R}\hat{A}\tilde{P} - RAP\right| \\
&= (\tilde{R}\hat{A}\tilde{P})^{-1}(\tilde{R}\hat{B}\tilde{P} - R_B B P_B) \\
&\leq (\tilde{R}\hat{B}\tilde{P})^{-1}(\tilde{R}\hat{B}\tilde{P} - R_B B P_B) \\
&= I_C - (\tilde{R}\hat{B}\tilde{P})^{-1}R_B B P_B.
\end{aligned}$$

zu 4. Dies wurde bereits gezeigt. Durch (7.11) folgt:

$$\tilde{S}^{-1} \leq \tilde{S}_B^{-1}.$$

□

**Bemerkung 7.5.3**

Wie im Beweis ersichtlich, ist die Wahl von  $B$  und  $\hat{B}$  nicht eindeutig. Wichtig ist, dass die folgende Beziehung zwischen  $B$  und  $\hat{B}$  erfüllt ist:

$$\hat{B} = B + A + \hat{A} - 2 \min(A, \hat{A}). \quad (7.12)$$

Im Beweis wurden zwei Ungleichungen benötigt:

$$|\hat{A} - A| \leq \hat{B} - B$$

und

$$|\tilde{A} - A| \leq \tilde{A} - B.$$

Letztere könnte man umgehen, indem man  $\tilde{A} - A$  umschreibt:

$$\tilde{A} - A = (\tilde{A} - \hat{A}) + (\hat{A} - A).$$

Somit müssten  $B$  und  $\hat{B}$  so gewählt werden, dass

$$|\hat{A} - A| \leq \hat{B} - B$$

und

$$|\tilde{A} - \hat{A}| \leq \tilde{A} - \hat{B}$$

erfüllt sind.

Für die zweite Ungleichung kann  $\hat{B}$  wie folgt gewählt werden:

$$\hat{B} = 2 \min(\tilde{A}, \hat{A}) - \hat{A}.$$

Eingesetzt in (7.12) ergibt das die Gleichung:

$$B + A + \hat{A} - 2 \min(A, \hat{A}) = \hat{B} = 2 \min(\tilde{A}, \hat{A}) - \hat{A}.$$

Somit ist  $B$ :

$$B = 2(\min(\tilde{A}, \hat{A}) + \min(A, \hat{A})) - 2\hat{A} - A.$$

Wir wollen uns nun zwei Spezialfälle anschauen. Zum einen wählen wir als  $\tilde{S}$  das approximierte Schurkomplement, zum anderen die Galerkin-Approximation. Die jeweiligen Iterationsmatrizen sind dann

$$T_{SCHUR} = \left( I - P\tilde{S}^{-1}RA \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \text{ mit } \tilde{S} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC},$$

$$T_{GALERKIN} = \left( I - P\tilde{S}^{-1}RA \right) \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) \text{ mit } \tilde{S} = \tilde{R}A\tilde{P}.$$

Die erste Iterationsmatrix entspricht der im Satz 7.4.1 verwendeten Iterationsmatrix  $T_{MAMLI}$ . Wir erhalten folgendes Korollar:

**Korollar 7.5.4**

Sei  $A$  eine nichtsinguläre  $M$ -Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ \tilde{A}_{CF} & \tilde{A}_{CC} \end{bmatrix}$  ist eine Approximation an  $A$  für die gilt:

1.  $B = 2 \min(A, \tilde{A}) - A$  ist eine  $M$ -Matrix,
  2.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton,
  3.  $\tilde{A}_{CF} \leq 0$  und  $\tilde{A}_{FC} \leq 0$ .
- Falls  $\tilde{S} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$  monoton ist, gilt:

$$\rho(T_{SCHUR}) \leq \|T_{SCHUR}\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

- Falls  $\tilde{S} = \tilde{R}A\tilde{P}$  und  $\tilde{S} = \tilde{R}B\tilde{P}$  monoton sind, gilt:

$$\rho(T_{GALERKIN}) \leq \|T_{GALERKIN}\|_w < 1$$

$$\rho(T_{SCHUR}) \leq \|T_{SCHUR}\|_w < 1$$

mit  $w = B^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv.

*Beweis:*

Wir verwenden zum Beweis den Satz 7.5.2 und wählen jeweils ein geeignetes  $\hat{A}$

- Zuerst zeigen wir:

$$\rho(T_{SCHUR}) \leq \|T_{SCHUR}\|_w < 1.$$

Dafür wähle

$$\hat{A} = \tilde{A},$$

dann gilt:

$$\tilde{R}\hat{A}\tilde{P} = \tilde{R}\tilde{A}\tilde{P} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}.$$

Also erhält man das approximierte Schurkomplement. Somit bleiben folgende Eigenschaften zu zeigen:

1.  $\tilde{S}_B = \tilde{R}\hat{B}\tilde{P}$  ist monoton.  
Für  $\hat{B}$  erhält man:

$$\begin{aligned}\hat{B} &= B + A + \hat{A} - 2 \min(A, \hat{A}) \\ &= B + A + \tilde{A} - 2 \min(A, \tilde{A}) \\ &= B - B + \tilde{A} \\ &= \tilde{A}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\tilde{S}_B = \tilde{R}\hat{B}\tilde{P} = \tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC},$$

das nach Voraussetzung monoton ist.

2.  $\min(A, \hat{A}) \geq \min(A, \tilde{A})$ .  
Dies ist erfüllt, denn für  $\hat{A} = \tilde{A}$ , erhält man

$$\min(A, \tilde{A}) = \min(A, \tilde{A}).$$

- Jetzt zeigen wir:

$$\rho(T_{GALERKIN}) \leq \|T_{GALERKIN}\|_w < 1.$$

Hier wähle  $\hat{A} = A$ , man erhält

$$\tilde{R}\hat{A}\tilde{P} = \tilde{R}A\tilde{P},$$

also die Galerkin-Approximation.

Somit bleiben erneut die folgenden Eigenschaften zu zeigen:

1.  $\tilde{S}_B = \tilde{R}\hat{B}\tilde{P}$  ist monoton.  
Für  $\hat{B}$  erhält man:

$$\begin{aligned}\hat{B} &= B + A + \hat{A} - 2 \min(A, \hat{A}) \\ &= B + A + A - 2 \min(A, A) \\ &= B.\end{aligned}$$

Also ist

$$\tilde{S}_B = \tilde{R}\hat{B}\tilde{P} = \tilde{R}B\tilde{P},$$

das nach Voraussetzung monoton ist.

2.  $\min(A, \hat{A}) \geq \min(A, \tilde{A})$ .  
Für  $\hat{A} = A$ , erhält man

$$A \geq \min(A, \tilde{A}).$$

□

# 8 Konvergenz des Verfahren von Ruge und Stüben für spezielle nichtsinguläre M-Matrizen

## 8.1 Klassisches Verfahren von Ruge und Stüben

In diesem Kapitel betrachten wir erneut das Verfahren von *Ruge und Stüben*. Somit haben wir die Iterationsmatrix

$$T_{RUGE} = T_{MAMLI}^P = \left( I - \begin{bmatrix} -\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} A \right) \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right).$$

Im Folgenden betrachten wir die Approximation  $\tilde{S}$  an  $S$ :

$$\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}.$$

Wie bereits in Kapitel 4 gesehen haben, gilt für  $\tilde{A}$  Folgendes:

- $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ ,
- $(\tilde{A}_{FF})_{ii} \leq (A_{FF})_{ii} \quad \forall i$ ,
- $(\tilde{A}_{FF})_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ ,
- $\tilde{A}_{FC} \leq 0$ ,
- Für  $e = [1, \dots, 1]^T$  gilt:  $\tilde{A}e = Ae$ .

Wir wollen nun die Ergebnisse des vorherigen Kapitels verwenden, um die Konvergenz des Verfahrens von *Ruge und Stüben* als Zwei-Level-Verfahren für gewisse nichtsinguläre unsymmetrische M-Matrizen zu zeigen. Wie wir gesehen haben, spielt dafür die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$$

eine entscheidende Rolle.

**Satz 8.1.1**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre M-Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

Sei

$$B = \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}.$$

Hierbei sind  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{A}_{FC}$  Approximationen an  $A_{FF}$  und  $A_{FC}$ , die aus dem Ruge und Stüben-Coarser entstanden sind und für die gelten soll:

Die Matrix  $B$  ist eine M-Matrix.

Dann gilt:

$$\rho(T_{RUGE}) < 1.$$

*Beweis:*

Wir verwenden Satz (7.4.2).

Folgendes muss gezeigt werden:

1.  $\tilde{A}_{FF}$  ist monoton.
2.  $\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}$  ist monoton.

zu 1. Nach Konstruktion des Verfahrens von Ruge und Stüben ist  $\tilde{A}_{FF}$  eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Daher ist auch  $\tilde{A}_{FF}^{-1}$  eine nichtnegative Matrix, also ist  $\tilde{A}_{FF}$  monoton.

zu 2. Wir zeigen, dass  $\tilde{S}$  eine M-Matrix ist, indem wir zuerst beweisen, dass  $\tilde{A}$  eine M-Matrix ist. Da

$$\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF} \tilde{A}_{FF}^{-1} \tilde{A}_{FC}$$

das Schurkomplement von

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$$

ist, folgt dann mit Satz 2.4.3, dass  $\tilde{S}$  eine M-Matrix ist.

Nach Voraussetzung ist  $B$  eine M-Matrix, und es gilt:

$$\begin{aligned} B - \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \min(\tilde{A}_{FF}, A_{FF}) - A_{FF} - \tilde{A}_{FF} & 2 \min(\tilde{A}_{FC}, A_{FC}) - A_{FC} - \tilde{A}_{FC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$B \leq \tilde{A}. \tag{8.1}$$



Da  $B$  eine Matrix ist, existiert ein positiver Vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  mit

$$Bw > 0.$$

Mit (8.1) folgt weiter

$$0 < Bw \leq \tilde{A}w.$$

Nach Konstruktion von  $\tilde{A}$  ist  $\tilde{A} \in \mathcal{Z}^{n,n}$ .

Also ist  $\tilde{A}$  nach Satz 2.3.4 eine M-Matrix.

□

### Bemerkung 8.1.2

Die Eigenschaft, dass  $B$  eine M-Matrix ist, wurde in dem Beweis zweimal verwendet. Zum einen wurde damit gezeigt, dass das MAMLI-Verfahren angewandt auf die Matrix  $B$  konvergent ist (s. Beweis von Satz 7.2.1), zum anderen wurde gezeigt, dass  $\tilde{S}$  eine M-Matrix ist. Für den ersten Teil ist die Eigenschaft, dass  $B$  eine M-Matrix ist, essentiell.

Das  $\tilde{S}$  eine M-Matrix ist, kann man auch anders zeigen; jedoch benötigt man eine weitere Voraussetzung:

$$Ae > 0,$$

wobei  $e = [1, \dots, 1]^T$  ist.

Wir haben bereits gesehen, dass

$$Ae = \tilde{A}e$$

gilt, somit erhält man:

$$\begin{aligned} (Ae)_i &> 0 \\ \Rightarrow (\tilde{A}e)_i &> 0 \\ \Rightarrow (\tilde{A}_{FF}e_F)_i + (\tilde{A}_{FC}e_C)_i &> 0 \\ \Rightarrow (e_F)_i + (\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}e_C)_i &> 0 \\ \Rightarrow (-A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}e_C)_i &> (A_{CF}e_F)_i. \end{aligned}$$

Also gilt auch:

$$(\tilde{S}e_C)_i = (A_{CC}e_C)_i - (A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}e_C)_i > (A_{CC}e_C)_i + (A_{CF}e_F)_i > 0.$$

Außerdem ist

$$\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}.$$

Da  $A_{CC}$  selber eine M-Matrix ist und

$$-A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} < 0$$

ist, erhält man:

$$\tilde{S} \in \mathcal{Z}^{n,n}.$$

Also ist  $\tilde{S}$  eine M-Matrix.

Auch hier untersuchen wir, welche Matrizen  $A$  zugelassen werden dürfen, damit  $B$  eine M-Matrix wird.

Wir setzen hier für alle  $i$ :

$$MIN_i := \{j \in \mathcal{C} : \tilde{a}_{ij} < a_{ij}\}$$

und

$$MAX_i := \{j \in \mathcal{C} : \tilde{a}_{ij} \geq a_{ij}\}.$$

$B_{FF}$  hat folgende Struktur:

$$(B_{FF})_{ij} = \begin{cases} 2\tilde{a}_{ij} - a_{ij} & \text{für } i = j \\ a_{ij} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Somit gilt für  $i \in F$  und  $e = [1, \dots, 1]^T$ :

$$\begin{aligned} (Be)_i &= (B_{FFE})_i + (B_{FCE})_i \\ &= 2\tilde{a}_{ii} - a_{ii} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{F} \\ j \neq i}} a_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{C}} (2\min(\tilde{a}_{ij}, a_{ij}) - a_{ij}) \\ &= 2(\tilde{a}_{ii} - a_{ii}) + \sum_{j \in \mathcal{F}} a_{ij} + 2 \sum_{j \in MIN_i} \tilde{a}_{ij} + 2 \sum_{j \in MAX_i} a_{ij} - \sum_{j \in \mathcal{C}} a_{ij} \\ &= 2(\tilde{a}_{ii} - a_{ii}) + \sum_{j \in \mathcal{F}} a_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{C}} a_{ij} + 2 \sum_{j \in MIN_i} \tilde{a}_{ij} + 2 \left( \sum_{j \in MAX_i} a_{ij} - \sum_{j \in \mathcal{C}} a_{ij} \right) \\ &= 2(\tilde{a}_{ii} - a_{ii}) + (Ae)_i + 2 \sum_{j \in MIN_i} \tilde{a}_{ij} - 2 \sum_{j \in MIN_i} a_{ij}. \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$\begin{aligned} (Be)_i &> 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\tilde{a}_{ii} - a_{ii}) + (Ae)_i + 2 \sum_{j \in MIN_i} \tilde{a}_{ij} - 2 \sum_{j \in MIN_i} a_{ij} > 0 \\ &\Leftrightarrow (Ae)_i > 2(a_{ii} - \tilde{a}_{ii}) + 2 \sum_{j \in MIN_i} (a_{ij} - \tilde{a}_{ij}). \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Zeilensumme von  $A$  entscheidend für die Konvergenz des Verfahrens ist.

Wir können nun ein Korollar formulieren, das die Konvergenz des Zwei-Level-Verfahrens von *Ruge und Stüben* unter Benutzung des approximierten Schurkomplements für gewisse nichtsinguläre unsymmetrische M-Matrizen garantiert.

**Korollar 8.1.3**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre M-Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und

$A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$  bezeichne die Approximation an  $A$ , die durch das Verfahren von Ruge und Stüben erzeugt wird.

Falls für alle  $i \in F$  gilt:

$$(Ae)_i > 2(a_{ii} - \tilde{a}_{ii}) + 2 \sum_{j \in MIN_i} (a_{ij} - \tilde{a}_{ij}),$$

mit  $MIN_i := \{j \in C : \tilde{a}_{ij} < a_{ij}\}$ .

Dann gilt:

Das Verfahren von Ruge und Stüben ist konvergent, d.h.

$$\rho(T_{RUGE}) < 1.$$

Das ist die erste, uns bekannte Aussage über die Konvergenz des Verfahrens von Ruge und Stüben für unsymmetrische M-Matrizen.

Nun betrachten wir ein Beispiel, bei dem das Verfahren von Ruge und Stüben nicht konvergiert. Dafür sei  $\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$ . Insbesondere ist bei diesem Beispiel die Matrix  $B$  keine M-Matrix.

**Beispiel 8.1.4**

Betrachte die M-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2,7582 & -0,7495 & -0,8033 & -0,4706 & -0,0848 \\ -0,7207 & 2,8873 & -0,3283 & -0,2640 & -0,5540 \\ -0,3243 & -0,2501 & 3,0206 & -0,3413 & -0,0931 \\ -0,6842 & -0,0853 & -0,5157 & 2,9014 & -0,0267 \\ -0,9864 & -0,9579 & -0,2984 & -0,8780 & 2,7151 \end{bmatrix}$$

mit der Aufteilung:

$$A_{FF} = \begin{bmatrix} 2,7582 & -0,7495 & -0,8033 & -0,4706 \\ -0,7207 & 2,8873 & -0,3283 & -0,2640 \\ -0,3243 & -0,2501 & 3,0206 & -0,3413 \\ -0,6842 & -0,0853 & -0,5157 & 2,9014 \end{bmatrix}, \quad A_{CC} = 2,7151.$$

Dann ist die Matrix  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} 2,7582 & -0,7495 & -0,8033 & -0,4706 & -4,1315 \\ -0,7207 & 2,8873 & -0,3283 & -0,2640 & -3,1801 \\ -0,3243 & -0,2501 & 3,0206 & -0,3413 & -1,9247 \\ -0,6842 & -0,0853 & -0,5157 & 2,9014 & -2,5973 \\ -0,9864 & -0,9579 & -0,2984 & -0,8780 & 2,7151 \end{bmatrix}.$$

Und die Inverse:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,0278 & -0,2540 & -0,1455 & -0,2516 & -0,6835 \\ -0,2270 & 0,0969 & -0,1357 & -0,2016 & -0,5210 \\ -0,1506 & -0,1306 & 0,2262 & -0,1081 & -0,3252 \\ -0,1907 & -0,2043 & -0,0929 & 0,1465 & -0,4552 \\ -0,1684 & -0,1385 & -0,1059 & -0,1270 & -0,2467 \end{bmatrix}.$$

Also ist  $B$  keine M-Matrix.

Der Spektralradius ist:

$$\rho(T_{RUGE}) = 1,1955 > 1.$$

Also ist das Verfahren von *Ruge und Stüben* divergent.

Wie wir oben gesehen haben, gibt es zwei mögliche Eigenschaften, die im Beweis des Satzes 8.1.1 nicht erfüllt sind. Entweder ist das approximierte Schurkomplement nicht monoton oder das Verfahren angewandt auf die Matrix  $B$  ist divergent.

Wir zeigen, dass die zweite Möglichkeit zutrifft, somit die Methode, die Matrix  $B$  zu benutzen, um die Konvergenz zu zeigen, essentiell für den Beweis der Konvergenz ist.

Das approximierte Schurkomplement  $\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$  ist:

$$\tilde{S} = 0,8451.$$

Somit ist  $\tilde{S}$  monoton.

Das obige Beispiel ist kein typisches Problem, das aus einer Anwendung entstanden ist. Doch ist es für algebraische Mehrgitter-Verfahren wichtig, dass die Struktur der Matrix  $A$  beliebig sein kann.

Wir wollen uns noch ein weiteres Beispiel anschauen, das aus einer PDE entstanden ist. Daher würde man erwarten, dass das Verfahren von *Ruge und Stüben* konvergiert. Wir werden sehen, dass zumindest für das Mehrgitter-Verfahren keine Konvergenz vorliegt.

**Beispiel 8.1.5** (Laplace-Matrix)

Betrachte dazu die Laplace-Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} T & -I & & & & & \\ -I & T & -I & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -I & T & -I & \\ & & & & -I & T & \end{bmatrix} \quad \text{mit } T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & 4 & \end{bmatrix}$$

mit  $T \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $A \in \mathbb{R}^{n^2,n^2}$ .

Wir setzen nun  $n = 15$ . Wir werden sehen, dass das Zwei-Level-Verfahren konvergent ist, jedoch das Mehrgitter-Verfahren divergiert.

Für das Zwei-Level-Verfahren ist die entstehende Matrix  $B$  eine M-Matrix. Der Spektralradius der Iterationsmatrix beträgt:

$$\rho(T_{2-LEVEL}) = 0,949334 < 1.$$

Jedoch erhält man für das Mehrgitter-Verfahren:

$$\rho(T_{MEHRLEVEL}) = 1,051994 > 1.$$

## 8.2 Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass das Verfahren von *Ruge und Stüben* im Allgemeinen nicht konvergent ist. Daher werden wir es nun modifizieren. Das Ziel ist es, die Approximation  $\tilde{A}$  so zu verändern, dass die Matrix  $B$  eine M-Matrix wird. Die Matrix  $B$  hängt explizit von  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{A}_{FC}$  ab. Damit  $B$  eine M-Matrix wird, müssen die Einträge von  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{A}_{FC}$  vergrößert werden. Wir wissen, dass  $B \in \mathbb{Z}^{n,n}$  ist. Somit benötigen wir, dass ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  mit  $w > 0$  existiert, so dass

$$Bw > 0$$

gilt.

Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

$B$  ist wie folgt definiert:

$$B = \begin{bmatrix} 2 \min(A_{FF}, \tilde{A}_{FF}) - A_{FF} & 2 \min(A_{FC}, \tilde{A}_{FC}) - A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}.$$

Es ist unnötig, die Einträge von  $\tilde{A}$  so stark zu vergrößern, dass gilt:

$$(\tilde{A})_{ij} > (A)_{ij}.$$

Also sollten wir bei den Einträgen ansetzen, die vom Verfahren von *Ruge und Stüben* verkleinert wurden.

Zunächst benötigen wir den Vektor  $w > 0$ , für den gilt:

$$Aw > 0.$$

Dieser existiert, da  $A$  eine M-Matrix ist.

Als nächstes berechnen wir eine Art gewichtete Zeilensumme der Matrix  $B$ :

$$b := B \cdot w.$$

Unser Ziel ist es,  $b > 0$  zu erreichen, denn dann wäre  $B$  eine M-Matrix.

Im Folgenden betrachten wir  $A$  und  $w > 0$  als gegeben, so dass  $Aw > 0$  ist.  $B$  hat die Darstellung:

$$B = 2 \min(\tilde{A}, A) - A \quad \text{mit} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF} & \tilde{A}_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}.$$

Der folgende Algorithmus verändert  $\tilde{A}_{FF}$  und  $\tilde{A}_{FC}$ , so dass  $B$  eine M-Matrix wird.

```

for  $i \in \mathcal{F}$  do
    
$$B = 2\min(\tilde{A}, A) - A,$$

    
$$b = B \cdot w.$$


    while  $b_i < 0$  do
        Finde die Einträge in  $\tilde{A}_{FC}$ , die durch das Verfahren von Ruge und Stüben verkleinert
        wurden:

        
$$M_i = \{j \in \mathcal{C} : a_{ij} > \tilde{a}_{ij}\}.$$


        if  $M_i \neq \emptyset$  then
            Vergrößere die Einträge aus  $M_i$ :
            Setze

            
$$s_i = \sum_{j \in M_i} \tilde{a}_{ij} w_j.$$


            und
            for  $j \in M_i$  do
                
$$k_{ij} = b_i \frac{\tilde{a}_{ij}}{s_i}.$$


                Vergrößere  $\tilde{a}_{ij}$ :

                
$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ij} + \frac{|k_{ij}|}{2}.$$


                 $\tilde{a}_{ij}$  soll nicht größer sein als  $a_{ij}$ :
                if  $\tilde{a}_{ij} > a_{ij}$  then
                    
$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij}.$$

                end
            end
        end
        else
            Es gilt bereits:

            
$$a_{ij} \leq \tilde{a}_{ij} \quad \forall j \in \mathcal{C},$$


            dann vergrößere  $\tilde{a}_{ii}$ :
            Berechne die gewichtete Zeilensumme von  $B$  neu:

            
$$B = 2\min(\tilde{A}, A) - A,$$

            
$$b = B \cdot w.$$


            Setze

            
$$\tilde{a}_{ii} = \min \left( a_{ii}, \frac{\tilde{a}_{ii} w_i + |b_i|}{w_i} \right).$$

        end
    end
end

```

Nach diesem Durchlauf gilt:

$B$  ist eine M-Matrix. Denn sobald die Diagonaleinträge von  $\tilde{A}$  vergrößert wurden, so dass gilt:

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} \quad \forall i,$$

dann ist

$$A \leq \tilde{A}.$$

Damit ist dann sichergestellt, dass  $B$  eine M-Matrix ist, denn man erhält:

$$B = 2 \min(A, \tilde{A}) - A = 2A - A = A.$$

Die neuen Approximationen an  $A_{FF}$  und  $A_{FC}$  bezeichnen wir mit  $\hat{A}_{FF}$  und  $\hat{A}_{FC}$ . Es stellt sich die Frage, ob das *modifizierte Verfahren von Ruge und Stüben* konvergent ist. Das beantwortet folgender Satz:

**Satz 8.2.1**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine nichtsinguläre M-Matrix mit  $A = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}$ , wobei  $A_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F, n_F}$  und  $A_{CC} \in \mathbb{R}^{n_C, n_C}$ .  
Sei

$$T_{RUGE-MOD} = \left( I - \begin{bmatrix} -\hat{A}_{FF}^{-1} \hat{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix} \hat{S}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{CF} \hat{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix} A \right) \cdot \left( I - \begin{bmatrix} \hat{A}_{FF}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right).$$

mit

$$\hat{S} = A_{CC} - A_{CF} \hat{A}_{FF}^{-1} \hat{A}_{FC}$$

die Iterationsmatrix des modifizierten Verfahrens von Ruge und Stüben. Dann gilt:

$$\rho(T_{RUGE-MOD}) < 1.$$

*Beweis:*

Nach Satz (7.4.2) müssen wir nur zeigen, dass  $\hat{A}_{FF}$  und  $\hat{S}$  monoton sind, und  $B$  eine M-Matrix ist. Das Zweite folgt direkt aus der Konstruktion des Verfahrens. Ebenfalls erhält man auch die Monotonie von  $\hat{A}_{FF}$ , da  $\hat{A}_{FF}$  eine nichtnegative Diagonalmatrix ist.

Da  $B$  eine M-Matrix ist, und erneut

$$B \leq \hat{A}$$

gilt, folgt analog zum Beweis von Satz 8.1.1, dass  $\hat{A}$  eine M-Matrix ist. Mit Satz 2.4.3 folgt dann auch, dass  $\hat{S}$  eine M-Matrix und somit insbesondere monoton ist.  $\square$

Nun wollen wir noch einmal zu den Beispielen zurückkehren.

**Beispiel 8.2.2** (Fortsetzung Beispiel 8.1.4)

Wir haben die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2,7582 & -0,7495 & -0,8033 & -0,4706 & -0,0848 \\ -0,7207 & 2,8873 & -0,3283 & -0,2640 & -0,5540 \\ -0,3243 & -0,2501 & 3,0206 & -0,3413 & -0,0931 \\ -0,6842 & -0,0853 & -0,5157 & 2,9014 & -0,0267 \\ -0,9864 & -0,9579 & -0,2984 & -0,8780 & 2,7151 \end{bmatrix}.$$

mit der Aufteilung:

$$A_{FF} = \begin{bmatrix} 2,7582 & -0,7495 & -0,8033 & -0,4706 \\ -0,7207 & 2,8873 & -0,3283 & -0,2640 \\ -0,3243 & -0,2501 & 3,0206 & -0,3413 \\ -0,6842 & -0,0853 & -0,5157 & 2,9014 \end{bmatrix}, \quad A_{CC} = 2,7151$$

betrachtet. Für diese Matrix ist das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* divergent. Nun untersuchen wir das modifizierte Verfahren. Die Matrix  $B$  sieht nun wie folgt aus:

$$B = \begin{bmatrix} 2,7582 & -0,7495 & -0,8033 & -0,4706 & -0,0848 \\ -0,7207 & 2,8873 & -0,3283 & -0,2640 & -0,5540 \\ -0,3243 & -0,2501 & 3,0206 & -0,3413 & -0,3638 \\ -0,6842 & -0,0853 & -0,5157 & 2,9014 & -0,0267 \\ -0,9864 & -0,9579 & -0,2984 & -0,8780 & 2,7151 \end{bmatrix}.$$

Man sieht, dass  $B$  bis auf einen Eintrag der Matrix  $A$  entspricht. Die Inverse von  $B$  ist:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4906 & 0,1724 & 0,1805 & 0,1395 & 0,0761 \\ 0,2102 & 0,4564 & 0,1392 & 0,1282 & 0,1196 \\ 0,1244 & 0,0957 & 0,3992 & 0,0994 & 0,0779 \\ 0,1469 & 0,0734 & 0,1194 & 0,4012 & 0,0395 \\ 0,3136 & 0,2579 & 0,1972 & 0,2366 & 0,4595 \end{bmatrix}.$$

Also ist  $B$  eine M-Matrix. Der Spektralradius der Iterationsmatrix ist nun

$$\rho(T_{RUGE-MOD}) = 0,501940.$$

**Beispiel 8.2.3** (Fortsetzung Beispiel 8.1.5)

Wir betrachten wieder die Laplace-Matrix  $A \in \mathbb{R}^{225,225}$ . Nun erhalten wir für das Mehrgitter-Verfahren den Spektralradius

$$\rho(T_{RUGE-MOD}) = 0,871459.$$



# 9 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden die theoretischen Ergebnisse numerisch belegt.

Anhand von einigen Beispielen werden zunächst das *MAMLI-Verfahren*, das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* und das *modifizierte Ruge und Stüben* untersucht. Diese Verfahren werden anhand des Spektralradius der jeweiligen Iterationsmatrizen und der Anzahl der Konvergenzschritte verglichen.

Anschließend wird das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* mit den gleichen Beispielen untersucht. Es werden verschiedene Approximationen an  $S$  verwendet:

$\tilde{S}_1 = A_{CC}$ ,  $\tilde{S}_2 = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$  und  $\tilde{S}_3 = RA\tilde{P}$ , also der  $A_{CC}$ -Block der Matrix  $A$ , das approximierte Schurkomplement der Matrix  $A$  und die Galerkin-Approximation der Matrix  $A$ . Auch hier werden Spektralradius und Anzahl der Iterationsschritte als Größen zum Vergleich herangezogen.

Bei allen Untersuchungen werden sowohl die jeweiligen Zwei-Level-Verfahren als auch die Mehrgitter-Verfahren miteinander verglichen.

## 9.1 Vergleich der Verfahren

Im Folgenden werden die drei Verfahren

- *MAMLI-Verfahren*,
- *das klassische Verfahren von Ruge und Stüben*,
- *modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben*

verglichen.

### Bemerkung 9.1.1

Dabei ist Folgendes zu beachten:

1. Bei dem *MAMLI-Verfahren* wird der Coarser des Verfahrens von Ruge und Stüben verwendet, jedoch ohne Verschiebung von Einträgen auf die Diagonale oder in den  $FC$ -Block. Als  $\tilde{A}_{FF}$  wird die Diagonale von  $A_{FF}$  gewählt, also das *Jacobi-Verfahren*.
2. Für das *Zwei-Level-Verfahren* wurde die Konvergenz des *MAMLI-Verfahrens* und des *modifizierten Verfahrens von Ruge und Stüben* für *unsymmetrische nichtsinguläre  $M$ -Matrizen* in den letzten Kapiteln gezeigt.  
Die Konvergenz des *klassischen Verfahrens von Ruge und Stüben* wurde nur für *sehr spezielle unsymmetrische nichtsinguläre  $M$ -Matrizen* gezeigt (siehe Satz 8.2.1).

**Beispiel 9.1.2** (Laplace-Matrix)

Betrachte die Matrix aus dem Beispiel 8.1.5

Betrachte dazu die Laplace-Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} T & -I & & & & & \\ -I & T & -I & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -I & T & -I & \\ & & & & -I & T & \end{bmatrix} \quad \text{mit } T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & 4 & \end{bmatrix}$$

und  $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n^2,n^2}$ .

Dimension	Verfahren	Iterationen	Spektralradius
Zwei-Level-Verfahren			
n=10	MAMLI-Verfahren	207	0,8947
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	207	0,8947
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	207	0,8947
n=15	MAMLI-Verfahren	452	0,9493
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	452	0,9493
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	452	0,9493
n=20	MAMLI-Verfahren	792	0,9704
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	792	0,9704
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	792	0,9704
Mehrgitter-Verfahren			
n=10	MAMLI-Verfahren	90	0,7699
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	134	0,8357
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	83	0,7529
n=15	MAMLI-Verfahren	186	0,8796
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	-	1,0520
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	174	0,8715
n=20	MAMLI-Verfahren	328	0,9289
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	-	1,2154
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	311	0,9251

An diesem Beispiel ist zu sehen, dass das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* im Allgemeinen nicht konvergent ist. Außerdem ist das *modifizierte Verfahren von Ruge und Stüben* hier schneller als das *MAMLI-Verfahren*.

Da die Matrix  $A_{FF}$  nach dem Coarsingprozess bereits diagonal ist, sind bei den Zwei-Level-Verfahren die jeweiligen Iterationsmatrizen identisch.  $\diamond$

Als nächstes Beispiel betrachten wir eine Matrix, die eine ähnliche Struktur wie die Laplace-Matrix hat, jedoch unsymmetrisch ist.

**Beispiel 9.1.3** (unsymmetrische Laplace-Matrix)

Sei die Matrix  $A$  gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} T & -0,9 \cdot I & & & & \\ -1,5 \cdot I & T & -0,9 \cdot I & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1,5 \cdot I & T & -0,9 \cdot I \\ & & & & -1,5 \cdot I & T \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } T = \begin{bmatrix} 4 & -0,6 & & & & \\ -1 & 4 & -0,6 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 4 & -0,6 & \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

und  $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n^2,n^2}$ .

Dimension	Verfahren	Iterationen	Spektralradius
Zwei-Level-Verfahren			
n=10	MAMLI-Verfahren	122	0,8198
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	122	0,8198
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	122	0,8198
n=15	MAMLI-Verfahren	185	0,8704
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	185	0,8704
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	185	0,8704
n=20	MAMLI-Verfahren	235	0,8899
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	235	0,8899
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	235	0,8899
Mehrgitter-Verfahren			
n=10	MAMLI-Verfahren	57	0,6487
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	123	0,8163
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	53	0,6307
n=15	MAMLI-Verfahren	82	0,7277
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	-	1,0528
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	77	0,7133
n=20	MAMLI-Verfahren	104	0,7670
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	328	0,9213
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	100	0,7603

Hier sieht man erneut die schnellere Konvergenz des *modifizierten Verfahren von Ruge und Stüben* gegenüber dem *MAMLI-Verfahren* bei den Mehrgitter-Verfahren. Erneut ist das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* in einem Fall divergent.

Als letztes betrachten wir die Matrix aus dem Beispiel 8.1.4.

**Beispiel 9.1.4**

Betrachte die M-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2,7582 & -0,7495 & -0,8033 & -0,4706 & -0,0848 \\ -0,7207 & 2,8873 & -0,3283 & -0,2640 & -0,5540 \\ -0,3243 & -0,2501 & 3,0206 & -0,3413 & -0,0931 \\ -0,6842 & -0,0853 & -0,5157 & 2,9014 & -0,0267 \\ -0,9864 & -0,9579 & -0,2984 & -0,8780 & 2,7151 \end{bmatrix}.$$

Dimension	Verfahren	Iterationen	Spektralradius
	Zwei-Level-Verfahren		
n=5	MAMLI-Verfahren	30	0,5065
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	-	1,1937
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	30	0,5010
	Mehrgitter-Verfahren		
n=5	MAMLI-Verfahren	30	0,5065
	klassisches Verfahren von Ruge und Stüben	-	1,1937
	Modifiziertes Verfahren von Ruge und Stüben	30	0,5010

Hier sind die Zwei-Level-Verfahren und die Mehrgitter-Verfahren identisch. Man sieht erneut, dass das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* divergent ist.

Anhand dieser drei Beispiele konnte man einiges erkennen:

1. Das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* ist im Allgemeinen für nichtsinguläre unsymmetrische M-Matrizen nicht konvergent.
2. Das modifizierte Verfahren ist in allen drei Beispielen mindestens genauso schnell wie das *MAMLI-Verfahren*.

## 9.2 Untersuchung des klassischen Verfahren von Ruge und Stüben

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass das *klassische Verfahren von Ruge und Stüben* im Allgemeinen nicht konvergent ist, falls man als Approximation an  $S$  das approximierte Schurkomplement  $\tilde{S} = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$  verwendet.

Daher werden wir im Folgenden andere Approximationen untersuchen.

1.  $\tilde{S}_1 = A_{CC}$ ,
2.  $\tilde{S}_2 = A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$ ,
3.  $\tilde{S}_3 = R\tilde{P}$  mit  $R = \begin{bmatrix} -A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1} & I_C \end{bmatrix}$  und  $\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC} \\ I_C \end{bmatrix}$ .

Wir verwenden die Beispiele aus dem letzten Abschnitt.

**Beispiel 9.2.1** (Fortsetzung Beispiel 9.1.2)

Betrachte erneut die Laplace-Matrix aus dem Beispiel 9.1.2.

Dimension	Approximation	Iterationen	Spektralradius
	Zwei-Level-Verfahren		
n=10	$\tilde{S}_1$	279	0,9206
	$\tilde{S}_2$	207	0,8947
	$\tilde{S}_3$	207	0,8947
n=15	$\tilde{S}_1$	605	0,9619
	$\tilde{S}_2$	452	0,9493
	$\tilde{S}_3$	452	0,9493
n=20	$\tilde{S}_1$	1059	0,9778
	$\tilde{S}_2$	792	0,9704
	$\tilde{S}_3$	792	0,9704
	Mehrgitter-Verfahren		
n=10	$\tilde{S}_1$	279	0,9206
	$\tilde{S}_2$	134	0,8357
	$\tilde{S}_3$	40	0,5521
n=15	$\tilde{S}_1$	605	0,9619
	$\tilde{S}_2$	-	1,0520
	$\tilde{S}_3$	61	0,6711
n=20	$\tilde{S}_1$	1059	0,9778
	$\tilde{S}_2$	-	1,2154
	$\tilde{S}_3$	78	0,7275

**Beispiel 9.2.2** (Fortsetzung Beispiel 9.1.3)  
 Betrachte die Matrix aus dem Beispiel 9.1.3.

Dimension	Approximation	Iterationen	Spektralradius
	Zwei-Level-Verfahren		
n=10	$\tilde{S}_1$	164	0,8631
	$\tilde{S}_2$	122	0,8198
	$\tilde{S}_3$	122	0,8198
n=15	$\tilde{S}_1$	244	0,9018
	$\tilde{S}_2$	185	0,8704
	$\tilde{S}_3$	185	0,8704
n=20	$\tilde{S}_1$	315	0,9167
	$\tilde{S}_2$	235	0,8899
	$\tilde{S}_3$	235	0,8899
	Mehrgitter-Verfahren		
n=10	$\tilde{S}_1$	164	0,8631
	$\tilde{S}_2$	122	0,8163
	$\tilde{S}_3$	31	0,4468
n=15	$\tilde{S}_1$	249	0,9167
	$\tilde{S}_2$	-	1,0528
	$\tilde{S}_3$	40	0,5182
n=20	$\tilde{S}_1$	315	0,9167
	$\tilde{S}_2$	328	0,9213
	$\tilde{S}_3$	48	0,5573

**Beispiel 9.2.3** (Fortsetzung Beispiel 9.1.4)  
 Betrachte die Matrix aus dem Beispiel 9.1.4.

Dimension	Approximation	Iterationen	Spektralradius
	Zwei-Level-Verfahren		
n=5	$\tilde{S}_1$	27	0,4470
	$\tilde{S}_2$	-	1,1957
	$\tilde{S}_3$	24	0,4009
	Mehrgitter-Verfahren		
n=5	$\tilde{S}_1$	27	0,4470
	$\tilde{S}_2$	-	1,957
	$\tilde{S}_3$	24	0,4009

**Bemerkung 9.2.4**

An diesen drei Beispielen ist zu erkennen, dass das Verfahren von Ruge und Stüben mit der Verwendung der Galerkin-Approximation am wenigsten Iterationen benötigt, jedoch besitzt diese im Allgemeinen mehr Nichtnulleinträge als das approximierte Schurkomplement.

In der Arbeit [11] wird unter gewissen Voraussetzungen Folgendes gezeigt:

$$\|T_{\tilde{S}_3}\|_w \leq \|T_{\tilde{S}_2}\|_w \leq \|T_{\tilde{S}_1}\|_w,$$

mit  $w = A^{-1}d$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  positiv. Dabei ist  $T_{\tilde{S}_i}$  das jeweilige Iterationsverfahren, das  $\tilde{S}_i$  als Approximation an  $S$  verwendet.

An obigen Beispielen sieht man bereits, dass die zweite Ungleichung für das Verfahren von Ruge und Stüben im Allgemeinen wahrscheinlich nicht erfüllt ist, da zumindest

$$\rho(T_{\tilde{S}_2}) \geq \rho(T_{\tilde{S}_1})$$

gilt.

Jedoch ist es durchaus möglich, dass die erste Ungleichung und vielleicht sogar die Aussage

$$\rho(T_{\tilde{S}_3}) \leq \rho(T_{\tilde{S}_2})$$

gilt. Dies muss noch genauer untersucht werden.

# 10 Zusammenfassung und Ausblick

## 10.1 Zusammenfassung der Diplomarbeit

In dieser Arbeit ist ein Konvergenzbeweis des Verfahrens von *Ruge und Stüben* für gewisse unsymmetrische nichtsinguläre M-Matrizen gezeigt worden. Dies scheint das erste Konvergenzresultat dieser Art seit der ursprünglichen Arbeit von Ruge und Stüben, die vor ca. 20 Jahren erschienen ist, zu sein.

Hierzu wurde mit allgemeineren Voraussetzungen als in der Arbeit [9], ein Konvergenzbeweis des MAMLI-Verfahrens gezeigt.

Der Beweis basiert nicht mehr auf gewissen Splittingeigenschaften, sondern auf einer M-Matrix  $B$ , deren M-Matrizeigenschaft beschreibt, welche Approximationen an das jeweilige Verfahren zugelassen werden können.

Durch diese neue Technik war der Beweis des *Verfahrens von Ruge und Stüben* für gewisse unsymmetrische nichtsinguläre M-Matrizen möglich.

Im Weiteren wurde gezeigt, dass das *Verfahren von Ruge und Stüben* unter Verwendung des approximierten Schurkomplements im Allgemeinen nicht konvergent ist.

Die numerischen Ergebnisse lassen jedoch vermuten, dass das *Verfahren von Ruge und Stüben* unter Verwendung der Galerkin-Approximation für nichtsinguläre M-Matrizen konvergent ist. Dies bedarf weiteren Untersuchungen.

Außerdem beschäftigt sich die Arbeit mit der Vergrößerung der Konvergenzgeschwindigkeit von Zwei-Level-Verfahren. Es wurde gezeigt, dass durch Hinzunahme eines Glätters mit gewissen Tupel- bzw. Splittingeigenschaften die Konvergenzgeschwindigkeit erhöht werden kann. Somit ist das *MAMLI-Verfahren* nicht nur unter Verwendung eines F-Glätters konvergent, sondern auch, wenn auf einem größeren Gebiet geglättet wird.

## 10.2 Ausblick

Diese Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit Zwei-Level-Verfahren. Von weiterem Interesse ist, ob die in dieser Arbeit eingeführten Methoden sich auf Mehrgitter-Verfahren verallgemeinern lassen.

Bisher konnte die Konvergenz mit der Galerkin-Approximation als Approximation für das nächste Level nur für das *MAMLI-Verfahren* gezeigt werden, es ist jedoch wahrscheinlich, dass sich diese auch für das Verfahren von *Ruge und Stüben* zeigen läßt.

Desweiteren wurden bisher sehr spezielle Approximationen (approximiertes Schurkomplement, Galerkinapproximation) betrachtet, man könnte versuchen, mit anderen Approximationen die Konvergenz des Verfahrens von *Ruge und Stüben* unter allgemeineren Voraussetzungen zu zeigen.

Die numerischen Resultate motivieren außerdem eine nähere Analyse des *Verfahrens von Ruge und Stüben* unter Verwendung der Galerkin-Approximation.



# Stichwortverzeichnis

- Algebraische Mehrgitter-Verfahren, 2, 17
- AMG von Ruge und Stüben, 2, 20–31
  - Coarser - 1. Teil, 22
  - Coarser - 2. Teil, 23
  - Coarsingprozess in Matrixschreibweise, 25
  - Klassisches Verfahren, 97–102
    - Konvergenz, 98, 101
  - Modifiziertes Verfahren, 103–106
    - Konvergenz, 105
- Definitionen
  - Adjungierte Menge, 21
  - Eigenvektor, 6
  - Eigenwert, 6
  - Matrix-Norm, 7
    - monoton, 9
  - Nichtsinguläre M-Matrix, 9
  - Norm, 7
  - Schurkomplement, 10
  - Singuläre M-Matrix, 9
  - Spektralradius, 6
  - Spektrum, 6
  - Splitting, 11
    - nichtnegativ, 11
    - regulär, 11
      - schwach regulär vom ersten Typ, 11
      - schwach regulär vom zweiten Typ, 11
  - Starker Nachbar, 21
  - Tupel, 11
    - nichtnegativ, 11
      - schwach regulär vom ersten Typ, 11
      - schwach regulär vom zweiten Typ, 11
  - w-Norm, 7
  - Z-Matrix, 9
- Direkte Verfahren, 1
- Feingitter, 21
- Galerkin-Approximation, 87
  - $\tilde{R}\tilde{A}\tilde{P}$ , 95
- Geometrische Mehrgitter-Verfahren, 2, 17
- Glatte Fehler, 2, 20
- Grobgitter, 21
- Iterationsmatrix, 14
- Iterationsmatrizen
  - $T_{CFGFC}$ , 46
  - $T_{CFG}$ , 46
  - $T_{FCG}$ , 46
  - $T_{GALERKIN}$ , 95
  - $T_{GCF}$ , 46
  - $T_{GFC}$ , 46
  - $T_{MAMLI}$ , 33, 46
  - $T_{MAMLI}^P$ , 71
  - $T_{MAMLI}^R$ , 71
  - $T_{MAMLI}^{PR}$ , 71
  - $T_{RMAMLI}$ , 33, 46
  - $T_{SCHUR}$ , 95
  - $T_{SMAMLI}$ , 33, 46
- Iterative Verfahren, 1, 14–20
- Konvergenz
  - $CFG$ , 52, 82
  - $CFGFC$ , 55, 82
  - $FCG$ , 54, 82
  - $FGC$ , 82
  - $GCF$ , 54
  - $GFC$ , 51, 82
  - $MAMLI$ , 34, 62, 82, 87, 90
  - $MAMLI^P$ , 72, 82
  - $MAMLI^R$ , 85
  - $MAMLI^{PR}$ , 85
  - $RMAMLI$ , 34, 79, 82
  - $SMAMLI$ , 34, 82
- Laplace-Matrix, 28, 102, 108
- MAMLI-Verfahren, 2, 32–35
- Mehrgitter-Verfahren, 16–20
- RMAMLI-Verfahren, 32–35
- Satz von
  - Perron-Frobenius, 7
- Schurkomplement
  - $A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$ , 77
  - $\tilde{A}_{CC} - \tilde{A}_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$ , 82, 95
  - $A_{CC} - A_{CF}\tilde{A}_{FF}^{-1}\tilde{A}_{FC}$ , 85
- SMAMLI-Verfahren, 32–35
- Splittingverfahren, 1, 14–16
  - Gauß-Seidel-Verfahren, 15
  - Jacobi-Verfahren, 15
- Zwei-Level-Verfahren, 2, 16–20



# Literaturverzeichnis

- [1] A. BERMAN, R.J. PLEMMONS. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994. (Revised reprint of the 1979 original).
- [2] M. BOLLHÖFER. *Geometrische Mehrgitterverfahren und Algebraische Mehrgitterverfahren - Eine Einführung*. Kompaktkurs Iterative Gleichungssysteme und parallele Algorithmen, Berlin, 2001.
- [3] W. BUNSE UND A. BUNSE-GERSTNER. *Numerische lineare Algebra*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1985.
- [4] A.FROMMER, H. SCHWANDT, UND D.B. SZYLD. *Asynchronous weighted additive Schwarz meth.* Electronic Transactions on Numerical Analysis, 48-61, 1997.
- [5] A. FROMMER UND D. B. SZYLD. *Weighted max norms, splittings, and overlapping additive Schwarz iterations*. Numer. Math., 83(2), 259-278, 1999.
- [6] W. HACKBUSCH. *Iterative Lösungen großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. B.G. Teubner, Stuttgart, 2.Auflage, 1993.
- [7] S. LIPSCHUTZ. *Theory and Problems of Linear Algebra*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [8] A. MEISTER. *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg, Wiesbaden 2. Auflage, 2005.
- [9] C. MENSE. *Konvergenzanalyse von algebraischen Mehr-Gitter-Verfahren für M-Matrizen*. Dissertation an der TU-Berlin, 2007.
- [10] C. MENSE, R. NABBEN. *On algebraic multilevel methods for non-symmetric systems - convergence results*. Eingereicht zur Veröffentlichung, Berlin, 2007.
- [11] C. MENSE, R. NABBEN. *On algebraic multilevel methods for non-symmetric systems - comparison results*. Eingereicht zur Veröffentlichung, Berlin, 2007.
- [12] D.V. OUELLETTE. *Schur complements and statistics*. Linear Algebra and its Applications 36, 187-295, 1891.
- [13] W.C. RHEINBOLDT UND J.S. VANDERGRAFT. *A simple approach to the Perron-Frobenius theory for positive operators on general partially-ordered finite-dimensional linear spaces*. Mathematics of Computation 22, 139-145, 1973.
- [14] J.W. RUGE, K.STÜBEN. *Algebraic multigrid*. Multigrid Methods, 73-130, 1987.
- [15] E. VIRNIK. *Algebraic Multigrid Preconditioners for Computing Stationary Distributions of Markov Processes*. Diplomarbeit an der TU-Berlin, 20.September 2004.
- [16] Z. I. WOZNICKI. *Nonnegative Splitting theory*. Japan J. Indust. Appl. Math. 11(2), 289-342, 1994.