Vorlesung Algebra

Dirk Kussin

Institut für Mathematik, Uni Paderborn
Email address: dirk@math.uni-paderborn.de

Institut für Mathematik, TU Berlin
Email address: kussin@math.tu-berlin.de

Hinweis. Für Druckfehler wird keine Haftung übernommen.

Updated version: Jan. 26, 2021

Bisherige Verwendung in Vorlesungen des Autors:

- Uni Paderborn, Winter 2006/07 (Gruppen- und Ringtheorie) und Sommer 2007 (Körper- und Galoistheorie)
- TU Chemnitz, Sommer 2013 (komplett)
- Uni Stettin, Sommer 2015 (Körper- und Galoistheorie)
- Uni Münster, Sommer 2017 (Körper- und Galoistheorie)
- TU Berlin, Winter 2019/20 (komplett), Winter 2020/21

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL I

Elementare Gruppentheorie

1. Der Gruppenbegriff

Aus der Linearen Algebra ist der Begriff einer Gruppe bekannt.

DEFINITION 1.1. Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\cdot\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy = x \cdot y$ heisst *Gruppe*, falls folgendes gilt:

(G1) die Verknüpfung ist assoziativ, d. h. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle x, $y\, z \in G$;
(G2) es gibt ein neutrales Element e in G, d. h. für das gilt $x \cdot e = x = e \cdot x$ für alle $x \in G$;
(G3) zu jedem $x \in G$ gibt es ein inverses Element $y \in G$, d. h. für das gilt $x \cdot y = e = y \cdot x$.

Es ist leicht zu zeigen, dass es nur ein neutrales Element e geben kann, und dass ein inverses Element y zu x eindeutig bestimmt ist; man schreibt dann $y = x^{-1}$, und auch $e = e_G$, falls betont werden soll, dass es sich um das neutrale Element in G handelt.

Ist die Verknüpfung zusätzlich kommutativ, d. h. gilt $x \cdot y = y \cdot x$ für alle x, $y \in G$, so heisst die Gruppe G *abelsch*.

Der Gruppenbegriff ist zentral für die ganze Mathematik, nicht etwa nur von Bedeutung in der Algebra. Jedem mathematischen Objekt M (einer Menge, einem Vektorraum, einem topologischen Raum, einem geometrischen Objekt, einer Gruppe, einer geordneten Menge, etc.) kann man nämlich seine Symmetriegruppe $\mathbb{S}(M)$ zuordnen, gebildet aus allen die gegebene Struktur von M bewahrenden Isomorphismen $f\colon M \to M$. Je nach Kontext spricht man auch von der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(M)$ von M.

BEISPIELE 1.2. (1) $\mathrm{GL}_n(K)$, die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über dem Körper K.

(1') $\mathrm{Aut}_K(V)$, die Menge der K-linearen, bijektiven Abbildungen $f\colon V \to V$ des K-Vektorraums V in sich. (Automorphismengruppe von V.)

(2) $\mathbb{S}(M)$, die Menge der bijektiven Abbildungen $f\colon M \to M$ von der Menge M in sich. Speziell für $M = \{1, 2, \ldots, n\}$: die symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}(M)$; dies ist die Menge der Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

(3) $(\mathbb{Z}, +)$, die Menge der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung. (Hier verwendet man eine *additive Schreibweise*: $x + y$ statt $x \cdot y = xy$, $-x$ statt x^{-1}, $x - y := x + (-y)$.) Das neutrale Element ist 0.

(4) Die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1 bilden mit der Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine Gruppe.

(5) Sei X ein topologischer Raum. Dann bildet die Menge der Homöomorphismen $f\colon X \to X$ von X auf sich (d. h. f ist stetig, bijektiv, und f^{-1} ist stetig) mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe. ("Symmetrie"- oder Automorphismengruppe von X.)

Die Anzahl der Elemente (bzw. die Kardinalität) einer Gruppe G heisst die *Ordnung* von G und bezeichnen wir mit $|G|$. Generell schreiben wir auch $|X|$ für die Kardinalität einer Menge X.

2. Untergruppen, Nebenklassenzerlegung

DEFINITION 2.1. Eine Teilmenge U einer Gruppe G heisst *Untergruppe* von G (Schreibweise: $U < G$), falls gilt

(U1) $e_G \in U$
(U2) $U \cdot U \subseteq U$
(U3) $U^{-1} \subseteq U$.

Dabei ist $U \cdot U \stackrel{def}{=} \{u_1 u_2 \mid u_1, u_2 \in U\}$ und $U^{-1} \stackrel{def}{=} \{u^{-1} \mid u \in U\}$. Mit der von G induzierten Multiplikation

$$\cdot_U \colon U \times U \to U,\ (x, y) \mapsto x \cdot_G y$$

ist eine Untergruppe selbst eine Gruppe.

BEISPIELE 2.2. (a) Sei G eine Gruppe. Dann sind $\{e\}$ und G Untergruppen.
(b) Sei G eine Gruppe und $g \in G$ Dann ist

$$\langle g \rangle := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

eine Untergruppe von G. Sie heisst due von g erzeugte (zyklische) Untergruppe.
(c) $\mathbb{A}_n$ ist Untergruppe von $\mathbb{S}_n$.
(d) $\mathrm{SL}_n(K) < \mathrm{GL}_n(K)$.

DEFINITION 2.3. Eine Gruppe G heisst *zyklisch*, falls es ein $g \in G$ gibt mit $G = \langle g \rangle$.

Jede zyklische Gruppe ist abelsch. Die Umkehrung gilt nicht.

BEISPIELE 2.4. (a) Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt eine zyklische Gruppe $\langle \sigma \rangle$, bestehend aus $1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}$, der Ordnung n.
(b) Sei $z_n = e^{2\pi i/n}$ betrachtet als Element von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$, wobei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann besteht $U_n = \langle z_n \rangle$ aus den Elementen $1, z_n, {z_n}^2, \dots, {z_n}^{n-1}$. Also $|U_n| = n$.
(c)* Jede endliche Untergruppe von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ der Ordnung n stimmt mit U_n überein, ist also zyklisch.
(d)* Jede endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $K^\times = K \setminus \{0\}$ eines Körpers K ist zyklisch.
(e) $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch (und unendlich).

DEFINITION 2.5. Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Für $g \in G$ heisst

$$gU = \{gu \mid u \in U\}$$

die *Rechtsnebenklasse* von g nach U. Mit G/U bezeichnen wir die Menge aller Rechtsnebenklassen von G nach U. Eine *Linksnebenklasse* ist analog definiert als Ug.

LEMMA 2.6. *Äquivalent sind:*
(a) $gU = hU$
(b) $gU \cap hU \neq \emptyset$
(c) $h^{-1}g \in U$

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) □

SATZ 2.7. *Sei U eine Untergruppe von G Dann ist*

$$G = \coprod_{N \in G/U} N$$

eine disjunkte Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen N, die alle zu U gleichmächtig sind.

Eine analoge Aussage gilt für Linksnebenklassen. Hierbei bezeichne $\coprod$ die disjunkte Vereinigung. Zwei Menge M und N heissen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ gibt. Im Fall endlicher Mengen bedeutet dies, dass die Anzahlen von Elementen von M und von N übereinstimmen.

BEWEIS. Jedes $g \in G$ liegt in einer Nebenklasse, z. B. in gU. Verschiedene Nebenklassen sind nach Lemma 2.6 disjunkt. Dies zeigt den ersten Teil der Aussage. Für $g \in G$ ist die Abbildung

$$h\colon U \to gU,\ u \mapsto gu$$

bijektiv mit Umkehrabbildung $gU \to U$, $y \mapsto g^{-1}y$; daher sind U und gU gleichmächtig. □

FOLGERUNG 2.8 (Satz von Lagrange). *Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe. Dann gilt*

$$|G| = |U| \cdot |G/U|.$$

Insbesondere sind daher die Ordnung $|U|$ von U und der Index $[G : U] \overset{def}{=} |G/U|$ *von G nach U Teiler der Ordnung $|G|$ von G.*

FOLGERUNG 2.9. *Jede Gruppe G von Primzahlordnung p ist zyklisch und hat $\{e\}$ und G als einzige Untergruppen.*

BEWEIS. Ist U eine Untergruppe von G, so ist $|U|$ ein Teiler von p, also $|U| = 1$ oder $|U| = p$. Dies zeigt $U = \{e\}$ oder $U = G$. Wähle nun $e \neq g \in G$. Es folgt $\langle g\rangle \neq \{e\}$, also $\langle g\rangle = G$. □

FOLGERUNG 2.10 ("Kleiner Fermat"). *Ist G eine Gruppe der Ordnung n und $g \in G$, so gilt $g^n = e$.*

BEWEIS. Die von g erzeugte zyklische Untergruppe $U = \langle g\rangle$ hat als Ordnung einen Teiler m von n. Es reicht also folgende Aussage zu zeigen:

In einer zyklischen Gruppe $U = \langle g\rangle$ der Ordnung m gilt $g^m = e$; ferner ist m die kleinste natürliche Zahl ≥ 1 mit $g^m = e$.

Beweis hierfür: Man betrachte die Potenzen g, g^2, $g^3, \ldots$ von g. Da G, also insbesondere $\langle g\rangle$, nur aus endlich vielen Elementen besteht, muss es $j > i \geq 1$ geben mit $g^j = g^i$. Es gilt mit $r := j - i \geq 1$ dann $g^r = g^j(g^i)^{-1} = e$. Sei r die kleinste natürliche Zahl ≥ 1 mit $g^r = e$. — Diese heisst auch die *Ordnung* von g; Schreibweise $r = \mathrm{ord}(g)$. — Dann sind die Elemente

$$e,\ g,\ g^2, \ldots,\ g^{r-1}$$

paarweise verschieden: sonst gilt für $0 \leq j < k \leq r - 1$ $g^j = g^k$, also $g^{k-j} = e$, im Widerspruch zur Wahl von r. Ferner ist $\{e, g, \ldots, g^{r-1}\}$ gegen Multiplikation und Inverse abgeschlossen (beachte $g^r = e$, $g^{-1} = g^{r-1}$), also (leichte Übung) eine Untergruppe von G, die mit $\langle g\rangle$ übereinstimmt. Es folgt $|\langle g\rangle| = r$. □

ÜBUNG 2.11. Sei g ein Element in der Gruppe G mit $\mathrm{ord}(g) = n$. Für jedes $k \geq 1$ gilt $\mathrm{ord}(g^k) = n/\,\mathrm{ggT}(k, n)$.

ÜBUNG 2.12. Seien g, h Elemente in der Gruppe G. Dann gilt $\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{ord}(hg)$.

ÜBUNG 2.13. Seien a, b Elemente in der Gruppe G, die (endliche) Ordnung $\mathrm{ord}(a) = m$ bzw. $\mathrm{ord}(b) = n$ haben. Es gelte außerdem $ab = ba$ und dass m und n teilerfremd sind. Dann hat ab die Ordnung mn.

SATZ UND DEFINITION 2.14. *Sind G und H Gruppen, so ist $G \times H$ vermöge*

$$(g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh')$$

wieder eine Gruppe. $G \times H$ heisst direktes Produkt *von G und H.*

ÜBUNG 2.15. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung ≥ 2 oder unendlich. Dann ist $G \times G$ nie zyklisch.

SATZ 2.16. *Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch.*

BEWEIS. Wesentliches Hilfsmittel ist die Division mit Rest in $\mathbb{Z}$: Seien m, n ganze Zahlen mit $n \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit

$$m = qn + r$$

und mit $0 \leq r < |n|$. (Beweis siehe Vorlesung.) Sei nun $(G, \cdot)$ ein zyklische Gruppe, etwa $G = \langle g \rangle$. Sei U eine Untergruppe von G, wobei wir $U \neq \{e\}$ annehmen. Sei $e \neq u \in U$. Es gibt dann ein $n \neq 0$ mit $u = g^n$. Da mit u auch u^{-1} in U ist, können wir $n > 0$ annehmen, und außerdem, dass $n > 0$ minimal ist mit $g^n \in U$. Wir zeigen $U = \langle u \rangle = \langle g^n \rangle$: Da $g^n = u \in U$ gilt, ist $\langle u \rangle \subseteq U$ klar. Sei $v \in U$ beliebig. Es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $v = g^m$. Division mit Rest ergibt q, r mit $m = qn + r$ mit $0 \leq r < n$. Wegen g^m, $g^n \in U$ gilt auch $g^r = g^{m-qn} = g^m \cdot g^{-qn} \in U$. Wegen $r < n$ und der Minimalität von n folgt $r = 0$, also $v = g^m = g^{qn} = u^n \in \langle u \rangle$. □

Dies Argument mit der Division mit Rest wird uns später auch in anderen Situationen wieder begegnen.

FOLGERUNG 2.17. *Jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch.*

LEMMA 2.18. *Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n < \infty$. Sei d ein Teiler von n ($d > 0$). Dann ist $U = \langle g^{n/d} \rangle$ eine Untergruppe der Ordnung d.*

BEWEIS. Ersichtlich ist d der kleinste Exponent mit

$$(g^{n/d})^d = e.$$

□

Für zyklische Gruppen lässt sich der Satz von Lagrange ($|U| \mid |G|$) also gewissermaßen "umkehren". Allerdings ist dies generell nicht der Fall:

BEISPIEL 2.19. Die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_4$ hat die Ordnung 12, aber keine Untergruppe der Ordnung 6. (Werden wir später sehen.)

3. Homomorphismen und Kern

DEFINITION 3.1. Seien G und H Gruppen. Eine Abbildung $f\colon G \to H$ heisst (Gruppen-) *Homomorphismus* (oder kürzer: *Morphismus*), wenn

$$f(x \cdot_G y) = f(x) \cdot_H f(y)$$

für alle x, $y \in G$ gilt. Ist f zusätzlich bijektiv, so nennen wir f *Isomorphismus*. Zwei Gruppen G und H heissen *isomorph* (Schreibweise: $G \simeq H$), falls es einen Isomorphismus $f\colon G \to H$ gibt.

EIGENSCHAFTEN 3.2. *$f\colon G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt*

(a) $f(e_G) = e_H$
(b) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$
(c) $U < G \Rightarrow f(U) < H$
(d) $V < H \Rightarrow f^{-1}(V) < G$.

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) □

DEFINITION 3.3 (Normalteiler). Eine Untergruppe N von G heisst *Normalteiler*, wenn für jedes $g \in G$

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

gilt. Notation: $N \lhd G$.

Äquivalent sind:

- $gNg^{-1} \subseteq N$ für jedes $g \in G$.
- $gNg^{-1} = N$ für jedes $g \in G$.
- $gN \subseteq Ng$ für jedes $g \in G$.
- $gN = Ng$ für jedes $g \in G$.

PROPOSITION 3.4. *Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist*

$$N = \mathrm{Kern}(f) := \{x \in G \mid f(x) = e_H\} = f^{-1}(\{e_H\})$$

ein Normalteiler in G.

BEISPIELE 3.5. (1) $\det\colon \mathrm{GL}_n(K) \to K^\times$ hat Kern $\mathrm{SL}_n(K)$.
(2) $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{S}_n \to \{\pm 1\}$ hat Kern $\mathbb{A}_n$.
(3) $\exp\colon (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ ist injektiver Gruppenhomomorphismus, also $\mathrm{Kern}(\exp) = \{0\}$.

LEMMA 3.6 (Injektivitätskriterium). *Ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$ ist genau dann injektiv, wenn* $\mathrm{Kern}(f) = \{e_G\}$ *gilt.*

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) □

4. Der Satz von Cayley

SATZ 4.1 (Cayley). *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n. Dann ist G isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_n$.*

BEWEIS. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$\varphi_g\colon G \to G,\ x \mapsto gx$$

eine bijektive Abbildung, somit ein Mitglied der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}(G) = \{f\colon G \to G \mid f \text{ bijektive Abbildung}\}$. Wir zeigen, dass

$$\varphi\colon G \to \mathbb{S}(G),\ g \mapsto \varphi_g$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist:

(a) φ ist Homomorphismus:

$$\varphi_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = \varphi_g \circ \varphi_h(x).$$

(b) φ ist injektiv: Ist $\varphi_g = 1_G$, so folgt

$$x = 1_G(x) = \varphi_g(x) = gx$$

für alle $x \in G$; insbesondere für $x = e$, und $g = e$ folgt.

Wegen $|G| = n$ gilt $\mathbb{S}(G) \simeq \mathbb{S}_n$, und die Behauptung folgt. □

5. Konjugation

Für jedes $g \in G$ ist $h_g\colon G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ ein Automorphismus von G.

DEFINITION 5.1. Elemente x, $y \in G$ heißen *konjugiert*, falls es ein $g \in G$ gibt mit $y = gxg^{-1}$. Wir bezeichnen mit $C(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ die Menge aller zu x konjugierten Elemente. Diese heisst die *Konjugationsklasse* von x.

Ist U eine Untergruppe von G, so ist $h_g(U) = gUg^{-1}$ eine Untergruppe von G, die zu U *konjugiert* heisst. Genau die Normalteiler von G stimmen mit ihren konjugierten Untergruppen überein.

DEFINITION 5.2. $Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg \text{ für alle } g \in G\}$ heisst das *Zentrum* von G.

SATZ 5.3. *$Z(G)$ ist Normalteiler in G.*

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) □

SATZ 5.4. (a) $x \in C(x)$.
(b) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; C(x) = C(y)$.
(c) $|C(x)| = 1 \;\Leftrightarrow\; C(x) = \{x\} \;\Leftrightarrow\; x \in Z(G)$.

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) □

SATZ 5.5 (Klassengleichung). *Ist G eine endliche Gruppe, so gilt*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{|C(x)|>1} |C(x)|.$$

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) □

Sei $Z(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ (der *Zentralisator* von x).

LEMMA 5.6. $|C(x)| = |G|/|Z(x)|$.

BEWEIS. Durch $G/Z(x) \to C(x)$, $gZ(x) \mapsto gxg^{-1}$ ist eine Bijektion gegeben. □

LEMMA 5.7. *Sei G eine Gruppe der Ordnung p^n (p prim, $n \geq 1$). Dann ist das Zentrum $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\} \neq \{e\}$.*

BEWEIS. Nach dem Lemma ist $|C(x)| = |G|/|Z(x)|$ ein Teiler von $|G| = p^n$. Ist $|C(x)| > 1$, so wird $|C(x)|$ also von p geteilt. Es folgt, dass auch $|Z(G)|$ von p geteilt wird. Also ist $Z(G)$ nicht trivial. □

FOLGERUNG 5.8. *Jede Gruppe der Ordnung p^2 (p prim) ist abelsch.*

BEWEIS. Nach Lemma 5.7 sind nur

$$|Z(G)| = \begin{cases} p \\ p^2 \end{cases}$$

möglich. Falls $|Z(G)| = p^2$, so sind wir fertig. Nehme also $|Z(G)| = p$ an. Dann ist G nicht abelsch. Es gibt dann ein $x \in G$, dessen Zentralisator $Z(x)$ echt in G enthalten ist. Es folgt

$$Z(G) \subseteq Z(x) \subsetneq G$$

und damit (Lagrange) $Z(G) = Z(x)$. Aber $x \in Z(x)$ und $x \notin Z(G)$, Widerspruch. □

KAPITEL II

Faktorstrukturen

1. Faktorgruppen

Ist N ein Normalteiler in einer Gruppe G, so gilt $gN = Ng$ für jedes $g \in G$; wir schreiben im folgenden $[g] := Ng$.

SATZ UND DEFINITION 1.1. *Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler in G. Dann bildet*

$$G/N = \{[g] \mid g \in G\}$$

bezüglich der Verknüpfung

$$[x] \cdot [y] \stackrel{def}{=} [xy]$$

eine Gruppe. Dabei ist $[e_G]$ das neutrale Element und $[x^{-1}]$ zu $[x]$ invers.

G/N heißt die Faktorgruppe *von G* nach *N (oder auch Quotient von G nach N.)*

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) Hauptaugenmerk liegt hier darauf zu zeigen, dass die angegebene Verknüpfung wohldefiniert ist; dazu muss man die Normalteilereigenschaft verwenden. □

ZUSATZ 1.2. *Die Abbildung*

$$\nu \colon G \to G/N,\ x \mapsto [x]$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\nu) = N$.

$\nu = \nu_N \colon G \to G/N$ heißt der *natürliche Homomorphismus* (bzgl. N).

BEMERKUNG 1.3. (a) Jeder Kern eines Gruppenhomomorphismus $h \colon G \to H$ ist Normalteiler in G. Umgekehrt ist nach dem vorherigen jeder Normalteiler N in G Kern des natürlichen Homomorphismus

$$\nu_N \colon G \to G/N,\ x \mapsto [x]_N.$$

(b) Für $N = G$ ist $G/N = \{[e]\}$ die einelementige, triviale Gruppe.

(c) Für $N = \{e\}$ ist der natürliche Homomorphismus $\nu \colon G \to G/\{e\}$ surjektiv mit $\mathrm{Kern}(\nu) = \{e\}$, also ein Isomorphismus.

(d) Die allgemeine Situation liegt zwischen den beiden Extremfällen (b) und (c). Durch die Faktorkontruktion wird beim Übergang von G nach G/N durch ν eine "Verkleinerung"von G erreicht, bei der N auf das neutrale Element $[e]$ von G/N und allgemein eine Nebenklasse $Nx \subseteq G$ auf das Element $[x]$ zusammenschrumpft.

HINWEIS 1.4.
- Wenn G eine abelsche Gruppe und U in G eine Untergruppe ist, können wir somit stets die Faktorgruppe G/U bilden.
- Man mache sich klar, wo es mit der Faktorbildung im nicht-abelschen Fall schiefgeht, wenn U nur eine Untergruppe, aber kein Normalteiler von G ist!

SATZ 1.5. *Für jedes natürliche $n \geq 1$ ist*

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot n$$

eine zyklische Faktorgruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ der Ordnung n, die gerade aus den Nebenklassen

$$[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$$

besteht.

BEWEIS. Per Division mit Rest. (Vgl. Vorlesung.) □

Wie sieht *konkret* die Addition auf $\mathbb{Z}_n$ aus? Seien $0 \le x,\, y < n$ und

$$[x] + [y] = [x+y] = \begin{cases} [x+y] & \text{falls } x+y < n, \\ [x+y-n] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir können daher auf $\{0,\, 1, \ldots,\, n-1\}$ eine Addition $+_n$ erklären durch

$$x +_n y = \begin{cases} x+y & \text{falls } x+y < n, \\ x+y-n & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Nimmt man dies als Startpunkt, müßte zunächst die Assoziativität der Verknüpfung gezeigt werden, was relativ aufwändig ist. Die Bildung der Faktorgruppe erledigt dies wesentlich eleganter.

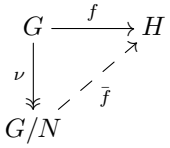
ÜBUNG 1.6. Man zeige (direkt), dass die Verknüpfung in (1.1) assoziativ ist.

ÜBUNG 1.7. Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G vom Index $[G : U] = 2$. Dann ist U ein Normalteiler in G.

2. Der Homomorphiesatz

Das Konzept der Faktorgruppe entfaltet seine volle Wirksamkeit erst im Zusammenwirken mit dem Homomorphiesatz, der besagt, dass – bis auf eine nachfolgende Einbettung – jeder Homomorphismus so aussieht, wie ein natürlicher Homomorphismus $\nu\colon G \to G/N$.

SATZ 2.1 (Homomorphiesatz). *Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und N ein Normalteiler in G mit $N \subseteq \operatorname{Kern}(f)$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar f\colon G/N \to H$ mit $\bar f \circ \nu = f$; es gilt also $\bar f([x]) = f(x)$ für alle $x \in G$, d. h. das folgende Diagramm kommutiert:*



Ferner gilt: $\bar f$ ist injektiv genau dann, wenn $N = \operatorname{Kern}(f)$ gilt.

BEWEIS. Definiere $\bar f([x]) = f(x)$ für alle $x \in G$. (Dies ist die einzige Möglichkeit, wenn die Aussage im Satz richtig sein soll.) Man muss zeigen, dass dies wohldefiniert ist. Seien also $x,\, y \in G$ mit $[x] = [y]$. Dies bedeutet $xy^{-1} \in N \subseteq \operatorname{Kern}(f)$, also folgt $f(x)f(y)^{-1} = f(xy^{-1}) = e_H$, was gleichbedeutend zu $f(x) = f(y)$ ist. — Man rechnet nun leicht nach, dass $\bar f$ ein Gruppenhomomorphismus ist, der das obige Diagramm kommutieren lässt. Ferner gilt dann offenbar $\operatorname{Kern}(\bar f) = \{[x] \mid x \in \operatorname{Kern}(f)\}$, und daher $\operatorname{Kern}(\bar f) = \{[e_G]\}$ genau dann, wenn für alle $x \in G$ gilt: $x \in \operatorname{Kern}(f) \Rightarrow x \in N$. □

FOLGERUNG 2.2. *Ist f surjektiv und $N = \operatorname{Kern}(f)$, so ist $\bar f$ ein Isomorphismus.*

SATZ 2.3. (a) *Jede unendliche zyklische Gruppe G ist isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$.*
(b) *Jede endliche zyklische Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu $\mathbb{Z}_n$.*

BEWEIS. (Siehe Vorlesung.) □

ÜBUNG 2.4. Seien N, K Normalteiler in einer Gruppe G, und sei H eine Untergruppe von G.

(1) (1. Isomorphiesatz) Die kanonische Abbildung $H \to HN/N$, $x \mapsto [x]_N$ induziert einen Isomorphismus $H/H \cap N \simeq HN/N$.
(2) (2. Isomorphiesatz) Gilt $K \subseteq N$, so induziert die kanonische Abbildung $[x]_K \mapsto [x]_N$ einen Isomorphismus $(G/K)/(N/K) \simeq G/N$.

3. Der Satz von Cauchy

Die behandelten Faktorgruppen sind außerordentlich nützlich. Sie ermöglichen z. B. für endliche Gruppen intelligente Induktionsargumente. Wir diskutieren hier als einen solchen Anwendungsfall den Satz von Cauchy.

LEMMA 3.1. *Sei G eine Gruppe der Ordnung p^n (p prim, $n \geq 1$). Dann enthält das Zentrum $Z(G)$ ein Element g der Ordnung p, und $N = \langle g \rangle$ ist ein Normalteiler in G.*

BEWEIS. Nach Lemma I.5.7 ist $Z(G) \neq \{e\}$. Da der Beweis der Aussage sich in $Z(G)$ abspielt, nehmen wir zur Abkürzung der Notation $Z(G) = G$ an, sogar nur: Sei G abelsch mit $p \mid |G|$. Ist G zyklisch, so gibt es nach Lemma I.2.18 ein Element der Ordnung p. Andernfalls, sei $g \in G$ mit $\{1\} \subsetneq \langle g \rangle \subsetneq G$. Dann hat per Induktion wegen $|G| = |\langle g \rangle| \cdot |G/\langle g \rangle|$ nun $\langle g \rangle$ oder $G/\langle g \rangle$ ein Element der Ordnung p. Im ersten Fall ist man fertig. Im zweiten Fall betrachtet man das Urbild eines solchen Elements unter dem kanonischen Homomorphismus $\nu\colon G \to G/\langle g \rangle$ und die davon erzeugte zyklische Untergruppe in G. Deren Ordnung wird von p geteilt, enthält also ein Element der Ordnung p.

Jede Untergruppe in $Z(G)$ ist offenbar ein Normalteiler in G. □

SATZ 3.2 (Cauchy). *Es sei G eine endliche Gruppe, deren Ordnung durch die Primzahl p geteilt wird. Dann enthält G ein Element der Ordnung p.*

BEWEIS. Der Beweis vom vorigen Lemma zeigt die Richtigkeit des Satzes von Cauchy unter der Zusatzvoraussetzung, dass G abelsch ist. Den allgemeinen Fall führt man hierauf zurück: Induktion nach $n = |G|$. Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Sei $n > 1$. Wir nehmen an, dass keine echte Untergruppe U von G mit $p \mid |U|$ existiert (andernfalls sind wir per Induktionsvoraussetzung fertig). Sei $x \in G$ mit $x \notin Z(G)$. Dann ist der Zentralisator $Z(x)$ eine echte Untergruppe von G. Da dessen Ordnung nicht von p geteilt wird, teilt p den Index $[G : Z(x)] = |C(x)|$. Aus der Klassengleichung

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{|C(x)|>1} |C(x)|$$

folgt $p \mid |Z(G)|$. Nach Annahme gilt dann aber $Z(G) = G$, d. h. G ist abelsch. In dem Fall ist uns die Aussage, wie bereits erwähnt, schon bekannt. □

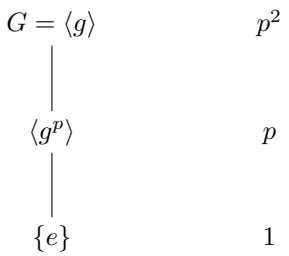
4. Gruppen kleiner Ordnung

Mit Hilfe des Satzes von Cauchy können wir für eine ganze Reihe kleiner Ordnungen sämtliche Gruppen dieser Ordnung bestimmen. Wir wollen bis zur Ordnung 15 sehen, wie weit wir mit unseren jetzigen Fähigkeiten kommen. Sei also G eine endliche Gruppe der Ordnung n.

- $n = 1$ klar.
- $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13$. Hier ist n eine Primzahl. Wir wissen, dass diese Gruppen zyklisch sind, isomorph zu $\mathbb{Z}_n$, und außer $\{e\}$ und G keine weiteren Untergruppen haben. $G = \langle g \rangle$, $g^n = e$. Wir haben also auch den sog. *Untergruppenverband* von G bestimmt (d. h. die Menge aller Untergruppen von G, geordnet mit der Inklusion.)

- $n = 4, 9$. Hier ist $n = p^2$ für eine Primzahl p, daher ist G abelsch (nach Folgerung I.5.8). Elemente $e \neq G$ haben die Ordnung p oder p^2. Nur zwei Fälle sind möglich:

(a) Es gibt ein $g \in G$ der Ordnung $n = p^2$. In diesem Fall ist G zyklisch, $G = \langle g \rangle$, $g^n = e$. Ferner ist der Untergruppenverband linear:

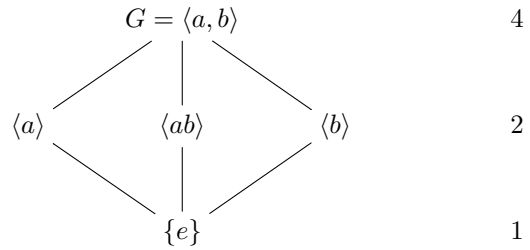


(b) Jedes $e \neq g \in G$ hat die Ordnung p. Jedes solche Element liegt daher in genau einer Untergruppe U der Ordnung p. Abzählen

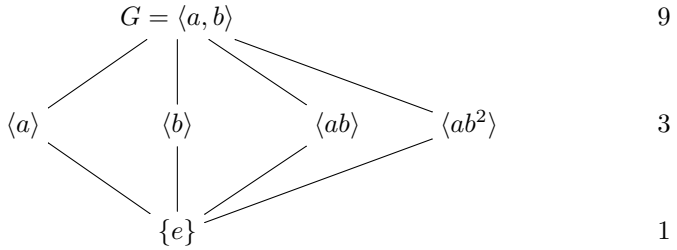
$$|G \setminus \{e\}| = p^2 - 1 = (p+1)(p-1) = (p+1)|U \setminus \{e\}|$$

zeigt, dass G genau $p+1$ Untergruppen der Ordnung p hat und dies alle echten Untergruppen von G sind.

(b1) $n = 4$ ($p = 2$). $G = \langle a, b \rangle$, $a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$. G ist die sog. Kleinsche Vierergruppe, $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{V}_4$. Untergruppenverband:



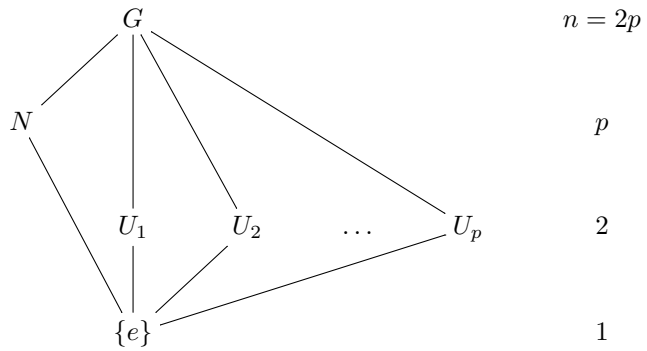
(b2) $n = 9$ ($p = 3$). $G = \langle a, b \rangle$, $a^3 = b^3 = e$, $ab = ba$. G ist isomomorph zu $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Untergruppenverband:



Bemerkung: Mit ähnlicher Argumentation ist jede Gruppe der Ordnung $n = p^2$ entweder zu $\mathbb{Z}_n$ oder zu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ isomorph. Diese Gruppen sind daher sämtlich direkte Produkte von zyklischen Gruppen. Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen sagt, dass die letztgenannte Eigenschaft allgemeiner für alle endlichen abelschen Gruppen gilt.

- $n = 6, 10, 14$. Diese Ordnungen haben die Form $n = 2p$, wobei p eine ungerade Primzahl ist. Der Satz von Cauchy sagt uns, dass es sowohl ein Element g der Ordnung 2 als auch ein Element h der Ordnung p gibt. Folgende Fälle sind möglich (für Details vgl. Vorlesung):
  (a) G hat ein Element der Ordnung $n = 2p$. Dann ist $G \simeq \mathbb{Z}_n$ zyklisch.
  (b) Jedes $e \neq x \in G$ hat entweder die Ordnung 2 oder die Ordnung p. Sei, wie oben, g eines der Ordnung 2, h der Ordnung p. Es hat $N = \langle h \rangle$ als Untergruppe der Ordnung p den Index 2, ist also Normalteiler in G (vgl. Übungen). Man zeigt, dass N die einzige Untergruppe der Ordnung p ist.

Somit haben alle Elemente aus $G \setminus N$ die Ordnung 2, bilden damit (zusammen mit e) p Untergruppen $U_1, \ldots, U_p$ der Ordnung 2. Wir haben den Untergruppenverband ermittelt:



Darstellung durch Erzeugende und Relationen: $N = \langle h \rangle$, $h^p = e$, $U_1 = \langle g \rangle$, $g^2 = e$. Man zeigt nun, dass

$$\varphi \colon N \times U_1 \to G,\ (n, u) \mapsto nu$$

bijektiv ist. Es lässt sich also jedes $x \in G$ eindeutig in der Form

$$x = h^i g^j \quad 0 \leq i \leq p-1,\ 0 \leq j \leq 1$$

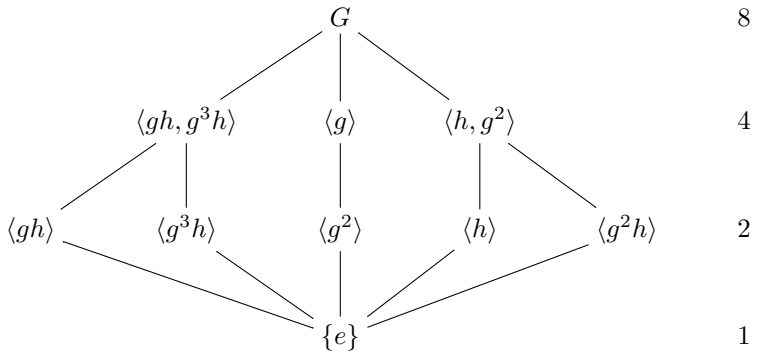
schreiben. Ferner gilt

$$ghg^{-1} = h^i$$

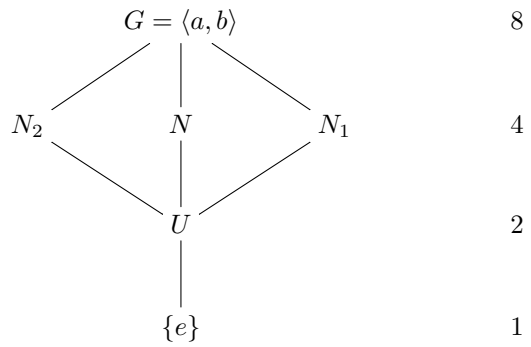
für ein $0 \leq i \leq p-1$. Man sieht aber, dass nur $i = 1$ und $i = p-1$ möglich sind. Im Fall $i = 1$ gilt $gh = hg$, und G ist abelsch, $G \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_{2p}$ (Übung), also zyklisch. Im Fall $i = p-1$ gilt $G = \langle g, h \rangle$ mit Relationen $g^2 = e = h^p$, $ghg^{-1} = h^{p-1}$. Dies liefert die sog. Diedergruppe $\mathbb{D}_p$ (vom Grad p und der Ordnung $2p$).

- $n = 8 = 2^3$. [...] Der interessante Fall ist hier, wenn G eine zyklische Untergruppe N der Ordnung 4 hat; diese ist dann automatisch ein Normalteiler von G. $N = \langle g \rangle$, $g^4 = e$. Es gibt dann zwei Fälle:

  (a) In $G \setminus N$ gibt es ein Element h der Ordnung 2. Es folgt $G = \langle g, h \rangle$ mit $g^4 = e = h^2$, und ferner folgt $hgh^{-1} = g$ (und dann $G \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ abelsch) oder $hgh^{-1} = g^3$, womit es sich um die Diedergruppe $\mathbb{D}_4$ handelt. Der Untergruppenverband sieht wie folgt aus:



(b) In $G \setminus N$ hat jedes Element die Ordnung 4. Hier zeigt man, dass G die Quaternionengruppe ist:



$a^4 = e$, $b^2 = a^2$, $ba = a^{-1}b$. Hier sind alle Untergruppen Normalteiler.

- $n = 12 = 2^2 \cdot 3$. Hier gibt es als abelsche Gruppen

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_{12},\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$$

und drei nichtabelsche
  - $\mathbb{A}_4$ alternierende Gruppe;
  - $\mathbb{D}_6$ Diedergruppe;
  - sog. dizyklische Gruppe ($\langle a, b\rangle$, $a^6 = e$, $b^2 = a^3$, $ba = a^{-1}b$).
- $n = 15 = 3 \cdot 5$. Hier ist jede Gruppe zyklisch, siehe Übungen.

BEMERKUNG 4.1. Sei $n \geq 1$. Die *Diedergruppe* $\mathbb{D}_n$ vom *Grad* n (der Ordnung $2n$; manche Autoren schreiben $\mathbb{D}_{2n}$ statt $\mathbb{D}_n$) ist definiert durch Erzeugende und Relationen,

$$\mathbb{D}_n = \langle r, s\rangle,\ r^n = e = s^2,\ srs^{-1} = r^{n-1}$$

(beachte: $s^{-1} = s$ und $r^{-1} = r^{n-1}$) und kann als Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks angesehen werden: r beschreibt eine Drehung um den Schwerpunkt des n-Ecks um den Winkel $2\pi/n$, und s eine Spiegelung an einer Geraden durch den Schwerpunkt, die Mittelsenkrechte einer Seite ist. [Vgl. den Fall $n = 4$ (Quadrat) in der Vorlesung.]

5. Ringe und Körper

DEFINITION 5.1. *Ring* (mit Eins 1_R). *Kommutativer Ring.* [Siehe Vorlesung.]

BEISPIELE 5.2. (a) $\mathbb{Z}$.
(b) Jeder Körper, insbesondere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.
(c) $\mathrm{End}_K(V)$ für einen K-Vektorraum V.
(d) $\mathrm{M}_n(K)$. Für $n \geq 2$ nicht kommutativ.
$(e)^*$ $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ mit

$$[x] \cdot [y] \stackrel{def}{=} [xy]$$

ist ein kommutativer Ring mit n Elementen.
$(f)^*$ K ein Körper, $K[T]$ der Ring der Polynome über K in der Unbestimmten T.

DEFINITION 5.3. Ein Ring R, für den $R^\times = R \setminus \{0\}$ bzgl. Multiplikation eine Gruppe ist, heißt *Schiefkörper*. Ist R zusätzlich kommutativ, so heißt R ein *Körper*.

BEISPIELE 5.4. (1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sind Körper. Weitere Körper wie

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

und

$$\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

erhält man als Teilkörper von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

(2) Die Ringe $\mathbb{Z}$ und $\mathrm{M}_n(K)$ $(n \geq 2)$ sind keine (Schief-) Körper.
(3) Die Menge

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

bildet bzgl. Matrizenaddition und -multiplikation einen Schief-Körper, den Schiefkörper der (Hamiltonschen) *Quaternionen*. — Für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}.$$

(4)* Ist p eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper mit genau p Elementen.
(5)* Ist K ein endlicher Körper, so ist $|K| = p^n$ eine Primzahlpotenz.
(6)* Sind K und L endliche Körper mit $|K| = |L|$, so sind K und L isomorph.
(7)* Ist K ein Körper, so ist

$$K(T) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in K[T],\ g \neq 0 \right\}$$

(formale Brüche) mit den üblichen Bruchrechenregeln ein Körper, der Körper der rationalen Funktionen über K in der Unbestimmten T. Es ist $K[T] \subset K(T)$ ein Unterring (identifiziere f mit $\frac{f}{1}$).

LEMMA 5.5. *Jeder Schiefkörper K ist* nullteilerfrei*, d. h. $x \cdot y = 0$ impliziert $x = 0$ oder $y = 0$.*

BEWEIS. Ist $xy = 0$ und $x \neq 0$, so folgt

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = 0.$$

□

DEFINITION 5.6. Ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$ heißt *Integritätsring* (oder *Integritätsbereich*), wenn er nullteilerfrei ist.

BEISPIELE 5.7. (1) $\mathbb{Z}$.
(2) Allgemeiner ist (offenbar) jeder Unterring eines Körpers K nullteilerfrei.
(3)* Der Polynomring $K[T]$ ist nullteilerfrei (K ein Körper). (Beweis später.)
(4)* Jeder Integritätsbereich lässt sich in einen Körper einbetten, damit als Unterring eines Körpers auffassen. (Beweis später.)

SATZ 5.8. *Jeder endliche Integritätsring R ist ein Körper.*

BEWEIS. Sei $a \in R$, $a \neq 0$. Die Abbildung

$$\lambda_a \colon R \to R,\ x \mapsto ax$$

ist – da a kein Nullteiler ist – injektiv, und wegen der Endlichkeit von R auch surjektiv. Insbesondere gibt es ein $x \in R$ mit $1 = \lambda_a(x) = ax$. Also ist a invertierbar. □

DEFINITION 5.9. Sei $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement. Sei K ein Körper (oder allgemeiner, ein kommutativer Ring). Dann heisst R eine *K-Algebra*, wenn R bzgl. einer Abbildung

$$K \times R \to R,\ (\alpha, r) \mapsto \alpha \cdot r = \alpha r$$

zusätzlich ein K-Vektorraum (bzw. K-Modul) ist, so dass gilt

$$\alpha(rs) = (\alpha r)s = r(\alpha s) \quad \text{für alle } \alpha \in K,\ r, s \in R.$$

BEISPIELE 5.10. Sei K ein Körper.
(1) $\mathrm{End}_K(V)$, für einen K-Vektorraum V, ist eine K-Algebra.
(2) $\mathrm{M}_n(K)$ ist eine K-Algebra der Dimension n^2.
(3)* $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, stetige reelle Funktionen auf $[0, 1]$, ist eine unendlichdimensionale $\mathbb{R}$-Algebra.
(4)* $K[T]$ ist eine unendlichdimensionale K-Algebra.

SATZ 5.11. *Jede endlichdimensionale nullteilerfreie K-Algebra $R \neq 0$ (K ein Körper) ist ein Schiefkörper.*

BEWEIS. Sei $a \in R$, $a \neq 0$. Die Abbildung

$$\lambda_a \colon R \to R,\ x \mapsto ax$$

ist K-linear und – da a kein Nullteiler ist – injektiv, und wegen der Endlichdimensionalität von R auch surjektiv. Insbesondere gibt es ein $x \in R$ mit $1 = \lambda_a(x) = ax$. Aus denselben Gründen gibt es ein $y \in R$ mit $1 = \lambda_x(y) = xy$. Es folgt

$$a = a \cdot 1 = a(xy) = (ax)y = 1 \cdot y = y,$$

d. h. $ax = 1 = xa$, und damit ist a invertierbar. □

DEFINITION 5.12. Seien R und S Ringe. Eine Abbildung $f \colon R \to S$ heisst (Ring-) *Homomorphismus* (oder kürzer: *Morphismus*), falls

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x,\, y \in R$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{für alle } x,\, y \in R$$
$$f(1_R) = 1_S$$

gilt. (Sind R, S zusätzlich K-Algebren und ist f zusätzlich K-linear, so heisst f ein *Algebrenhomomorphismus*.) Ist f zusätzlich bijektiv, so heisst f ein *Isomorphismus* (von Ringen). Zwei Ringe R und S heissen *isomorph* (Notation: $R \simeq S$), falls es einen Isomorphismus $f \colon R \to S$ gibt.

DEFINITION 5.13. Unterring = Teilring. Teilkörper / Körpererweiterung. Unteralgebra. (Siehe Vorlesung.)

BEISPIELE 5.14. (1) $\mathbb{Z}$ ist Teilring von $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$.

(2) Sei $f \colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist Bild(f) ein Unterring von S.

(3) Sei R ein Ring. Dann ist durch $h \colon \mathbb{Z} \to R$, $n \mapsto n \cdot 1 = \ldots$ ein Ringhomomorphismus. Dessen Bild $\mathbb{Z} \cdot 1$ ist der kleinste Unterring von R. Außerdem wird auf diese Weise R zu einer $\mathbb{Z}$-Algebra.

(4) Ist S ein Unterring von R, so ist die Einbettung $j \colon S \to R$, $x \mapsto x$ ein Ringhomomorphismus.

(5) $A = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Sei $x \in [0,1]$. Dann ist $e_x \colon A \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ ein (surjektiver) Ringhomomorphismus.

ÜBUNG 5.15 (Binomialtheorem). Seien R ein Ring und a, $b \in R$, für die $ab = ba$ gilt. Für jedes $n \geq 0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

ÜBUNG 5.16. Sei $S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sei K die Menge aller $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$, für die $AS = SA$ gilt.

(1) Man zeige, dass K ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis E, S, S^2 ist. (E die Einheitsmatrix; was ist S^3?)

(2) Man zeige, dass das charakteristische Polynom von S keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat.

(3) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{Q}^3$, $x \neq 0$, gilt, dass x, Sx, S^2x linear unabhängig sind. (Dazu verwende man Teil (2) um zu zeigen:

(i) $Sx \notin \langle x \rangle$; (ii) $S^2x \notin \langle x, Sx \rangle$.

Für (ii) ergänze man x, Sx mit einem y zu einer Basis von $\mathbb{Q}^3$ und betrachte die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$, $v \mapsto Sv$ bzgl. *dieser* Basis; was folgt für das charakteristische Polynom von S falls (ii) nicht gilt?)

(4) Man zeige, dass K ein Integritätsring ist.

(Seien A und B Matrizen in K mit $AB = 0$. Man nehme an, $B \neq 0$. Dies führt zu $Ax = 0$ mit einem Vektor $x \in \mathbb{Q}^3$, $x \neq 0$. Man verwende Teil (3), um $A = 0$ zu schliessen.)

(5) Man schließe, dass K ein (kommutativer) Körper ist und $K/\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung vom Grad 3 ist. (Wie wird hierbei $\mathbb{Q}$ als *Teil*körper von K aufgefasst?)

6. Ideale und Faktorringe

SATZ 6.1. *Sei $f\colon R \to S$ ein Homormorphismus von Ringen. Dann hat*

$$I = \mathrm{Kern}(f) = \{r \in R \mid f(r) = 0_s\}$$

folgende Eigenschaften:

(I1) *$(I, +)$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$;*
(I2) *$R \cdot I \subseteq I$ und $I \cdot R \subseteq I$.*

BEWEIS. Klar. □

DEFINITION 6.2. Eine Teilmenge $I \subseteq R$ eines Rings R heisst *Ideal*, falls sie obige Eigenschaften (I1) und (I2) erfüllt. Notation: $I < R$.

LEMMA 6.3. *Sei R ein kommutativer Ring und $a \in R$. Dann ist $I = Ra = \{ra \mid r \in R\}$ ein Ideal in R.*

Ra heißt (das von a erzeugte) *Hauptideal*.

SATZ 6.4. *Im Ring $\mathbb{Z}$ ist jedes Ideal ein Hauptideal.*

BEWEIS. Wir hatten schon gesehen, dass die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ nur zyklische Untergruppen besitzt, allesamt von der Form $\mathbb{Z} \cdot n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Da jede Ideal in $\mathbb{Z}$ insbesondere eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist, folgt sofort die Behauptung. □

DEFINITION 6.5. Ein Integritätsbereich, in welchem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt *Hauptidealring* (oder *-bereich*).

BEISPIELE 6.6. Beispiele für Hauptidealringe:

(1) $\mathbb{Z}$
(2) Jeder Körper.
(3)* Der Polynomring $K[T]$ (K Körper). (Dies wird später gezeigt.)

SATZ 6.7. *Ein kommutativer Ring R ist genau dann ein Körper, wenn er genau zwei Ideale hat.*

BEWEIS. (1) Seien $\{0\}$ und R die einzigen beiden Ideale in R (also insbesondere $R \neq \{0\}$). Sei $a \in R$ mit $a \neq 0$. Dann ist das von a erzeugte Hauptideal Ra ungleich $\{0\}$, also muss $Ra = R$ gelten. Insbesondere gibt es ein $r \in R$ mit $1 = ra$. Es folgt, dass a invertierbar ist.

(2) Sei R ein Körper. Dann sind die Ideale $\{0\}$ und R verschieden. Sei $I \neq \{0\}$ ein Ideal. Es gibt ein $a \in I$ mit $a \neq 0$. Da a invertierbar ist, gilt $1 = a^{-1}a \in Ra \subseteq I$. Ist nun $r \in R$ beliebig, so folgt $r = r \cdot 1 \in I$. Also gilt $I = R$. □

FOLGERUNG 6.8. *Sei $f\colon K \to R$ ein Homomorphismus, wobei K ein Körper ist und R ein Ring mit $1 \neq 0$. Dann ist f injektiv.*

BEWEIS. Wegen $f(1) = 1$ gilt $f \neq 0$. Also $\mathrm{Kern}(f) \neq K$ und somit $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. □

SATZ UND DEFINITION 6.9. *Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann wird die Faktorgruppe R/I von $(R, +)$ nach I zu einem Ring vermöge der Multiplikation*

$$[x] \cdot [y] \stackrel{def}{=} [xy],$$

wobei hier $[x]$ für $x \in R$ die Nebenklasse $x + I \in R/I$ bezeichnet. Es ist $1_{R/I} = [1_R]$. Der Ring R/I heisst der Faktorring *von R* nach *dem Ideal I (oder:* modulo *I).*

BEWEIS. Ähnlich wie im Gruppenfall ist hier der wesentliche Punkt zu zeigen, dass die Multiplikation wohldefiniert ist. Dazu verwendet man die Idealeigenschaft. (Details siehe Vorlesung.) □

SATZ 6.10 (Homomorphiesatz für Ringe). *Seien R und S Ringe, und sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist $I = \operatorname{Kern}(f)$ ein Ideal in R. Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\bar{f}\colon R/I \to S$ mit $\bar{f} \circ \nu = f$, wobei $\nu\colon R \to R/I$, $a \mapsto [a]$ der natürliche surjektive Ringhomomorphismus ist. Ferner ist $\bar{f}$ injektiv.*

BEWEIS. Der Homomorphiesatz für Gruppen liefert einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\bar{f}\colon R/I \to S$, zwischen den additiven abelschen Gruppen $(R/I, +)$ und $(S, +)$, für den $\bar{f} \circ \nu = f$ gilt, und $\bar{f}$ ist injektiv. Es ist nur noch zu zeigen, dass ν und $\bar{f}$ auch *Ring*homomorphismen sind. Dies rechnet man leicht nach. (Siehe Vorlesung für Details.) □

ÜBUNG 6.11. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum über dem Körper K der Dimension $n \geq 1$, sei R der Endomorphismenring $\operatorname{End}_K(V)$ ($\simeq \mathrm{M}_n(K)$). Man zeige, dass R nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und R enthält. (Interessant hierbei ist u. a., dass R für $n \geq 2$ *kein* Schiefkörper ist, nicht einmal nullteilerfrei.)

7. Der Faktorring $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $\mathbb{Z}_n$ der Faktorring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, auch der *Restklassenring modulo n* genannt.

SATZ 7.1. *Für $n \geq 1$ sind äquivalent:*

(1) *$\mathbb{Z}_n$ ist ein Körper.*

(2) *$\mathbb{Z}_n$ ist ein Integritätsbereich.*

(3) *n ist eine Primzahl.*

BEWEIS. (1)⇔(2): Da $\mathbb{Z}_n$ endlich ist, folgt dies aus Satz 5.8 und Lemma 5.5.

(2)⇒(3): Sei n keine Primzahl. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $1 < a$, $b < n$ mit $n = a \cdot b$. Für die Klassen in $\mathbb{Z}_n$ folgt dann $[a] \neq 0$, $[b] \neq 0$, aber $[a] \cdot [b] = [n] = [0]$, also ist $\mathbb{Z}_n$ nicht integer.

(3)⇒(2): Sei $n = p$ eine Primzahl. Wir verwenden folgende Eigenschaft einer Primzahl ("Euklids Lemma"): teilt p ein Produkt ab, so teilt p einen der Faktoren, a oder b. Seien nun $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $[a] \cdot [b] = [0]$. Dann $[ab] = [a][b] = [0]$, also $ab \in \mathbb{Z} \cdot p$. Das bedeutet $p \mid ab$, also teilt p einen der Faktoren, was $[a] = 0$ oder $[b] = 0$ bedeutet. Also ist $\mathbb{Z}_p$ integer. □

ÜBUNG 7.2 (Charakteristik und Primkörper eines Körpers). Sei K ein Körper mit Einselement 1_K. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$n \cdot 1_K := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 1_K \in K & \text{falls } n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^{-n} 1_K \in K & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $p := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1,\ n \cdot 1_K = 0\}$, falls das Minimum existiert; falls nicht, so sei $p := 0$. Man zeige:

(1) Für $n, m \in \mathbb{Z}$ ist $(n \cdot m) \cdot 1_K = (n \cdot 1_K) \cdot (m \cdot 1_K)$.

(2) Es gilt $p = 0$, oder p ist eine Primzahl. (Es heisst $\operatorname{Char}(K) := p$ die Charakteristik von K.)

(3) Es ist $\Pi(K) := \{\frac{n \cdot 1_K}{m \cdot 1_K} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ m \cdot 1_K \neq 0\}$ ein Teilkörper von K.

(4) Es ist $\Pi(K)$ der *kleinste* Teilkörper von K. (Dieser heisst der Primkörper von K.)

(5) Ist $p = 0$, so ist $\Pi(K)$ isomorph zu $\mathbb{Q}$. Ist $p > 0$, so hat $\Pi(K)$ genau p Elemente und ist isomorph zum Körper $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(6) Jeder endliche Körper K besteht aus p^n Elementen für eine Primzahl p und ein $n \geq 1$. Jeder solche enthält einen zu $\mathbb{F}_p$ isomorphen Teilkörper.

KAPITEL III

Gruppenaktionen

1. Grundlegende Eigenschaften und Beispiele

DEFINITION 1.1. Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Unter einer *Aktion* (oder auch: *Operation*) von G auf M verstehen wir eine Abbildung

$$G \times M \to M,\ (g, m) \mapsto g.m,$$

die den folgenden Bedingungen genügt:

(A1) $e.m = m$ für alle $m \in M$;
(A2) $g.(h.m) = (g \cdot h).m$ für alle g, $h \in G$, $m \in M$.

BEISPIELE 1.2. (1) $\mathrm{GL}_n(K)$ operiert auf K^n.
(2) Gruppe G operiert auf sich selbst durch (Links-) Multiplikation.
(3) Gruppe G operiert auf sich selbst durch Konjugation.

DEFINITION 1.3. Sei $G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto g.m$ eine Gruppenaktion und sei $m \in M$.

(a) $B = G.m = \{g.m \mid g \in G\}$ heißt die *G-Bahn* (auch: *Orbit*) von m (unter der Aktion von G).
(b) Mit $M/G = \{G.m \mid m \in M\}$ bezeichnen wir die Menge aller G-Bahnen von M, den sog. *Bahnenraum*.
(c) Die Menge $\mathrm{St}(m) = \mathrm{St}_G(m) = \{g \in G \mid g.m = m\}$ ist eine Untergruppe von G; sie heißt die *Standuntergruppe* (auch: *Isotropiegruppe*) von m.

LEMMA 1.4 (Bahnenlemma). *G operiere auf M. Sei $m \in M$.*

(a) *Die Abbildung*

$$\varphi\colon G/\mathrm{St}(m) \to G.m,\ g \cdot \mathrm{St}(m) \mapsto g.m$$

ist eine Bijektion. Falls G endlich ist, ist also $|G.m| = [G : \mathrm{St}(m)]$ stets ein Teiler von $|G|$.

(b) *Ist $m' = g.m$, so ist*

$$\mathrm{St}(m') = g\,\mathrm{St}(m)g^{-1}.$$

BEWEIS. (Vgl. Vorlesung.) □

SATZ 1.5 (Bahnenzerlegung). (a) *Zwei Bahnen sind gleich oder disjunkt.*
(b) *Es gilt*

$$M = \coprod_{B \in M/G} B.$$

BEWEIS. (Vgl. Vorlesung.) □

BEISPIELE 1.6. (1) Die Gruppe $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ operiert auf der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen durch Multiplikation

$$\mathbb{T} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (t, x) \mapsto tx.$$

Die Bahnen sind Kreise um 0 mit einem Radius $r \geq 0$. Dieses Beispiel verdeutlicht besonders gut die Bahnenzerlegung. Wir sehen hier auch, dass die Bahnen unterschiedliche Mächtigkeiten haben können.

(2) Sei U eine Untergruppe der Gruppe G. Dies liefert die U-Aktion auf G,

$$U \times G \mapsto G,\ (u, g) \mapsto ug.$$

Die Bahnen sind hier die Linksnebenklassen Ug von U, die Standuntergruppen sind trivial. Alle Bahnen haben die gleich Mächtigkeit, da $U \to Ug$, $u \mapsto ug$ bijektiv. Falls G endlich ist liefert die Bahnenzerlegung

$$|G| = |U| \cdot |G/U|,$$

den bekannten Satz von Lagrange.

(3) G operiert auf G durch Konjugation

$$(g, x) \mapsto gxg^{-1}.$$

Die Bahn zu $x \in G$ ist die Konjugationsklassen $C(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$, die gleichmächtig zu $G/N(x)$, wobei $N(x)$ die Standuntergruppe $\{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ ist, also der Zentralisator von x. Die Bahnenzerlegung führt – für endliches G – zur Klassengleichung.

(4) Sei σ eine Permutation von $1, \ldots, n$. Die zyklische Gruppe $G = \langle\sigma\rangle$ operiert auf $\{1, \ldots, n\}$. Die Bahn von i erhalten wir duch Bildung der Sequenz

$$\sigma(i),\ \sigma^2(i), \ldots,\ \sigma^j(i) = i \quad j > 0 \text{ minimal.}$$

Die Zahlen $1, \ldots, n$ werden dadurch in disjunkte Bahnen zerlegt. Dies korrespondiert zur sog. *Zykelzerlegung* von σ. *Jede Permutation zerlegt sich in paarweise disjunkte Zykel.*

2. Die Sylowsätze

Satz 2.1 (1. Sylowscher Satz). *Sei $|G| = p^n \cdot m$ mit p prim, m teilerfremd zu p, und $n \geq 1$. Dann besitzt G mindestens eine Untergruppe P der Ordnung p^n.*

Jede solche Untergruppe heisst *p-Sylowgruppe* von G.

Beweis. Induktion nach $|G|$. Für $|G| = 1$ oder $|G| = p$ ist alles klar. Wir nehmen an, dass für Gruppen einer Ordnung $< |G|$ die Aussage gilt und zeigen sie für G. Sei $Z = Z(G)$ das Zentrum von G. Dann operiert G auf der Komplementmenge $G \setminus Z$ durch Konjugation

$$G \times \big(G \setminus Z\big) \to G \setminus Z,\ (g, x) \mapsto gxg^{-1}.$$

Die Bahnen der Operation sind die Konjugationsklassen $C(g)$ nichtzentraler Elemente g, deren Standuntergruppe $\mathrm{St}(g) = Z(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$ deren Zentralisator von g ist. Für nichtzentrales g gilt $Z(g) \neq G$. Zwei Fälle treten auf:

1. Fall: Es gibt ein $g \in G \setminus Z$, so dass p^n die Ordnung von $Z(g)$ teilt. Wegen $Z(g) \neq G$ lässt sich auf $Z(g)$ die Induktionsvoraussetzung anwenden: Es hat dann $Z(g)$, folglich auch G, eine Untergruppe der Ordnung p^n.

2. Fall: Für kein $g \in G \setminus Z$ ist p^n ein Teiler von $|Z(g)|$. Wegen (Bahnenlemma)

$$p^n \cdot m = |G| = |Z(g)| \cdot |C(g)|$$

muss dann p ein Teiler von $|C(g)|$ sein; dies für jedes $g \in G \setminus Z$. Da

$$G \setminus Z = \coprod_{|C(g)|>1} C(g)$$

(Bahnenzerlegung) ist dann p ein Teiler von $|G \setminus Z| = |G| - |Z|$ und p folglich ein Teiler von Z. Nach dem Satz von Cauchy (nur die kommutative Version benötigt) hat Z eine Untergruppe U der Ordnung p. Wegen $U < Z$ ist U ein Normalteiler in G, also können wir die Faktorgruppe G/U bilden und auf G/U die Induktionsvoraussetzung anwenden. Es gibt also eine Untergruppe $\overline{P}$ von G/U der Ordnung p^{n-1}. Definieren wir – mittels des natürlichen Homomorphismus $\nu\colon G \to G/U$ – die Untergruppe P von G als Urbild $P = \nu^{-1}(\overline{P})$, so folgt

$$P/U = \nu(P) = \overline{P},$$

also $|P| = |U| \cdot |\overline{P}| = p \cdot p^{n-1} = p^n$. □

SATZ 2.2 (2. Sylowscher Satz). *Je zwei p-Sylowgruppen von G sind zueinander konjugiert.*

Insbesondere sind alle p-Sylowgruppen von G zueinander isomorph.

SATZ 2.3 (3. Sylowscher Satz). *Sei $|G| = p^n \cdot m$ mit p prim, m teilerfremd zu p, und $n \geq 1$. Die Anzahl $\alpha(p)$ der p-Sylowgruppen von G ist ein Teiler von m und von der Form $\alpha(p) = 1 + kp$ für ein $k \geq 0$.*

Die Beweise des 2. und des 3. Sylowsatzes folgen mit dem folgenden Lemma.

LEMMA 2.4. *Seien P eine p-Sylowgruppe und U eine p-Untergruppe von G. Gilt $U \subseteq N(P) := \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$, dem sog.* Normalisator *von P, so gilt schon $U \subseteq P$.*

BEWEIS. Aus $U < N(P)$ folgt $UP < N(P)$, und P ist folglich normal in UP. Nach dem 1. Isomorphiesatz (Übung II.2.4) ist $[UP : P] = [U : P \cap U]$, und dies ist einerseits ein Teiler von $|U| = p^\ell$ (aus dem rechten Term), andererseits aber nicht durch p teilbar (aus dem linken Term). Es folgt $[UP : P] = 1$, d. h. $UP = P$, und damit $U \subseteq P$. □

Operiert die Gruppe G auf der Menge M, so ist

$$M^G := \{m \in M \mid g.m = m \text{ für alle } g \in G\}$$

die Menge der *Fixpunkte* dieser Aktion. Fixpunkte sind also gerade die Elemente mit einelementiger G-Bahn bzw. mit ganz G also Standuntergruppe. Die Bahnenzerlegung liefert (falls G, M endlich)

$$|M| = |M^G| + \sum_{|B|>1} |B|, \tag{2.1}$$

wobei über alle G-Bahnen B mit mehr als einem Element summiert wird; ist hierbei G eine p-Gruppe, so folgt aus dem Bahnenlemma $p \mid |B|$ und daher $p \mid |M| \Leftrightarrow p \mid |M^G|$.

BEWEIS VOM 2. UND 3. SYLOWSATZ. (2.) Sei U eine p-Untergruppe von G. Wir zeigen, dass es eine p-Sylowgruppe P und $g \in G$ gibt mit $U \subseteq gPg^{-1}$. Daraus folgt dann insbesondere der 2. Sylowsatz. Sei P eine beliebige p-Sylowgruppe von G. Eine solche existiert nach dem 1. Sylowsatz. Sei $M = \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$ die Menge aller zu P konjugierten (Sylow-) Gruppen. Auf dieser Menge operiert G durch Konjugation mit einer Bahn, trivialerweise. Hier gilt $\mathrm{St}_G(P) = \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\} = N(P)$, und wegen $P < N(P)$ ist $|M| = |G.P| = [G : N(P)]$ (Bahnenlemma) ein Teiler von $[G : P] = m$, wird also nicht von p geteilt.

Die Untergruppe U operiert ebenfalls durch Konjugation auf M. Aus der Formel (2.1) (für U anstatt G) schließen wir, dass $M^U \neq \emptyset$ gilt. Sei $Q \in M$ ein Fixpunkt. Also $uQu^{-1} = Q$ für alle $u \in U$. Dies bedeutet $U \subseteq N(Q)$. Aus dem Lemma folgt $U \subseteq Q$. Wegen $Q \in M$ gibt es $g \in G$ mit $Q = gPg^{-1}$.

(3.) Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller p-Sylowgruppen von G. Darauf operiert G durch Konjugation. Nach dem 2. Sylowschen Satz haben wir eine einzige G-Bahn und $\mathscr{S} = M$ wie oben. Nach dem vorherigen Beweisteil ist $\alpha(p) = [G : N(P)]$ ein Teiler von m.

Es operiert auch die Gruppe P auf $\mathscr{S}$ durch Konjugation. Sei $Q \in \mathscr{S}$ ein Element der Fixpunktmenge $\mathscr{S}^P$. Aus dem vorherigen Beweisteil (mit $U = P$) folgt $P \subseteq Q$, und wegen Anzahlsgleichheit sogar $P = Q$. Es ist also P der einzige Fixpunkt dieser P-Aktion. Aus der zu (2.1) analogen Formel ergibt sich $\alpha(p) = |\mathscr{S}| = 1 + kp$ für ein $k \geq 0$. □

3. Eine Anwendung: Gruppen der Ordnung 15 sind zyklisch

Sei G eine Gruppe der Ordnung $15 = 3 \cdot 5$. Für die Anzahlen $\alpha(3)$ bzw. $\alpha(5)$ der 3- bzw. 5-Sylowgruppen gilt nach dem dritten Sylowschen Satz $\alpha(3) \mid 5$, $\alpha(5) \mid 3$, und zusätzlich $\alpha(3) = 1 + \ell 3$ sowie $\alpha(5) = 1 + k5$ für ℓ, $k \geq 0$. Also ist nur $\alpha(3) = 1 = \alpha(5)$ möglich. Das heisst, es gibt genau eine Untergruppe U der Ordnung 3 und genau eine Untergruppe V der Ordnung 5. Jedes Element in $G \setminus (U \cup V)$ hat die Ordnung 15, d. h. erzeugt G.

Allgemeiner:

Satz 3.1. *Seien $p < q$ Primzahlen mit $p \nmid (q-1)$. Dann ist jede Gruppe der Ordnung $n = pq$ zyklisch, d. h. isomorph zu $\mathbb{Z}_{pq}$.*

Beweis. Es gilt $\alpha(q) \in \{1, p\}$ sowie $\alpha(q) = 1 + \ell q$ für ein $\ell \geq 0$. Wegen $p < q$ kann nur $\alpha(q) = 1$ gelten. Weiter gilt $\alpha(p) \in \{1, q\}$ und $\alpha(p) = 1 + kp$ für ein $k \geq 0$. Wäre $\alpha(p) = q$, so folgte $kp = (q-1)$, Widerspruch zu der Annahme, dass $p \nmid (q-1)$ gilt. Also gibt es genau eine p- und genau eine q-Sylowgruppe von G. Jedes Element außerhalb dieser hat die Ordnung pq. Davon gibt es $pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1) \geq q - 1 \geq 4$ viele. □

4. Die Anzahl der Bahnen

Die Gruppe G operiere auf der Menge M. Für $g \in G$ sei $\operatorname{Fix}(g) = \{m \in M \mid g.m = m\}$ die Menge aller *Fixpunkte* von g in M. (Es ist also $M^G = \bigcap_{g \in G} \operatorname{Fix}(g)$.)

Satz 4.1 (Fixpunktformel). *Die endliche Gruppe G operiere auf der endlichen Menge M.*

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|.$$

In Worten: Die Anzahl der Bahnen ist gleich dem Mittelwert der Anzahl der Fixpunkte.

Beweis. Sei

$$F = \{(g, m) \mid g \in G,\ m \in M,\ g.m = m\}.$$

Es gilt

$$F = \coprod_{g \in G} \{g\} \times \operatorname{Fix}(g) = \coprod_{m \in M} \operatorname{St}(m) \times \{m\},$$

also

$$|F| = \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)| = \sum_{m \in M} |\operatorname{St}(m)|.$$

Seien $B_1, \ldots, B_r$ die verschiedenen Bahnen, $r = |M/G|$. Für alle Punkte einer Bahn B_i sind die Standuntergruppen konjugiert, haben also dieselbe Elementanzahl. Es folgt

$$|F| = \sum_{m \in M} |\operatorname{St}(m)| = \sum_{i=1}^{r} |B_i| \cdot |\operatorname{St}(m_i)| = r \cdot |G|$$

mit $m_i \in B_i$. Setzt man alles zusammen, folgt die Behauptung. □

Beispiel 4.2. Die symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n$ operiert auf $\{1, \ldots, n\}$ mit nur einer Bahn. Folglich ist

$$1 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} |\operatorname{Fix}(\sigma)|.$$

Daher hat eine Permutation "im Durchschnitt" einen Fixpunkt.

5. Einfache Gruppen

DEFINITION 5.1. Eine Gruppe G heisst *einfach*, wenn $G \neq \{e\}$ gilt, und wenn G und $\{e\}$ die einzigen Normalteiler von G sind.

SATZ 5.2. *Eine endliche abelsche Gruppe ist einfach genau dann, wenn sie von Primzahlordnung ist.* □

Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen von Lagrange bzw. Cauchy. Wir konzentrieren uns bei der Untersuchung einfacher Gruppen daher auf den nicht-abelschen Fall.

SATZ 5.3. *Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung p^2 bzw. pq (p, q prim).*

BEWEIS. (a) Jede Gruppe der Ordnung p^2 ist abelsch. Eine abelsche Gruppe ist aber nur einfach, wenn $|G|$ ein Primzahl ist.

(b) Sei G von der Ordnung pq mit $p < q$ prim. Wir hatten weiter oben gesehen, dass $\alpha(q) = 1$ gilt; das bedeutet, dass es genau einer q-Sylowgruppe U von G gibt. Da alle konjugierten eine q-Sylowgruppe wieder eine q-Sylowgruppe ist, folgt, dass U ein Normalteiler ist. Also ist G nicht einfach. □

Als wichtiges Argument halten wir fest (die Umkehrung folgt aus dem zweiten Sylowschen Satz):

LEMMA 5.4. *Sei P eine p-Sylowgruppe der endlichen Gruppe G. Dann gilt*

$$P \text{ ist Normalteiler } \Leftrightarrow \quad \alpha(p) = 1.$$

Der Fall pq im obigen Resultat kann verallgemeinert werden:

SATZ 5.5. *Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung ap (p prim, $1 < a < p$).*

BEWEIS. Die Teiler von $|G|$ sind

$$\{\text{Teiler von } a\} \cup \{\text{Teiler von } a\} \cdot p.$$

Davon ist nur 1 kongruent 1 modulo p, also $\alpha(p) = 1$. Somit ist *die* p-Sylowgruppe Normalteiler. □

Die Gruppe G operiere auf der Menge M. Wir sagen, dass diese Operation *transitiv* ist, wenn es genau eine G-Bahn von M gibt: $M = G.m$ (für ein, und damit alle, $m \in M$). Anders formuliert: Zu m, $m' \in M$ gibt es stets $g \in G$ mit $m' = g.m$.

SATZ 5.6 (Poincaré). *Sei G eine nicht-abelsche einfache Gruppe, die transitiv auf einer endlichen Menge M operiert, mit $n = |M| \geq 2$. Dann ist G isomorph zu einer Untergruppe der alternierenden Gruppe $\mathbb{A}_n$.*

BEWEIS. Für jedes $g \in G$ bezeichne

$$g_M \colon M \to M,\ m \mapsto g.m$$

die Operation von g auf M. Wie im Beweis vom Satz von Cayley folgt, dass

$$\varphi \colon G \to \mathbb{S}(M),\ g \mapsto g_M$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Da $|M| \geq 2$ und G transitiv operiert, ist φ nicht trivial (d. h. $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq G$). Da G einfach ist, folgt $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{e\}$, also ist φ injektiv. Wegen $|M| = n$ können wir $\mathbb{S}(M)$ mit $\mathbb{S}_n$ identifizieren und erhalten somit eine Einbettung

$$\varphi \colon G \to \mathbb{S}_n.$$

Verkettung mit der Signatur $\mathrm{sgn} \colon \mathbb{S}_n \to \mathbb{Z}_2$ ergibt einen Homomorphismus $\mathrm{sgn} \circ \varphi \colon G \to \mathbb{Z}_2$, der wegen der Voraussetzung an G nicht surjektiv sein kann (andernfalls hätte G eine Untergruppe vom Index 2, die dann ein Normalteiler wäre). Also ist $\mathrm{sgn} \circ \varphi$ der triviale Homomorphismus und

$$G \simeq \varphi(G) < \mathbb{A}_n.$$

□

FOLGERUNG 5.7. *Sei $n \geq 2$. Sei G eine nicht-abelsche einfache Gruppe. Es gelte eine der drei Bedingungen:*

(i) *G hat eine Untergruppe U vom Index n; oder*
(ii) *G hat eine n-elementige Konjugationsklasse $C(g)$; oder*
(iii) *es gibt einen Primteiler p von $|G|$ mit $\alpha(p) = n$.*

Dann ist G zu einer Untergruppe von $\mathbb{A}_n$ isomorph.

BEWEIS. G operiert transitiv auf

(i) $G/U = \{gU \mid g \in G\}$ via Linksmultiplikation; bzw.
(ii) $C(g)$ via Konjugation; bzw.
(iii) der Menge der p-Sylowgruppen von G via Konjugation.

In jedem der drei Fälle folgt die Behauptung nun aus dem Satz von Poincaré. □

SATZ 5.8. *Es gibt keine nicht-abelsche einfache Gruppe G mit $1 \leq |G| < 60$.*

BEWEIS. Wir können Primzahlpotenzen nach Lemma I.5.7 sowie Ordnungen ap (p prim, $1 < a < p$) ausschließen. Bleiben die Ordnungen

$$12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 40,\ 45,\ 48,\ 50,\ 54,\ 56.$$

(a) 18, 50, 54 haben die Form $2 \cdot p^k$ ($2 \neq p$ prim). Die p-Sylowgruppe hat Index 2, ist also Normalteiler.

(b) 12, 24, 48 haben die Form $3 \cdot p^k$ ($p = 2$ prim). Die p-Sylowgruppe hat Index 3, Widerspruch zu Poincaré (Folgerung 5.7).

(c) 40, 45 haben die Form $5 \cdot p^k$ (p prim). Die p-Sylowgruppe hat daher den Index 5. Somit ist G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{A}_5$, aber $|G| \nmid 60$, Widerspruch.

(d) 36. Hier hat eine 3-Sylowgruppe Index 4, also $G < \mathbb{A}_4$, Widerspruch.

(e) 30. Übung.

(f) 56. Übung. □

SATZ 5.9. *Jede einfache Gruppe der Ordnung 60 ist isomorph zur alternierenden Gruppe $\mathbb{A}_5$.*

BEWEIS. Sei G einfach mit $|G| = 60$. Da 60 keine Primzahl ist, ist G nicht abelsch. Da $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ folgt $\alpha(5) \in \{1, 6\}$. Wegen der Einfachheit von G scheidet $\alpha(5) = 1$ aus, somit gilt $\alpha(5) = 6$. Ferner ist $\alpha(2) \in \{3, 5, 15\}$ und $\alpha(3) \in \{4, 10\}$. Wegen des Satzes von Poincaré sind nur $\alpha(2) = 15$ und $\alpha(3) = 10$ von Interesse. (Im Falle $\alpha(2) = 5$ wäre $G < \mathbb{A}_5$, also $G \simeq \mathbb{A}_5$; im dem Fall wären wir also fertig. Der Fall $\alpha(3) = 4$ ist nicht möglich, da nach Poincaré $G < \mathbb{A}_4$ folgen würde.) Also:

$$\alpha(2) = 15,\ \alpha(3) = 10,\ \alpha(5) = 6.$$

Wir zeigen nun, dass G eine Untergruppe vom Index 5 besitzt. Dazu untersuchen wir die 15 2-Sylowgruppen von G, die je 4 Elemente haben. Falls je zwei verschiedene 2-Sylowgruppen $U \neq V$ einen trivialen Durchschnitt haben, folgt

$$|G| \geq 1 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 90,$$

Widerspruch. Also gibt es zwei 2-Sylowgruppen $U \neq V$ mit $e \neq x \in U \cap V$. Als Untergruppen der Ordnung 4 sind U und V abelsch, somit umfasst der Zentralisator $Z(x)$ sowohl U als auch V, $[G : Z(x)]$ ist daher ein echter Teiler von $[G : U] = 3 \cdot 5$. Wegen des Satzes von Poincaré ist $[G : Z(x)] = 3$ nicht möglich. $[G : Z(x)] = 1$ ist ebenfalls nicht möglich, da dies sonst $e \neq x \in Z(G)$ impliziert und $Z(G)$ dann ein nichttrivialer Normalteiler von G wäre.

Also ist $[G : Z(x)] = 5$, und nach dem Satz von Poincaré G dann isomorph zu $\mathbb{A}_5$. □

6. Einfachheit der alternierenden Gruppe $\mathbb{A}_5$

LEMMA 6.1. (a) *Für $n \geq 3$ wird $\mathbb{A}_n$ von 3-Zykeln erzeugt.*
(b) *(Cauchy) Für $n \geq 5$ sind je zwei 3-Zykeln in $\mathbb{A}_n$ zueinander konjugiert.*

BEWEIS. In den Übungen. □

SATZ 6.2 (Jordan). *Für $n \geq 5$ ist die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_n$ einfach.*

BEWEIS. Sei $N \neq \{e\}$ ein Normalteiler in $\mathbb{A}_n$. Wir zeigen, dass N einen 3-Zykel enthält. Aus Lemma 6.1 folgt dann $N = \mathbb{A}_n$.

Sei $1 \neq \sigma \in N$. Es gibt eine Darstellung

$$\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$$

von σ in disjunkte Zykeln (vgl. Bahnenzerlegung). Da disjunkte Zykeln miteinander kommutieren, können wir sie der Länge nach ordnen, also ohne Einschränkung gelte $\ell(\sigma_1) \geq \ell(\sigma_2) \geq \ldots \geq \ell(\sigma_r) \geq 2$, wobei $\ell(\sigma_i) = \ell_i$, wenn σ_i ein ℓ_i-Zykel ist.

1. Fall: $\ell_1 \geq 4$. Sei etwa $\sigma_1 = (a\ b\ c\ d \ldots)$. Mit $\tau = (a\ b\ c) \in \mathbb{A}_n$ gilt

$$(a\ d\ b) = (b\ c\ d)(c\ b\ a) = (\sigma\tau\sigma^{-1})\tau^{-1} = \sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) \in N.$$

2. Fall: $\ell_1 = 3$. Im Falle $\sigma = \sigma_1$ ist die Behauptung richtig. Sei also $r \geq 2$, seien $\sigma_1 = (a\ b\ c)$ und $\sigma_2 = (d\ e\ f)$ oder $\sigma_2 = (d\ e)$. Mit $\tau = (a\ b\ d) \in \mathbb{A}_n$ folgt

$$(a\ d\ c\ e\ b) = (b\ c\ e)(d\ b\ a) = (\sigma\tau\sigma^{-1})\tau^{-1} = \sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) \in N.$$

Nimmt man $(a\ d\ c\ e\ b)$ statt σ, so können wir den 1. Fall (mit $\sigma = \sigma_1$) anwenden.

3. Fall: $\ell_1 = 2$. Dann sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ disjunkte Transpositionen, und $r \geq 2$, etwa $\sigma_1 = (a\ b)$, $\sigma_2 = (c\ d)$. Sei $e \neq a, b, c, d$ (möglich wegen $n \geq 5$). Für $\tau = (a\ c\ e) \in \mathbb{A}_n$ folgt

$$(b\ d\ \sigma(e))(e\ c\ a) = (\sigma\tau\sigma^{-1})\tau^{-1} = \sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) \in N.$$

Gilt dabei $\sigma(e) = e$, so ist dies Element $(a\ b\ d\ e\ c)$, und wir können den 1. Fall anwenden. Gilt $\sigma(e) \neq e$, so sind $(b\ d\ \sigma(e))$ und $(e\ c\ a)$ disjunkt (denn $\sigma(e) \neq \sigma(d) = c$ und $\sigma(e) \neq \sigma(b) = a$). Nimmt man daher $(b\ d\ \sigma(e))(e\ c\ a)$ statt σ, so folgt die Behauptung aus dem 2. Fall. □

7. Weitere Ergebnisse über einfache Gruppen

SATZ 7.1. *Es gibt keine nicht-abelsche einfache Gruppe G mit $60 < |G| < 168$.*

BEWEIS. (Skizze.) Mit ähnlichen Argumenten (Sylow & Poincaré) kann man fast alle Ordnungen n zwischen 60 und 168 abarbeiten. In der überwiegenden Majorität der Fälle liefern bereits die Sylowsätze einen Primteiler p von $|G|$ mit $\alpha(p) = 1$. Es bleiben dann noch die Ordnungen

$$72,\ 80,\ 90,\ 96,\ 105,\ 108,\ 112,\ 120,\ 132,\ 144,\ 150,\ 160$$

zu behandeln. Eine hypothetische einfache Gruppe hat für die Fälle

$$72,\ 80,\ 96,\ 108,\ 160$$

eine Untergruppe vom Index 3, 4 oder 5 per Sylow (im Falle $n = 72$ ist $\alpha(3) = 4$, dann $G < \mathbb{A}_4$). Es bleiben etwas hartnäckigere Fälle

$$90,\ 105,\ 112,\ 120,\ 132,\ 144,\ 150$$

zu behandeln.

(a) 90, 120, 150 haben $\alpha(5) = 6$, liefern also eine Einbettung $G < \mathbb{A}_6$ mit zugehörigem Index 4, 3 bzw. 360/150. Die letzte Möglichkeit ist absurd, aber auch Index 4 bzw. 3 treten für Untergruppen der $\mathbb{A}_6$ nicht auf, da sie einfach ist (verwende Poincaré).

(b) 105 (Übung!) $= 3 \cdot 5 \cdot 7$. Bei angenommener Einfachheit liefern die Sylowsätze $\alpha(5) = 21$, $\alpha(7) = 15$, und dann $|G| \geq 21 \cdot 4 + 15 \cdot 6$, Widerspruch.

(c) 132 (Übung!) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ ähnlich: $\alpha(2) \geq 11$, $\alpha(3) = 22$, $\alpha(11) = 12$.

(d) Es bleiben also $112 = 2^4 \cdot 7$ und $144 = 2^4 \cdot 3^2$ als besonders hartnäckige Überlebenskünstler übrig. Mit einer Variante des Beweises von Satz 5.9 erhält man (bei angenommener Einfachheit) in diesen Fällen jeweils eine Untergruppe vom Index ≤ 4, im Widerspruch zum Satz von Poincaré. □

BEMERKUNG 7.2. (1) Die $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ ist einfach von der Ordnung 168.

(2) Bis zur Ordnung 1000 sind die Ordnungen 360, 504 und 660 die einzigen weiteren, zu denen nicht-abelsche einfache Gruppen existieren.

(3) Es gilt der $p^\alpha q^\beta$-Satz von Burnside: *Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ (p, q prim, α, $\beta \geq 1$).*

Die endlichen einfachen Gruppen bilden die kleinsten Bausteine der endlichen Gruppen in folgendem Sinn:

SATZ 7.3. *Jede endliche Gruppe G besitzt eine* Kompositionsreihe. *Das heisst, es gibt eine Kette*

$$\{e\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_r = G$$

von Untergruppen, wobei für jedes $i = 1, \ldots, r$ gilt:

(1) *die Untergruppe U_{i-1} ist ein Normalteiler von U_i; und*
(2) *die Faktorgruppe U_i/U_{i-1} ist einfach.*

Die Einfachheit von U_i/U_{i-1} kann man nämlich so ausdrücken, dass U_{i-1} ein *maximaler* Normalteiler in U_i ist. Ist G nun eine endliche Gruppe, so sind sicherlich $\{e\}$ und G Normalteiler in G. Ist dabei $G/\{e\} \simeq G$ nicht einfach, so gibt es einen Normalteiler N zwischen $\{e\}$ und G, und wegen der Endlichkeit von G kann man dann auch einen solchen finden, so dass zwischen N und G kein weiterer Normalteiler von G liegt. Es ist dann der Faktor G/N einfach. Nun setzt man das Verfahren für N fort (Induktion). □

BEMERKUNG 7.4. Es gilt sogar der Satz von Jordan-Hölder, der besagt, dass in einer Kompositionsreihe die einfachen Faktoren bis auf Permutation und Isomorphie eindeutig durch G bestimmt sind.

8. Auflösbare Gruppen

DEFINITION 8.1. Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, falls es eine Kette von Untergruppen $\{e\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n = G$ gibt, so dass für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt:

(1) U_{i-1} ist ein Normalteiler in U_i; und
(2) die Faktorgruppe U_i/U_{i-1} ist abelsch.

LEMMA 8.2. (1) *Jede Untergruppe H einer auflösbaren Gruppe G ist auflösbar.*

(2) *Seien $\pi\colon G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Ist G auflösbar, so ist auch H auflösbar. (Faktorgruppen auflösbarer Gruppen modulo einem Normalteiler sind auflösbar.)*

(3) *Sei N ein Normalteiler in der Gruppe G. Sind N und G/N auflösbar, so ist dies auch G.*

BEWEIS. (1) Sei $\{e\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n = G$ eine Kette von Untergruppen mit U_{i-1} ist ein Normalteiler in U_i, und die Faktorgruppe U_i/U_{i-1} ist abelsch ($i = 1, \ldots, n$). Sei $V_i \overset{def}{=} U_i \cap H$. Dann ist offenbar V_{i-1} Normalteiler in V_i, und es ist

$$\frac{V_i}{V_{i-1}} = \frac{U_i \cap H}{U_{i-1} \cap H} = \frac{U_i \cap H}{U_{i-1} \cap (U_i \cap H)} \simeq \frac{U_{i-1}(U_i \cap H)}{U_{i-1}} \subseteq \frac{U_i}{U_{i-1}}$$

als Untergruppe einer abelschen Gruppe abelsch.

(2) Sei $\{e\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n = G$ eine Kette von Untergruppen mit U_{i-1} ist ein Normalteiler in U_i, und die Faktorgruppe U_i/U_{i-1} ist abelsch $(i = 1, \ldots, n)$. Es ist dann $\{e\} = \pi(U_0) \subseteq \pi(U_1) \subseteq \pi(U_2) \subseteq \ldots \subseteq \pi(U_{n-1}) \subseteq \pi(U_n) = H$ eine Kette von Untergruppen. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sei $h \in \pi(U_i)$. Es gibt ein $g \in U_i$ mit $\pi(g) = h$. Es folgt $h\pi(U_{i-1})h^{-1} = \pi(gU_{i-1}g^{-1}) = \pi(U_{i-1})$, also ist $\pi(U_{i-1})$ ein Normalteiler von $\pi(U_i)$. Ferner ist offenbar $\pi(U_i)/\pi(U_{i-1}) = \pi(U_i/U_{i-1})$ abelsch.

(3) Seien $N/N = U_0/N \subseteq U_1/N \subseteq U_2/N \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1}/N \subseteq U_n/N = G/N$ und $\{e\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = N$ Ketten von Untergruppen, jeweils Normalteiler in der nächst größeren, mit abelschen Faktoren. Setzt man diese Ketten zusammen, so erhält man

$$\{e\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = N = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n = G,$$

wobei die Faktoren V_i/V_{i-1} und

$$\frac{U_i}{U_{i-1}} \simeq \frac{U_i/N}{U_{i-1}/N}$$

abelsch sind. □

Beispiele 8.3. (1) Jede abelsche Gruppe ist auflösbar.

(2) Jede endliche p-Gruppe ist auflösbar. (Übung.)

(3) Jede nicht-abelsche, einfache Gruppe ist nicht auflösbar.

(4) Satz von Feit-Thompson[1]: *Jede Gruppe ungerader Ordnung ist auflösbar.* Insbesondere hat jede nicht-abelsche einfache Gruppe gerade Ordnung. (Sehr langer und aufwendiger Beweis.)

Folgerung 8.4. *Für $n \geq 5$ ist die symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n$ nicht auflösbar.*

Beweis. Mit $\mathbb{S}_n$ wäre auch die Untergruppe $\mathbb{A}_n$ auflösbar. Für $n \geq 5$ ist $\mathbb{A}_n$ aber einfach und nicht abelsch, also nicht auflösbar. □

Lemma 8.5. *Sei G eine endliche, auflösbare Gruppe. Dann gibt es eine Kette von Untergruppen $\{e\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n = G$ mit U_{i-1} ist ein Normalteiler in U_i, und die Faktorgruppe U_i/U_{i-1} ist zyklisch von Primzahlordnung $(i = 1, \ldots, n)$.*

Beweis. (In den Übungen.) □

[1] Walter Feit, John G. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. 13 (1963), 775-1029.

KAPITEL IV

Polynome

1. Euklidische Ringe

In diesem Abschnitt werden wir nur *kommutative* Ringe R betrachten, d. h. es gilt stets $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in R$.

DEFINITION 1.1. Ein Integritätsbereich R zusammen mit einer *Größenfunktion* $\sigma\colon R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}_0$ heißt *euklidischer Ring*, wenn folgendes gilt: Zu allen Elementen $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit $a = qb + r$, mit $r = 0$ oder $\sigma(r) < \sigma(b)$.

BEISPIEL 1.2. $\mathbb{Z}$ ist ein euklidischer Ring mit Größenfunktion $\sigma = |-|$.

SATZ 1.3. *Jeder euklidische Ring R ist ein Hauptidealring.*

BEWEIS. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Ist $I = \{0\}$, so wird I von 0 erzeugt. Sei $I \neq \{0\}$. Wähle $a \in I$ mit $\sigma(a)$ minimal. Es gilt $Ra \subseteq I$. Sei umgekehrt $b \in I$. Dann gibt es $q, r \in R$ mit $b = qa + r$, wobei $r = 0$ oder $\sigma(r) < \sigma(a)$ gilt. Weil auch $r = b - qa \in I$ gilt, muss $r = 0$, gelten, also $b = qa \in Ra$. □

2. Teilbarkeit und Faktorisierung

DEFINITION 2.1. Sei R ein Integritätsbereich.

(0) Seien $a, b \in R$. Wir sagen, dass a ein *Teiler* von b ist (oder a *teilt* b; a ist ein *Faktor* von b; b ist ein *Vielfaches* von a (Schreibweise: $a \mid b$), falls $b \in Ra$ gilt, falls es also ein $r \in R$ gibt mit $b = ra$.

(1) Ein $r \in R$ heißt *Einheit* (oder *invertierbar*), falls es ein $s \in R$ gibt mit $rs = 1$ $(= sr)$. Die Einheiten in R bilden eine (abelsche) Gruppe $E(R)$.

(2) Ein $u \in R$ heißt *irreduzibel*, falls $u \neq 0$ keine Einheit ist, und falls aus $u = ab$ folgt, dass a oder b eine Einheit ist.

(3) Ein $p \in R$ heißt *prim* (oder *Primelement*), falls $p \neq 0$ keine Einheit ist, und falls aus $ab \in Rp$ folgt, dass $a \in Rp$ oder $b \in Rp$ gilt. (Also: $p \mid ab \;\Rightarrow\; p \mid a$ oder $p \mid b$.)

(4) Gilt $Ra = Rb$, so heißen a und b *assoziiert* ($a \sim b$). Äquivalent dazu: Es gibt eine Einheit u mit $a = ub$.

LEMMA 2.2. *Jedes Primelement p in einem Integritätsbereich ist irreduzibel.*

BEWEIS. Es gelte $p = ab$. Dann $ab \in Rp$. Es folgt etwa, dass $a \in Rp$ gilt, $a = rp$. Dann $p = rpb$, also $p(1 - rb) = 0$, und es folgt $1 - rb = 0$ bzw. $1 = rb$. Also ist b eine Einheit. □

DEFINITION 2.3. Ein Integritätsbereich R heißt *faktoriell*, falls jede Nichteinheit $r \neq 0$ ein Produkt von Primelementen ist, $r = p_1 p_2 \dots p_r$ (p_i prim, $r \geq 1$).

LEMMA 2.4. *Sei R ein Integritätsbereich. Es gelte*

$$p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$$

mit Primelementen $p_1, \dots, p_r$ und $q_1, \dots, q_s$. Dann gilt $r = s$, und nach evtl. Umnummerierung $p_i \sim q_i$ für alle $i = 1, \dots, r$.

BEWEIS. p_1 teilt das Produkt $q_1 q_2 \dots q_s$, und da p_1 prim ist, einen dieser Faktoren (diese Eigenschaften von Primelementen gilt auch für mehr als zwei Faktoren per Induktion); nach Umnummerierung können wir $p_1 \mid q_1$ annehmen, etwa $ap_1 = q_1$. Da q_1 als Primelement irreduzibel ist und p_1 keine Einheit ist, muss a eine Einheit sein, d. h. $p_1 \sim q_1$. Kürzen (Nullteilerfreiheit!) von p_1 liefert $p_2 \dots p_r = (aq_2)q_3 \dots q_s$, und mit q_2 ist auch aq_2 prim. Die Aussage folgt nun per Induktion. □

SATZ 2.5. *Für einen Integritätsbereich R sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *R ist faktoriell.*

(2) *Jede Nichteinheit $\neq 0$ ist ein Produkt von irreduziblen Elementen, die bis auf Umnummerierung und Assoziiertheit eindeutig bestimmt sind.*

(3) *Jede Nichteinheit $\neq 0$ ist ein Produkt von irreduziblen Elementen, und jedes irreduzible Element in R ist prim.*

BEWEIS. (1)⇒(3) Nach 2.2 ist jede Nichteinheit $\neq 0$ ein Produkt von irreduziblen Elementen. Sei q irreduzibel. Dann ist $q = p_1 \dots p_r$ mit p_i prim. Da q irreduzibel folgt $q \sim p_i$ für ein i, und damit ist q prim.

(3)⇒(1) klar.

(2)⇒(3) Sei q irreduzibel. Gelte $ab \in Rq$, etwa $ab = cq$. Zerlegt man a, b und c in irreduzible Elemente und nutzt die Eindeutigkeit aus, so erhält man, dass $a \in Rq$ oder $b \in Rq$ gilt. Also ist q prim.

(3)⇒(2) Da jedes irreduzible Element prim ist, und Zerlegungen in Primelemente eindeutig sind (bis auf Assoziiertheit) nach 2.4, folgt auch die Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Elemente. □

SATZ 2.6. *Jeder Hauptidealring ist faktoriell.*

BEWEIS. (1) [“Euklids Lemma”] *Jedes irreduzible Element ist prim.* Sei p irreduzibel. Gelte $ab \in Rp$ und $a \notin Rp$. Dann gilt $Rp \subsetneq Rp + Ra = Rc$ für ein $c \in R$, da R Hauptidealring. Dann $p \in Rc$, also $p = dc$. Fall d Einheit, nicht möglich wegen $Ra \neq Rc$. Also c Einheit, $Rc = R$. Also $1 = rp + sa$. Dann $b = rbp + sab \in Rp$.

(2) *Jede Nichteinheit $\neq 0$ ist ein Produkt von irreduziblen Elementen.* Sei $r \neq 0$ Nicheinheit. Angenommen, r ist nicht Produkt von irreduziblen Elementen. Dann ist r selbst nicht irreduzibel. Also gibt es Nichteinheiten a, b ($\neq 0$) mit $r = ab$. Dann ist a oder b nicht irreduzibel. Setzt man dies fort, so erhält man (!) eine unendliche, echt aufsteigende Kette

$$Ra_1 \subsetneq Ra_2 \subsetneq Ra_3 \subsetneq \cdots \subsetneq Ra_n \subsetneq Ra_{n+1} \subsetneq \dots$$

Dann ist

$$I = \bigcup_{n \geq 1} Ra_n$$

ein Ideal, also ein Hauptideal, $I = Rc$. Es gibt ein n mit $c \in Ra_n$. Es folgt $Ra_n = Ra_{n+1}$, Widerspruch. □

Wir haben also die Beziehungen

$$\text{euklidisch} \quad \Rightarrow \quad \text{Hauptidealring} \quad \Rightarrow \quad \text{faktoriell.}$$

Die Umkehrungen gelten i. a. nicht.

FOLGERUNG 2.7. *$\mathbb{Z}$ ist faktoriell.*

3. Polynomringe

Definition von *Polynomen* über einem kommutativen Ring K als Funktionen (Folgen) $f = (f_n)_{n\geq 0} \colon \mathbb{N}_0 \to K$ mit endlichem Träger, d. h. $f_n = 0$ für "fast alle" (d. h. bis auf endliche viele) $n \geq 0$. Schreibe $0 = (0, 0, 0, \dots)$, $1 = (1, 0, 0, \dots)$.

SATZ 3.1. *Die Menge aller Polynome über K wird zu einem kommutativen Ring mit 1 durch folgende Addition und Multiplikation*

$$(f_n) + (g_n) = (f_n + g_n)$$

und

$$(f_n) \cdot (g_n) = (\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i})_n.$$

BEWEIS. Nachrechnen. □

BEMERKUNG 3.2. Sei R der Ring der Polynome über K. Dann ist $a \mapsto (a, 0, 0, \dots)$ ein injektiver Ringhomomorphismus $K \to R$. Identifiziere K als Teilring (-körper) von R vermöge dieses Homomorphismus.

Schreibe $T := (0, 1, 0, 0, \dots) \in R$. Dann gilt $T^0 = 1 \in R$, $T^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$, $T^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$, usw.

SATZ 3.3. *Jedes vom Nullpolynom verschiedene Polynom f über K hat eine Darstellung $f = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n$ mit $n \geq 0$ und eindeutigen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$, wobei $a_n \neq 0$.*

BEWEIS. Klar. □

Bezeichnung: $R = K[T]$ heisst der *Polynomring* über K in der Unbestimmten T. $n = \operatorname{grad} f$.

SATZ 3.4. *Sei K ein Integritätsbereich. Seien $f, g \in K[T]$ vom Nullpolynom verschieden. Dann gilt*

(1) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$. *(Insbesondere $fg \neq 0$.)*
(2) *$K[T]$ ist ein Integritätsbereich.*

BEWEIS. (1) Sei $f = a_m T^m + \cdots + a_1 T + a_0$ und $= b_n T^n + \cdots + b_1 T + b_0$ mit $a_m, b_n \neq 0$, also $\operatorname{grad}(f) = m$ und $\operatorname{grad}(g) = n$. Dann gilt $fg = a_m b_n T^{m+n} + \dots$, wobei alle weiteren Summanden kleineren Grad als $m + n$ haben. Da K nullteilerfrei ist, gilt $a_m b_n \neq 0$, also ist $\operatorname{grad}(fg) = m + n = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$.
(2) folgt aus (1). □

SATZ 3.5 (Polynomdivision mit Rest). *Sei K ein Körper. Seien $f, g \in K[T]$ mit $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in K[T]$ mit*

$$f = qg + r,$$

wobei $r = 0$ oder $r \neq 0$ und $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$.

BEWEIS. Existenz. Für $f = 0$ wähle $q = 0 = r$. Es gelte nun $f \neq 0$. Die Existenz wird durch Induktion nach $n = \operatorname{grad}(f)$ bewiesen. Falls $\operatorname{grad}(f) < \operatorname{grad}(g)$, wähle $q = 0$ und $r = f$. Gelte nun $n \geq m := \operatorname{grad}(g)$. Sei etwa $f = a_n T^n + \dots$ und $g = b_m T^m + \dots$, wobei die Leitkoeffizienten a_n, $b_m \neq 0$ sind. Dann ist $a_n {b_m}^{-1} T^{n-m} \cdot g = a_n T^n + \dots$. Also ist $\tilde{f} := f - a_n {b_m}^{-1} T^{n-m} \cdot g$ entweder 0 oder vom Grad $\leq n-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher $\tilde{q}$, r mit $\tilde{f} = \tilde{q}g + r$, mit $r = 0$ oder $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$. Wir erhalten

$$f = \tilde{f} + a_n {b_m}^{-1} T^{n-m} \cdot g = \left(\tilde{q} + a_n {b_m}^{-1} T^{n-m}\right) \cdot g + r,$$

und mit $q = \tilde{q} + a_n {b_m}^{-1} T^{n-m}$ folgt $f = qg + r$.

Eindeutigkeit. Falls ebenfalls $f = q_1 g + r_1$ mit $r_1 = 0$ oder $\operatorname{grad}(r_1) < \operatorname{grad}(g)$, so erhält man $(q_1 - q)g = r - r_1$. Aus Gradgründen muss dann $r - r_1 = 0$ gelten, was auch $q_1 - q$ nach sich zieht. Also $q_1 = q$ und $r_1 = r$. □

FOLGERUNG 3.6. *Für jeden Körper K ist $K[T]$ ein euklidischer Ring mit Größenfunktion $\sigma = \operatorname{grad}$. Insbesondere ist $K[T]$ ein Hauptidealring und faktoriell.*

BEMERKUNG 3.7. Der obige Beweis der Polynomdivision mit Rest funktioniert auch in beliebigen kommutativen Ringen mit 1, wenn man nur voraussetzt, dass der Leitkoeffizient von g eine Einheit ist.

SATZ 3.8 (Universelle Eigenschaft des Polynomrings). *Sei K ein kommutativer Ring. Der Polynomring $K[T]$ hat folgende* universelle Eigenschaft*: Sei S ein Ring und $s \in S$. Sei $\varphi\colon K \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dabei sei S ein kommutativer Ring, oder es gelte allgemeiner, dass $\varphi(a)s = s\varphi(a)$ gilt für alle $a \in K$. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon K[T] \to S$ mit $\overline{\varphi}_{|K} = \varphi$ und $\overline{\varphi}(T) = s$.*

BEWEIS. Definiere $\overline{\varphi}(\sum_{i=0}^n a_i T^i) = \sum_{i=0}^n \varphi(a_i) s^i$. □

3.9 (Einsetzen). Häufig ist $\varphi\colon K \longrightarrow S$ eine natürliche Einbettung $\iota\colon a \mapsto a$. Man schreibt dann: $\overline{\iota}(f) = f(s)$. In die Unbestimmte T wird das Element $s \in S$ *eingesetzt*. Ist s fest, so ist $f \mapsto f(s)$, $K[T] \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, der sogenannte *Einsetzungshomomorphismus*. Ein $s \in S$ heißt *Nullstelle* von f (in S), falls $f(s) = 0$ gilt.

Bemerkung: Man denke etwa an den Satz von Cayley-Hamilton aus der Linearen Algebra: $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $\chi_A \in K[T]$ das charakteristische Polynom, dann $\chi_A(A) = 0$. Die Matrix A ist also eine Nullstelle des Polynoms χ_A im Ring $S = \mathrm{M}_n(K)$.

SATZ 3.10. *Sei K ein Körper, oder auch nur ein Integritätsbereich (vgl. 3.7). Sei $f \in K[T]$ ($f \neq 0$) ein Polynom vom Grad n. Sei $c \in K$ eine Nullstelle von f in K. Dann gilt*

$$f = q \cdot (T - c),$$

mit $q \in K[T]$ vom Grad $n - 1$. Insbesondere hat f in K höchstens n Nullstellen.

BEWEIS. Polynomdivision mit Rest liefert eindeutige q, $r \in K[T]$ mit $f = q(T-c)+r$ und $r = 0$ oder $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(T - c) = 1$. In jedem Fall ist $r \in K$ konstant, und wegen $0 = f(c) = q(c)(c - c) + r(c) = r(c)$ folgt $r = 0$. □

FOLGERUNG 3.11. *Sei K ein unendlicher Körper. Dann ist $K[T]$ isomorph zum Ring* $\operatorname{Pol}(K, K)$ *aller Polynom*funktionen $f\colon K \to K$, $c \mapsto a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n$ *mit Koeffizienten in K.*

BEWEIS. Jedes $f \in K[T]$ liefert eine eindeutige Polynomfunktion $c \mapsto f(c)$. Diese Zuordnung ist offenbar surjektiv und ein Homorphismus von Ringen. Weil K unendlich ist, ist diese Zuordnung auch injektiv nach dem vorherigen Satz. □

BEISPIEL 3.12. Sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen 0 und 1. Das Polynom $f = T^2 + T \in K[T]$ ist verschieden vom Nullpolynom, aber die zugehörige Polynomfunktion $K \to K$, $a \mapsto f(a)$ ist die Nullfunktion, denn es gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 1 + 1 = 0$, also $f(a) = 0$ für alle $a \in K$.

4. Quotientenkörper

Bemerkung: Ist R Teilring eines Körpers K, so ist R ein Integritätsbereich. Es gilt auch die Umkehrung:

SATZ 4.1. *Sei R ein Integritätsbereich. Dann gibt es einen Körper K, so dass R mit einem Teilring von K identifiziert werden kann.*

BEWEIS. Sei X die Menge aller Paare (a, b) mit a, $b \in R$, $b \neq 0$. Wir erklären eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

[Nachrechnen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.]

Sei $K = X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir schreiben $\left[\frac{a}{b}\right]$ für die Klasse von (a, b).

Auf K wird nun eine Addition und eine Multiplikation wie folgt erklärt:

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] \overset{def}{=} \left[\frac{ad + bc}{bd}\right]$$

und

$$\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] \overset{def}{=} \left[\frac{ac}{bd}\right].$$

Man prüft nach, dass dies *wohldefiniert* ist, d. h. nicht von der Auswahl der Repräsentanten der Klasse abhängt. Wir zeigen dies nur für die (schwierigere) Addition: Gilt $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$, so folgt $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$ [kurz demonstrieren], und dies zeigt die Wohldefiniertheit.

Man sieht, dass diese "Bruchrechenregeln" K zu einem kommutativen Ring machen mit Nullelement $\left[\frac{0}{1}\right]$ und Einselement $\left[\frac{1}{1}\right]$. Es ist $\left[\frac{a}{b}\right] = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ ist. Daher ist jedes $\left[\frac{a}{b}\right] \neq 0$ invertierbar mit Inversem $\left[\frac{b}{a}\right]$.

Es ist offenbar $\iota\colon R \to K$, $a \mapsto \left[\frac{a}{1}\right]$ ein injektiver Ringhomomorphismus. □

BEMERKUNG 4.2. Identifizieren wir R via ι mit einem Teilring des oben konstruierten Körpers K, so folgt, dass jedes Element von K von der Form ist $ab^{-1} = a/b$ mit a, $b \in R$, $b \neq 0$. In K gibt es dann keinen kleineren Körper, der R enthält. Man nennt K auch den *Quotientenkörper* oder den *Körper der Brüche* von R. Der bestimmte Artikel ist gerechtfertigt, denn ist L irgendein Körper, der aus den Elementen ("Brüchen") ab^{-1} mit a, $b \in R$, $b \neq 0$ besteht, so konstruiert man einen offensichtlichen Isomorphismus von K nach L, der alle Elemente aus R festläßt.

BEISPIELE 4.3. (1) $\mathbb{Q}$ ist Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$.

(2) $K(T)$ sei der Körper der Brüche des Polynomrings $K[T]$. Er besteht aus allen (formalen) Brüchen von Polynomen $f(T)/g(T)$, wobei $g \neq 0$ ist. Dieser Körper heißt auch der *rationale Funktionenkörper* in einer Unbestimmten über K.

5. Ganz Abgeschlossenheit faktorieller Ringe

Sei R ein Integritätsring mit Quotientenkörper K. Grundlegendes Beispiel ist hier $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$.

SATZ 5.1. *Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K. Jedes Element $x \in K$, welches einer normierten Polynomgleichung*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{5.1}$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ genügt, ist notwendig in R gelegen. Ferner ist solch ein x ein Teiler von a_0.

Generell heisst ein Element x eines Oberrings S eines Rings R *ganz* über R, wenn eine Gleichung (5.1) gilt. (Wichtig dabei ist, dass sie normiert ist!) Der Satz besagt also, dass es im faktoriellen Fall in K keine über R ganzen Elemente gibt, die nicht schon selbst in R liegen. Man sagt dann, dass der Ring R *ganz abgeschlossen* (in K) ist.

FOLGERUNG 5.2. *Sei $f \in \mathbb{Z}[T]$ ein normiertes Polynom. Ist $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, so gilt $x \in \mathbb{Z}$ (und x ist sogar ein ganzzahliger Teiler des absoluten Glieds a_0 von f).* □

BEISPIEL 5.3. Die Gleichung $x^{11} - 10x^6 + 3 = 0$ ist nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar.

FOLGERUNG 5.4. *Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, welche sich für gegebenes $n \geq 2$ in $\mathbb{Z}$ nicht als n-te Potenz schreiben läßt (d. h. wir nehmen $a \neq k^n$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ an). Dann ist die Gleichung*

$$x^n - a = 0$$

nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar. Anders formuliert: $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Q}$. □

BEWEIS VON SATZ 5.1. Schreibe $x = a/b$ mit teilerfremden $a, b \in R$, $b \neq 0$. (In einem faktoriellen Ring ist dies möglich: man kürzt sukzessive gemeinsame irreduzible Faktoren heraus, bis keine mehr übrig bleiben.) Multiplikation von (5.1) mit b^n liefert

$$a^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} a^{n-i} b^i = 0,$$

also

$$a^n = -b \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} a^{n-i} b^{i-1}.$$

Es folgt $b \mid a^n$. Wäre nun $b \neq 1$, dann gäbe es einen Primfaktor p von b, und p wäre dann auch ein Primfaktor von a, Widerspruch. Also gilt $b = 1$, und damit $x = a \in R$. Ferner gilt

$$x \cdot \left(-x^{n-2} - a_{n-1} x^{n-2} - \cdots - a_2 x - a_1\right) = a_0,$$

also $x \mid a_0$. □

6. Faktorisierung von Polynomen: Der Satz von Gauß

DEFINITION 6.1 (ggT). Sei R Integritätsbereich. Seien a und $b \in R$. Ein $d \in R$ heißt ein *größter gemeinsamer Teiler* (ggT) von a und b, falls

(1) $a \in Rd$ und $b \in Rd$, und
(2) Ist $d' \in R$ mit $a \in Rd'$ und $b \in Rd'$, so folgt $d \in Rd'$.

Die Definition wird in naheliegender Weise auf mehr als zwei Elemente erweitert. Analog ("dual") wird das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* (kgV) definiert.

Offenbar gilt: Sind d_1 und d_2 ggT's von a und b (falls existent), so gilt $d_1 \sim d_2$ (und umgekehrt). Ist $a \in R$ und $b = 0$, so ist a ein ggT von a und b. Ist 1 ein ggT von a und b, so heißen a und b auch *teilerfremd*.

ÜBUNG 6.2. Sei R ein Hauptidealring, und seien $a, b \in R$.
(1) ("Bézouts Lemma") Es gilt $Ra + Rb = Rd$ mit $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.
(2) Es gilt $Ra \cap Rb = Rv$ mit $v = \mathrm{kgV}(a, b)$.

Auch in faktoriellen Ringen hat man die Existenz des ggT:

LEMMA 6.3. *Sei R faktoriell. Seien $a = up_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ und $b = vp_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$, mit $p_1, \dots, p_r$ paarweise nicht-assoziierte Primelemente und u, $v \in E(R)$, m_i, $n_j \geq 0$. (Alle Elemente $\neq 0$ lassen sich auf diese Weise schreiben.) Dann ist ein ggT von a und b gegeben durch $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, wobei $k_i = \min(m_i, n_i)$.*

Eine analoge Formel mit max statt min gilt für das kgV.

BEWEIS. Klar. □

LEMMA 6.4. *Sei R faktoriell, und seien a, $b \in R$ nicht beide 0. Dann sind a und b teilerfremd genau dann, wenn es kein Primelement $p \in R$ gibt mit $a \in Rp$ und $b \in Rp$.*

BEWEIS. Klar. □

DEFINITION 6.5. Sei R faktoriell. Der *Inhalt* $I(f)$ eines Polynoms $f = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in R[T]$, $f \neq 0$ ist der ggT seiner Koeffizienten. (Dies ist nicht paarweise gemeint! Der ggT ist nur bis auf eine Einheit eindeutig definiert!) Ein Polynom f mit $\mathrm{grad}(f) \geq 1$ heißt *primitiv*, falls $I(f) = 1$ gilt.

Bemerkung: Ein Polynom $f \in R[T]$ mit $f \neq 0$ heisst *normiert*, falls der Leitkoeffizient $= 1$ ist. Ein normiertes Polynom vom Grad ≥ 1 ist immer primitiv.

Die folgende Aussage ist auch unter dem Namen Gauß-Lemma bekannt.

SATZ 6.6. *Sei R faktoriell. Seien f, $g \in R[T]$ ungleich null. Dann gilt (bis auf Einheiten) $I(fg) = I(f)I(g)$.*

BEWEIS. Zunächst kann man ohne Einschränkung annehmen, dass sowohl f wie auch g einen Grad ≥ 1 hat. Schreibt man $f = I(f)f'$ und $g = I(g)g'$, so sind f' und g' primitiv, es gilt $I(fg) = I(f)I(g)I(f'g')$, und es genügt daher zu zeigen:

Sind f und g primitiv, so ist auch fg primitiv.

Seien $f = \sum_{i=0}^{m} a_i T^i$ und $g = \sum_{i=0}^{n} b_i T^i$ mit $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$. Dann ist

$$fg = \sum_{i=0}^{m+n} (\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}) T^i.$$

Schreibe $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$ Sei p ein beliebiges Primelement. Sei r die größte ganze Zahl mit $0 \leq r \leq m$, $a_r \neq 0$ und p teilt nicht a_r. Ebenso sei s die größte ganze Zahl mit $0 \leq s \leq n$, $b_s \neq 0$ und p teilt nicht b_s. Es ist

$$c_{r+s} = a_r b_s + a_{r+1} b_{s-1} + \cdots + a_{r-1} b_{s+1} + \ldots$$

Da p das Produkt $a_r b_s$ nicht teilt, aber alle anderen Summanden auf der rechten Seite, teilt p nicht c_{r+s}. Es gibt also kein Primelement, welches alle Koeffizienten c_i gleichzeitig teilt, daher sind sie teilerfremd. □

Ist K ein Körper und $f \in K[T]$, so bedeutet f irreduzibel genau folgendes: (1) $\operatorname{grad}(f) \geq 1$, und (2) ist $f = gh$, so ist $\operatorname{grad}(g) = 0$ oder $\operatorname{grad}(h) = 0$. Ist R (nur) ein faktorieller Ring, so kann es auch irreduzible $f \in R[T]$ vom Grad 0 geben, nämliche gerade die irreduziblen Elemente in R.

LEMMA 6.7. *Sei R faktoriell und sei K der Quotientenkörper von R. Ist $f \in R[T]$ vom Grad ≥ 1 und irreduzibel, so ist f auch irreduzibel in $K[T]$.*

BEWEIS. Sei f vom Grad ≥ 1 und irreduzibel über R, aber reduzibel über K. Man kann also schreiben $f = gh$ mit g, $h \in K[T]$, und mit $\operatorname{grad}(g)$, $\operatorname{grad}(h) \geq 1$. Multipliziert man mit dem Hauptnenner a der Koeffizienten von g und mit dem Hauptnenner b der Koeffizienten von h, so erhält man $abf = (ag)(bh)$ mit a, $b \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ und ag, $bh \in R[T]$. Schreibt man $ag = I(ag)g'$ und $bh = I(bh)h'$, so sind g' und h' primitiv, und $abf = I(ag)I(bh)g'h'$. Da f irreduzibel in $R[T]$ (und vom Grad ≥ 1), ist f primitiv. Vergleich der Inhalte beider Seiten liefert (bis auf Einheit) $ab = I(ag)I(bh)$. Kürzen liefert $f = g'h'$ mit g', $h' \in R[T]$ primitiv. Dies ergibt eine nicht-triviale Zerlegung von f in $R[T]$, Widerspruch. □

SATZ 6.8 (Gauß). *Ist R ein faktorieller Ring, so ist dies auch $R[T]$.*

BEWEIS. Sei K der Quotientenkörper von R. Sei $f \in R[T]$, $f \neq 0$. Wir wissen, dass $K[T]$ als euklidischer Ring faktoriell ist. Es hat also f in $K[T]$ eine Zerlegung $f = q_1 q_2 \ldots q_r$ mit Primelementen $q_i \in K[T]$. Zieht man Nenner und gemeinsame Teiler der Zähler heraus, so erhält man $f = cp_1 p_2 \ldots p_r$ mit $c \in K$, $c \neq 0$, und primitiven, irreduziblen Polynomen $p_i \in R[T]$ (da irreduzibel in $K[T]$). Man kann schreiben $c = a/b$ mit teilerfremden a und b, und erhält $bf = ap_1 p_2 \ldots p_r$. Der Inhalt der rechten Seite ist a, der der linken Seite wird von b geteilt. Also muss b eine Einheit in R sein, damit zerlegt sich f schon über R in irreduzible Polynome. Ist $f = p'_1 p'_2 \ldots p'_s$ ein zweite solche Darstellung, so sind die p'_j primitiv oder vom Grad 0. Die primitiven p'_j sind nach Lemma 6.7 auch irreduzibel über K, dort stimmen sie bis auf Einheiten in K (und Umnummerierung) mit den p_i überein, und obiges Argument zeigt nochmal, dass die p_i schon über R zu den p'_j assoziiert sind. □

Beispiel 6.9. $\mathbb{Z}[T]$ ist faktoriell.

Übung 6.10. $\mathbb{Z}[T]$ ist kein Hauptidealring.

Übung 6.11. Sei R faktoriell, und seien a, $b \in R$. Dann gilt (bis auf Assoziiertheit)

$$ab = \mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b).$$

7. Ein Irreduzibilitätskriterium

Satz 7.1 (Kriterium von Eisenstein). *Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K. Sei $f \in R[T]$, $f = a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n$ vom Grad $n \geq 1$. Es gebe ein Primelement $p \in R$ mit*

(1) *$p \nmid a_n$. (Etwa: f normiert.)*
(2) *$p \mid a_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$.*
(3) *$p^2 \nmid a_0$.*

Dann ist f irreduzibel in $K[T]$.

Beweis. Schreibe $f = I(f)f'$ mit f' primitiv. Zu zeigen genügt, dass f' in $R[T]$ irreduzibel ist. Da $I(f)$ nicht von p geteilt wird, gelten bzgl. Teilbarkeit durch p für f' dieselben Bedingungen wie für f. Man kann also ohne Einschränkung annehmen, dass f selbst primitiv ist, und zu zeigen genügt (vgl. Lemma 6.7), dass f irreduzibel in $R[T]$ ist. Angenommen, dies ist falsch, also $f = gh$ in $R[T]$ mit $g = \sum_{i=0}^{r} b_iT^i$ und $h = \sum_{i=0}^{s} c_iT^i$ mit $b_r \neq 0$ und $c_s \neq 0$, wobei wir wegen der Primitivität zusätzlich r, $s \geq 1$ annehmen können. Dann ist

$$f = \sum_{i=0}^{r+s} \Big(\sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j}\Big) T^i.$$

Da $a_0 = b_0c_0$ durch p aber nicht durch p^2 teilbar ist, gilt etwa $p \mid b_0$ und $p \nmid c_0$. Da $a_n = b_rc_s$ nicht durch p teilbar ist, ist b_r nicht durch p teilbar. Sei k der kleinste Index mit $p \nmid b_k$. Da in

$$a_k = b_0c_k + b_1c_{k-1} + \cdots + b_{k-1}c_1 + b_kc_0$$

auf der rechten Seite nur der Summand b_kc_0 nicht durch p geteilt wird, folgt, dass a_k nicht durch p geteilt wird, Widerspruch zur Annahme $p \mid a_k$ $(k < n)$. □

Beispiel 7.2. Sei $f = 2T^5 + 15T^4 + 9T^3 + 6 \in \mathbb{Z}[T]$. Nach dem Kriterium von Eisenstein (mit $p = 3$) ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$.

Übung 7.3. Sei p eine Primzahl. Dann ist das Polynom

$$T^{p-1} + T^{p-2} + \ldots + T + 1$$

irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

KAPITEL V

Algebraische Körpererweiterungen

1. Algebraische und transzendente Elemente

Sei L/K ("L über K") eine *Körpererweiterung*, d. h. K ist ein Teilkörper von L, bzw. L ist ein Erweiterungskörper von K. (Man beachte, dass bei dieser Schreibweise L/K keine Faktorbildung gemeint ist!) Sei $x \in L$. Dann bezeichne $K[x]$ die Teilmenge von L bestehend aus den Elementen der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit $n \geq 0$ und $a_i \in K$.

PROPOSITION 1.1. *$K[x]$ ist der bzgl. Inklusion $\subseteq$ kleinste Unterring von L, der K und x enthält.*

BEWEIS. Offensichtlich. □

DEFINITION 1.2. $K[x]$ entsteht aus K durch *Ringadjunktion* des Elementes $x \in L$. "K adjungiert x."

Statt ab^{-1} schreiben wir häufig auch a/b, oder $\frac{a}{b}$.
Analog: $K(x)$ die Menge aller in L gebildeten Quotienten

$$q = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

mit $a_i, b_j \in K$ und $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m \neq 0$. Also besteht $K(x)$ aus den Elementen der Form a/b mit $a, b \in K[x]$, $b \neq 0$.

PROPOSITION 1.3. *$K(x)$ ist der bzgl. Inklusion kleinste Teilkörper von L, welcher K und x enthält.*

BEWEIS. Offensichtlich. □

DEFINITION 1.4. $K(x)$ heißt der aus K durch Adjunktion des Elementes $x \in L$ gebildete Teilkörper von L.

BEISPIEL 1.5. (a) Die Zahlen $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ bilden einen Teilkörper K des Körpers $\mathbb{R}$. Es gilt $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(b) Im Körper $\mathbb{C}$ ist

$$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(c)* Es lässt sich zeigen, dass $\mathbb{Q}[\pi] \subsetneq \mathbb{Q}(\pi)$ gilt. (π ist transzendent, Satz von Lindemann (1882).) Ähnliches gilt für die Eulersche Zahl e (Hermite (1873)). Die Beweise hierfür sind sehr aufwändig und verlangen analytische Methoden. — Tatsächlich ist eine zufällig gegebene komplexe (oder reelle) Zahl mit 100%iger (!) Wahrscheinlichkeit transzendent. Dennoch ist es enorm schwierig, deren Transzendenz zu beweisen.

DEFINITION 1.6 (Algebraische Elemente). Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein $x \in L$ heisst *algebraisch über K*, wenn es ein normiertes Polynom

$$f = T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 \in K[T]$$

gibt, das x also Nullstelle hat, also $f(x) = 0$ gilt. Falls es ein solches Polynom nicht gibt, heisst x *transzendent über* K.

Eine Körpererweiterung L/K heisst *algebraisch*, falls jedes $x \in L$ algebraisch über K ist. Anderfalls heisst L/K *transzendente* Körpererweiterung.

Bemerkung: Ein normiertes Polynom f ist immer verschieden vom Nullpolynom. Ist umgekehrt $f \in K[T]$ mit $f \neq 0$ und K ein Körper, sowie x eine Nullstelle von f, so ist x auch Nullstelle eines normierten Polynoms $g \in K[T]$. Man wählt nämlich $g = {a_n}^{-1} \cdot f$, wenn a_n der Leitkoeffizient von f ist.

DEFINITION 1.7 (Minimalpolynom). Sei L/K eine Körpererweiterung, und sei $x \in L$ algebraisch über K. Es gibt dann, nach Definition, ein normiertes Polynom $f \in K[T]$, $f \neq 0$, mit $f(x) = 0$. Dann gibt es auch ein solches f minimalen Grades, und dies heisst das *Minimalpolynom* von x *über* K. (Dies ist offenbar eindeutig bestimmt.) Wir schreiben auch $f = \mathrm{MIPO}(x/K)$.

SATZ 1.8 (Charakterisierungen des Minimalpolynoms). *Sei L/K eine Körpererweiterung, sei $x \in L$ und $f \in K[T]$ ein normiertes Polynom. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist das Minimalpolynom von x über K, d. h. $0 \neq f \in K[T]$ ist minimalen Grades mit $f(x) = 0$.*
(2) *f ist irreduzibel über K und es gilt $f(x) = 0$.*
(3) *$f(x) = 0$, und f teilt jedes Polynom $g \in K[T]$ mit $g(x) = 0$.*

BEWEIS. (1)⇒(2) Ist f nicht irreduzibel, so gibt es $g, h \in K[T]$ mit $\mathrm{grad}(g), \mathrm{grad}(h) \geq 1$ mit $f = gh$. Es gilt dann $g(x) = 0$ oder $h(x) = 0$, wobei g und h kleineren Grad als f haben.

(2)⇒(1) Sei f irreduzibel, und sei $g \in K[T]$ minimalen Grades mit $g(x) = 0$. Schreibe $f = qg + r$ mit $r = 0$, oder $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$. Wegen $r(x) = 0$ ist nur $r = 0$ möglich, also $f = qg$. Da f irreduzibel ist, folgt, dass q ein konstantes Polynom $\neq 0$ ist, und auch f hat minimalen Grad.

(1)⇒(3) Folgt wie im vorherigen Beweisteil per Division (durch f) mit Rest.

(3)⇒(1) Klar. □

Zusammen mit dem Homomorphiesatz erhalten wir:

FOLGERUNG 1.9. *Das Minimalpolynom f von x über K erzeugt (als Ideal) den Kern des Einsetzungshomomorphismus $K[T] \to L$, $g(T) \mapsto g(x)$. Insbesondere gilt $K[x] \simeq K[T]/fK[T]$, und $K[x]$ ist ein Körper.*

Die letzte Aussage folgt aus dem folgenden Lemma.

LEMMA 1.10. *Sei R ein Hauptidealring und $p \in R$ irreduzibel (= prim). Dann ist R/pR ein Körper.*

Hier interessiert uns die Aussage für den Spezialfall $R = K[T]$ (K ein Körper).

BEWEIS. Vgl. den Beweis, Teil (1), von Satz IV.2.6. Zeige, dass Elemente $\neq 0$ in R/pR invertierbar sind. Sei $x \in R$, so dass $[x] \in R/pR$ ungleich null ist. Das bedeutet gerade $x \notin pR$. [Dann gilt $pR \subsetneq Rp + Rx = Ry$ für ein geeignetes y, da R ein Hauptidealring ist. Dann gibt es z mit $p = zy$. Da p irreduzibel ist und obige Inklusion strikt ist, folgt, dass y eine Einheit ist.] Es folgt $Rp + Rx = R$. Es gibt also r, s mit $rp + sx = 1$, und es folgt $[1] = [r][p] + [s][x] = [s][x]$, also ist $[x]$ invertierbar in R/pR. □

Sei L/K eine Körpererweiterung. Dann ist L insbesondere ein K-Vektorraum. Insbesondere steht das ganze Repertoire der Linearen Algebra (lineare Gleichungen, Matrizen, Basen, Dimension, etc.) zur Untersuchung von L/K bereit. Insbesondere ist $\dim_K L$ definiert (endlich oder unendlich).

DEFINITION 1.11. Sei L/K eine Körpererweiterung. Die Dimension $\dim_K(L)$ heisst auch der *(Körper-) Grad* von L über K und wird mit $[L : K]$ bezeichnet. Eine Körpererweiterung L/K heisst *endlich*, falls $[L : K]$ endlich ist. Allgemeiner schreiben wir auch für einen kommutativen Ring R, der den Körper K als Teilring enthält, $[R : K] = \dim_K(R)$.

SATZ 1.12. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann ist L/K algebraisch.*
Genauer gilt: Ist $[L : K] = n$, so gibt es zu jedem $x \in L$ ein normiertes Polynom $f \in K[T]$ vom Grad $\leq n$ mit $f(x) = 0$.

BEWEIS. Sei $x \in L$. Wegen $[L : K] = n$ sind die $n + 1$ Elemente

$$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$$

linear abhängig über K. Es gibt also $b_0, \ldots, b_n \in K$ nicht alle null mit

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

SATZ 1.13. *Sei L/K eine Körpererweiterung, und sei $x \in L$. Dann sind äquivalent:*

(1) *x ist algebraisch über K.*
(2) *$[K[x] : K]$ ist endlich.*
(3) *$K(x) = K[x]$.*
(4) *$K[x]$ ist ein Teilkörper von L.*

BEWEIS. (1)⇒(2), (3): Ist x algebraisch über K, so gibt es eine natürliche Zahl n und Elemente $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit

$$x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}. \tag{1.1}$$

Es folgt, dass $K[x]$ als K-Vektorraum von $1,\ x, \ldots,\ x^{n-1}$ erzeugt wird, also $[K[x] : K] \leq n$. Mit Folgerung 1.9 ergibt sich $K(x) = K[x]$.
(2)⇒(1): Wie im Beweis von Satz 1.12: Ist $n = [K[x] : K] < \infty$, so sind $1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$ linear abhängig, und es folgt, dass x algebraisch über K ist.
(3)⇒(1): Gilt $K(x) = K[x]$, so ist $K[x]$ ein Körper, und insbesondere ist x invertierbar in $K[x]$ (der Fall $x = 0$ ist uninteressant). Es gibt also eine natürliche Zahl und Elemente $b_0, \ldots, b_{n-1} \in K$ mit

$$x^{-1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}.$$

Multiplikation der Gleichung mit x zeigt dann, dass x einer Polynomgleichung über x genügt, x ist also algebraisch über K.
(3)⇔(4): Klar. □

FOLGERUNG 1.14. *Sei L/K eine Körpererweiterung und $x \in L$ algebraisch über K. Dann ist die Körpererweiterung $K(x)/K$ algebraisch.*

BEWEIS. Für alle $y \in K(x)$ gilt $[K(y) : K] \leq [K(x) : K] < \infty$. □

FOLGERUNG 1.15. *Sei L/K eine Körpererweiterung, sei $x \in L$ algebraisch über K mit $f = \mathrm{MIPO}(x/K)$. Dann gilt $[K(x) : K] = \mathrm{grad}(f)$. Ferner gilt mit $n = \mathrm{grad}(f)$, dass $1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^{n-1}$ eine K-Basis von $K(x)$ ist.*

BEWEIS. Es gilt $K(x) = K[x]$. Ist $f = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0$, so folgt wegen $f(x) = 0$, dass der K-Vektorraum $K[x]$ von den n Elementen

$$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^{n-1}$$

erzeugt wird; da f minimalen Grades ist, folgt sofort, dass diese Elemente auch linear unabhängig über K sind. Also $[K(x) : K] = n = \mathrm{grad}(f)$. □

Ist x algebraisch über K, so heisst der Körpergrad $[K(x) : K]$ auch der Grad des Elements x über K.

DEFINITION 1.16. Eine Körpererweiterung L/K heisst *einfach*, falls es ein $x \in L$ gibt mit $L = K(x)$. Ist in diesem Fall x algebraisch über K, so heisst sie *einfach algebraisch*, und x ein *primitives* (=erzeugendes) Element von L/K; andernfalls heisst L/K *einfach transzendent*.

BEISPIEL 1.17. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ist wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ einfach algebraisch. $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$ ist einfach transzendent.*

Anmerkung: Gezeigt wird später (Satz vom primitiven Element): Jede endliche Körpererweiterung L/K mit $K \supseteq \mathbb{Q}$ besitzt ein primitives Element.

Einfach transzendente Körpererweiterungen.

SATZ 1.18. *Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ transzendent über K. Dann ist $K(\alpha) \simeq K(T)$; genauer: Es gibt einen Isomorphismus $K(T) \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$, der T auf α schickt und auf K wie die Identität wirkt.*

BEWEIS. Definiere $K(T) \to K(\alpha)$, $f(T)/g(T) \mapsto f(\alpha)/g(\alpha)$, wobei $g(T) \neq 0$ gilt. Da α transzendent über K ist, folgt dann auch $g(\alpha) \neq 0$. Man prüft unmittelbar nach, dass dies wohldefiniert ist (unabhängig von der Darstellung des Bruches), ein Homomorphismus von Ringen, und nach Definition von $K(\alpha)$ ist die Abbildung auch surjektiv. Weil $K(T)$ ein Körper ist, ist sie offenbar auch injektiv. □

Anmerkung*: Es folgt etwa, dass $\mathbb{Q}(\pi) \simeq \mathbb{Q}(T) \simeq \mathbb{Q}(e)$ gilt.

Allgemeinere Adjunktionen. Sind $x_1, x_2, \ldots$ Elemente in L so definiert man $K[x_1, x_2] \stackrel{def}{=} (K[x_1])[x_2]$ und $K(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} (K(x_1))(x_2)$. Induktiv werden $K[x_1, \ldots, x_n]$ und $K(x_1, \ldots, x_n)$ definiert. Dies ist der kleinste Teilring (bzw. -körper) von L, der K und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ enthält. Man kann aber auch direkt für jede Teilmenge $\mathscr{S}$ von L definieren: $K[\mathscr{S}]$ und $K(\mathscr{S})$ ist der kleinste Teilring bzw. Teilkörper von L, der $K \cup \mathscr{S}$ enthält. Diesen erhält man als Durchschnitt aller Teilringe bzw. Teilkörper von L, die $K \cup \mathscr{S}$ enthalten. (L selbst ist einer von solchen.) Man überlege sich, welche Form die Element in $K[\mathscr{S}]$ bzw. $K(\mathscr{S})$ haben.

2. Einfach algebraische Körpererweiterungen

In Folgerung 1.9 hatten wir ein algebaisches Element $x \in L$ und dessen Minimalpolynom über K betrachtet, wobei L/K eine schon gegebene Körpererweiterung war. Der folgende wichtige Satz ist gewissermaßen eine Umkehrung davon, der uns zeigt, wie man einfach algebraische Körpererweiterungen "abstrakt" konstruieren kann, d. h. *ohne* in einem evtl. schon gegebenen Oberkörper zu argumentieren.

SATZ 2.1 (Kronecker). *Sei K ein Körper. Sei $f \in K[T]$ normiert und irreduzibel vom Grad n. Dann ist $L = K[T]/fK[T]$ eine Körpererweiterung von K vom Grad $[L : K] = n$. Die Klasse $t = [T]$ von T in L ist eine Nullstelle von f in L, und es gilt $L = K(t)$. Ferner ist f das Minimalpolynom von t über K.*

BEWEIS. Nach Lemma 1.10 ist $L = K[T]/fK[T]$ ein Körper. Offenbar ist $a \mapsto [a] = a + fK[T]$ ein injektiver Ringhomomorphismus $K \to K[T]/fK[T]$, womit K als Teilkörper von L identifiziert wird.

Die Klassen $[1], [T], \ldots, [T^{n-1}]$ bilden eine K-Basis von L: Denn ist $[g] = g + fK[T] \in L$, so zeigt Division mit Rest, $g = qf + r$, dass $[g] = [r]$, und $r = 0$ oder $\operatorname{grad}(r) < n$, d. h. r wird von $1, T, \ldots, T^{n-1}$ erzeugt. Ist $\sum_{i=0}^{n-1} a_i[T^i] = 0$, so ist $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i \in fK[T]$, aber aus Gradgründen geht nur $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i = 0$, also alle $a_i = 0$.

Ist $t = [T]$, so ist dann $L = K(t)$ unmittelbar klar. Einsetzen ergibt $f(t) = f([T]) = [f] = [0]$. Da f irreduzibel über K ist, ist f das Minimalpolynom von t über K (vgl. 1.8). □

DEFINITION 2.2. Seien L/K und L'/K Körpererweiterungen. Ein Isomorphismus $\sigma\colon L \to L'$ heißt ein *K-Isomorphismus*, wenn $\sigma_{|K} = 1_K$ gilt. (Äquivalent: σ ist K-linear.)
Ist dabei $L = L'$, so heißt σ ein *K-Automorphismus*.

Allgemeiner definieren wir: Ist $i\colon K \to K'$ ein Isomorphismus (bzw. ein Monomorphismus[1]) von Körpern, und sind L/K und L'/K' Körpererweiterungen, so heißt ein Isomorphismus (Monomorphismus) $\sigma\colon L \to L'$ ein *Isomorphismus (Monomorphismus) von Körpererweiterungen*, falls $\sigma_{|K} = i$ gilt. Im Falle $K = K'$ und $i = 1_K$ (wie oben), nennen wir einen Monomorphismus $\sigma\colon L \to L'$ mit $\sigma_{|K} = 1_K$ einen *K-Monomorphismus*.

SATZ 2.3. *Seien $K(\alpha)/K$ und $K(\beta)/K$ einfache algebraische Körpererweiterungen, so dass α und β dasselbe Minimalpolynom $f \in K[T]$ haben. Dann gibt es einen K-Isomorphismus $\sigma\colon K(\alpha) \xrightarrow{\sim} K(\beta)$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$.*

BEWEIS. Es habe f den Grad n. Jedes $x \in K(\alpha)$ läßt sich nach Folgerung 1.15 eindeutig schreiben

$$x = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$$

($a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$). Definiere

$$\sigma(x) \overset{def}{=} a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdots + a_{n-1}\beta^{n-1}.$$

Wieder nach 1.15 ist σ bijektiv, und es gilt $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ für alle $x, y \in K(\alpha)$. Zu zeigen bleibt $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ für alle $x, y \in K(\alpha)$. Nach 1.15 gibt es $g, h, p \in K[T]$ vom Grad $\leq n-1$ (sofern nicht das Nullpolynom) mit $x = g(\alpha)$, $y = h(\alpha)$ und $xy = p(\alpha)$. Es ist $(gh-p)(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha) - p(\alpha) = xy - xy = 0$. Nach Satz 1.8 gilt, dass $gh - p$ von f geteilt wird, etwa $gh = qf + p$. Entweder $p = 0$, oder $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(f)$, und daher ist p der Rest bei Division von gh durch f. Da auch $f(\beta) = 0$, folgt $\sigma(xy) = p(\beta) = g(\beta)h(\beta) = \sigma(x)\sigma(y)$. □

Manchmal ist es nützlich, vorstehende Aussage allgemeiner zu haben: Für einen Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ definiere $f^*\colon R[T] \to S[T]$ durch

$$f^*(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) T^i.$$

SATZ 2.4. *Seien K und L Körper und $i\colon K \to L$ ein Isomorphismus. Seien $K(\alpha)/K$ und $L(\beta)/L$ einfache algebraische Körpererweiterungen. Sei $f \in K[T]$ das Minimalpolynom von α über K und $g \in L[T]$ das Minimalpolynomen von β über L. Gilt $i^*(f) = g$, so gibt es einen Isomorphismus von Erweiterungen $j\colon K(\alpha)/K \to L(\beta)/L$ mit $j(\alpha) = \beta$.*

BEWEIS. Analog zum Beweis des vorstehenden Satzes. □

Folgende Aussage ist die Umkehrung von Satz 2.3.

PROPOSITION 2.5. *Seien $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ zwei einfach algebraische Körpererweiterungen, und es gebe einen K-Isomorphismus $\sigma\colon K(\alpha) \xrightarrow{\sim} K(\beta)$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$. Dann haben α und β dasselbe Minimalpolynom über K.*

BEWEIS. Vgl. Übungen. □

3. Der Gradsatz

Der folgende Satz ist von ähnlich grundlegender Bedeutung wie der Satz von Lagrange in der Gruppentheorie:

[1] Das ist ein injektiver Homomorphismus. Beachte, dass Ringhomomorphismen zwischen Körpern automatisch injektiv sind.

SATZ 3.1 (Gradsatz). *Sei $K \subseteq L \subseteq M$ ein Körperturm. $[M : K]$ ist genau dann endlich, wenn $[M : L]$ und $[L : K]$ endlich sind. In dem Fall gilt*

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$

Dieser Satz hat eine ähnlich grundlegende Wichtigkeit in der Theorie der Körpererweiterungen wie der Satz von Lagrange in der Gruppentheorie. Man beweist dazu die folgende stärkere Aussage, die auch selbst sehr wichtig ist.

ZUSATZ 3.2. *Sei $K \subseteq L \subseteq M$ ein Körperturm. Ist $\ell_1, \ldots, \ell_p$ eine K-Basis von L und $m_1, \ldots, m_q$ eine L-Basis von M, so ist die pq-elementige Menge*

$$\{\ell_i m_j \mid i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q\}$$

eine K-Basis von M.

BEWEIS. Man zeigt leicht die lineare Unabhängigkeit und die Erzeugendeneigenschaft für die $\ell_i m_j$ über K, indem man sie mittels

$$\sum_{i,\,j} \alpha_{ij} \ell_i m_j = \sum_{j=1}^{q} \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} \ell_i \Big) m_j$$

auf die entsprechenden Eigenschaften der ℓ_i über L und der m_j über K zurückführt. □

BEISPIEL 3.3. $x = \sqrt{i}$ ist Nullstelle des Polynoms $T^4 + 1$. Es gilt $\sqrt{i} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$. Schauen wir uns die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$ an. Es gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$. Weil $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$ und $i \notin \mathbb{R}$, gilt auch $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$, und damit nach dem Gradsatz

$$[\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Es ist 1, $\sqrt{2}$ eine $\mathbb{Q}$-Bais von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und 1, i eine $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-Basis von $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Nach dem Zusatz ist deswegen

$$1,\ i,\ \sqrt{2},\ i\sqrt{2}$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Außerdem gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{i}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$: Wegen $\sqrt{i} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, also $\mathbb{Q}(\sqrt{i}) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Sollte diese Inklusion echt sein, so muss $[\mathbb{Q}(\sqrt{i}) : \mathbb{Q}] < 4$ ein Teiler von 4 sein, also $= 1$ oder $= 2$. Offenbar kann er nicht $= 1$ sein. Er kann aber auch nicht $= 2$ sein, denn sonst müsste $i = \sqrt{i}^2$ sich als LKB über $\mathbb{Q}$ in 1, $\sqrt{i} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ darstellen lassen. Da aber 1, i, $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind, ist dies nicht möglich. Es folgt $[\mathbb{Q}(\sqrt{i} : \mathbb{Q}] = 4$, und da mit $f = T^4 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ ein normiertes Polynom vom Grad 4 ist mit $f(x) = 0$, gilt $\mathrm{MIPO}(x/\mathbb{Q}) = T^4 + 1$.

FOLGERUNG 3.4. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Sind $x_1, \ldots, x_n \in L$ sämtlich algebraisch über K, so gilt*

$$K(x_1, \ldots, x_n) = K[x_1, \ldots, x_n],$$

und dies ist eine endliche Körpererweiterung von K.

BEWEIS. Induktion nach n. Für $n = 1$ wissen wir die Aussage schon. Es ist

$$\begin{aligned} K[x_1, \ldots, x_n] &= K[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n] \\ &\overset{IV}{=} K(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n] \\ &\overset{1.13}{=} K(x_1, \ldots, x_{n-1})(x_n) \\ &= K(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 3.5. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Äquivalent sind:*

(1) *L/K ist endlich.*
(2) *Es gibt über K algebraische Elemente $x_1, \ldots, x_n \in L$ mit $L = K(x_1, \ldots, x_n)$.*

BEWEIS. (2)⇒(1) Nach der vorstehenden Folgerung.

(1)⇒(2) Ist L/K endlich, so gibt es eine endliche K-Basis $y_1, \dots, y_m \in L$. Damit gilt insbesondere $L = K(y_1, \dots, y_m)$, und wegen $[K(y_i) : K] \leq [L : K] < \infty$ sind alle y_i algebraisch über K. □

SATZ 3.6 (Interner algebraischer Abschluss). *L/K sei Körpererweiterung. Es gilt*

(1) *Die über K algebraischen Elemente in L bilden einen Teilkörper $\overline{K}$ von L.*

(2) *$\overline{K}$ ist der größte Teilkörper von L, der über K algebraisch ist.*

(3) *Jedes Element aus L, welches über $\overline{K}$ algebraisch ist, liegt in $\overline{K}$. Kurz: $\overline{\overline{K}} = \overline{K}$.*

BEWEIS. (1) Seien $x, y \in L$ algebraisch über K. Dann gilt $x + y \in K(x, y)$, also $[K(x + y) : K] \leq [K(x, y) : K] < \infty$, und analoges gilt für $x \cdot y$. Ist $x \neq 0$, so gilt $x^{-1} \in K(x)$, also auch $[K(x^{-1} : K] \leq [K(x) : K] < \infty$. Also sind $x + y$, xy und x^{-1} algebraisch über K, und es folgt, dass $\overline{K}$ ein Körper ist.

(2) ist trivial.

(3) Sei $x \in L$ algebraisch über $\overline{K}$. Dann gibt es ein normiertes $f \in \overline{K}[T]$ mit $f(x) = 0$. Sei etwa $f = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0$, wobei $a_0, \dots, a_{n-1}$ algebraisch über K sind. Dann ist offenbar x algebraisch über $M = K(a_0, \dots, a_{n-1})$. Es folgt

$$[K(x) : K] \leq [M(x) : K] = [M(x) : M] \cdot [M : K] < \infty,$$

weil beide Faktoren endlich sind. Also ist x algebraisch über K. □

BEISPIEL 3.7. $\overline{\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) ist die Menge der algebraischen komplexen (bzw. reellen) Zahlen.

SATZ 3.8 (Transitivität algebraischer Erweiterungen). *Es sei $K \subseteq L \subseteq M$ ein Körperturm. Die Erweiterung M/K ist genau dann algebraisch, wenn die beiden Erweiterungen M/L und L/K beide algebraisch sind.*

BEWEIS. (1) Seien M/L und L/K algebraisch. Dann gilt $L \subseteq \overline{K}$, dem algebraischen Abschluss von K in M. Sei $x \in M$. Dies ist algebraisch über L, also erst recht über $\overline{K}$. Nach dem Resultat zuvor gilt dann $x \in \overline{K}$, also ist x algebraisch über K. Es folgt, dass M/K algebraisch ist.

(2) Sei umgekehrt M/K algebraisch. Jedes $x \in M$ ist über K, also erst recht über L algebraisch. Also ist M/L algebraisch. Da jedes Element von M algebraisch über K ist, ist insbesondere jedes Element von L algebraisch über K. Also ist auch L/K algebraisch. □

SATZ 3.9. *Für eine Körpererweiterung L/K sind äquivalent:*

(1) *L/K ist algebraisch.*

(2) *Jeder Ring R mit $K \subseteq R \subseteq L$ (Teilringe) ist ein Körper.*

BEWEIS. (1)⇒(2) Sei R ein Zwischenring. Sei $x \in R$, $x \neq 0$. Es ist x algebraisch über K, und es folgt

$$x^{-1} \in K(x) = K[x] \subseteq R.$$

Also ist x in R invertierbar.

(2)⇒(1) Sei $x \in L$. Aus (2) folgt $K[x] = K(x)$, also x algebraisch über K. □

4. Berechnung des Minimalpolynoms

BEISPIEL 4.1. Betrachte $L = \mathbb{Q}(\sqrt{i})/\mathbb{Q}$. Nach Beispiel 3.3 ist 1, i, $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von L.

(1) Sei $x = 2i + \sqrt{2}$. Wir wollen das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$ berechnen. Dazu stellen wir die Elemente 1, x, $x^2, \dots$ als Linearkombination in der oben gegebenen Basis

dar. Die Koeffizienten schreiben wir als Spalten einer Matrix:

1	x	x^2	x^3	x^4
1	0	-2	0	-28
0	2	0	4	0
0	1	0	-10	0
0	0	4	0	-16

Da nach dem Gradsatz $[L : \mathbb{Q}] = 4$, müssen wir hier maximal bis x^4 gehen und stellen x^4 (sofern dies nicht schon vorher möglich ist), als Linearkombination in den vorherigen Potenzen von x dar. Hier sehen wir, dass die ersten vier Spaltenvektoren linear unabhängig sind, also 1, x, x^2, x^3 sind linear unabhängig. Daher muss $\mathrm{MIPO}(x/\mathbb{Q})$ den Grad 4 haben, und man sieht, indem man die letzte Spalte als LKB der vorderen Spalten darstellt, $x^4 = -4x^2 - 36$, und damit $\mathrm{MIPO}(x/\mathbb{Q}) = T^4 + 4T^2 + 36$.

(2) $x = 1 + \sqrt{2} + i$.

1	x	x^2	x^3	x^4
1	1	2	4	0
0	1	2	8	24
0	1	2	2	0
0	0	2	6	16

Man sieht $x^4 = 4x^3 - 4x^2 - 8$, also $\mathrm{MIPO}(x/\mathbb{Q}) = T^4 - 4T^3 + 4T^2 + 8$.

LEMMA 4.2. *Es sei L/K eine Körpererweiterung und $0 \neq x \in L$. Dann haben die Elemente x und $1/x$ denselben Grad über K.*

BEWEIS. $K(x) = K(1/x)$. □

BEISPIEL 4.3. Minimalpolynom von $x = 1 + i + \sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$ ist $T^4 - 4T^3 + 4T^2 + 8$, das von $1/x$ ist $T^4 + 1/2T^2 - 1/2T + 1/8$.

5. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

- Dreiteilung des Winkels.
- Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem).
- Quadratur des Kreises.
- Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks.

DEFINITION 5.1. Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche die Punkte 0 und 1 enthält.

(1) Eine Gerade G heisst *unmittelbar* aus M *konstruierbar*, wenn es Elemente z_1, $z_2 \in M$ mit $z_1 \neq z_2$ so gibt, dass z_1, $z_2 \in G$.

(2) Ein Kreis heisst *unmittelbar* aus M *konstruierbar*, wenn es Elemente z_0, z_1, z_2 in M so gibt, dass K der Kreis um z_0 mit Radius $|z_1 - z_2|$ ist.

(3) Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heisst *unmittelbar* aus M *konstruierbar*, wenn es A und B mit $A \neq B$ und $z \in A \cap B$ so gibt, dass A und B jeweils eine unmittelbar aus M konstruierbare Gerade oder einen unmittelbar aus M konstruierbaren Kreis bedeuten.

DEFINITION 5.2. Wir setzen $M^{(0)} = M$ und erklären rekursiv $M^{(n+1)}$ als die Menge der unmittelbar aus $M^{(n)}$ konstruierbaren Punkte aus $\mathbb{C}$. Definitionsgemäß heißt dann

$$K(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M^{(n)}$$

die Menge der ausgehend von M *mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte.*

Wir nennen ein $z \in \mathbb{C}$ (schlechthin) (mit Zirkel und Lineal) *konstruierbar*, wenn z ausgehend von der Menge $\{0, 1\}$ konstruierbar ist. Wir nehmen im folgenden immer $M = \{0, 1\}$ an.

SATZ 5.3. *Sei $M = \{0, 1\}$. Dann ist $K(M)$ der kleinste Teilkörper K von $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften (1) und (2):*

(1) $z \in K \;\Rightarrow\; \overline{z} \in K$;
(2) *Ist $z \in \mathbb{C}$ Lösung einer quadratischen Gleichung $z^2+az+b=0$ mit Koeffizienten $a, b \in K$, so folgt $z \in K$. (Oder kürzer: $z \in K \;\Rightarrow\; \sqrt{z} \in K$.)*

Kurz: $K(M)$ ist der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der unter komplexer Konjugation[2] und Quadratwurzelziehen abgeschlossen ist.

Beweis. (0) $K(M)$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$: Sind z und w in $K(M)$, so erhält man $z-w$ als Schnittpunkt des Kreises um z mit Radius $|w|$ und des Kreises um $-w$ mit Radius $|z|$. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. In Polarkoordinaten, $z = re^{i\alpha}$. Dann gilt offenbar

$$z \in K(M) \quad \Leftrightarrow \quad r,\, e^{i\alpha} \in K(M).$$

Seien nun $z = re^{i\alpha}$ und $w = se^{i\beta}$ in $K(M) \setminus \{0\}$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $z/w \in K(M)$ gilt. Dazu genügt es zu zeigen, dass r/s und $e^{i(\alpha-\beta)}$ in $K(M)$ sind.

(a) Für r/s können wir $r \neq s$ annehmen. Es ist $i \in K(M)$, und dann $1+i \in K(M)$. Sei A die Gerade durch 0 und $1+i$. Sei $a \in A$ Schnittpunkt des Kreises um 0 mit Radius r mit A, und b der Schnittpunkt mit dem Kreis um 0 mit Radius s. Wir können annehmen, dass a und b im ersten Quadranten liegen. Sei B die Gerade durch 1 und b. Wir können dann eine Parallele B' konstruieren, die durch den Punkt a geht. Der Schnittpunkt von B' mit der reellen Achse heiße c. Der Strahlensatz sagt uns nun

$$\frac{r}{s} = \frac{|a|}{|b|} = \frac{c}{1}.$$

Der konstruierte Punkt $c \in K(M)$ ist also r/s.

(b) Mit $w = e^{i\beta}$ ist auch $\overline{w} = e^{i(-\beta)}$ in $K(M)$. Wir müssen also nur eine Winkeladdition konstruieren. Das ist einfach.

Es folgt, dass $K(M)$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist. (Insbesondere enthält $K(M)$ als Teilkörper $\mathbb{Q}$.) Wir zeigen die Eigenschaften (1) und (2):

(1) Die einfache Konstruktion haben wir eben schon verwendet.

(2) Sei $z \in K(M) \setminus \{0\}$. Wir zeigen $\sqrt{z} \in K(M)$. Schreibe $z = re^{i\alpha}$. Es ist $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\alpha/2}$. Die Winkelhalbierung ist einfach zu konstruieren. Es sind r, 0 und -1 in $K(M)$. Der Mittelpunkt der Strecke zwischen -1 und r ist $\frac{r-1}{2}$. Wir schlagen einen Kreis B um diesen Punkt, so dass -1 und r die Schnittpunkte von B mit der reellen Achse sind. Der Schnittpunkt von B mit der imaginären Achse heiße a. Die Punkte -1, r und a bilden die Ecken des rechtwinkligen Dreiecks im Thaleskreis, die Länge der Verbindung zwischen 0 und a bildet die Höhe h des Dreiecks. Der Höhensatz (mehrfache Anwendung des Satzes von Pythagoras) sagt $h^2 = |-1| \cdot r$. Es ist also $h = |a| \in K(M)$ Quadratwurzel von r.

Gilt $z^2+az+b=0$ mit $a, b \in K(M)$, so gilt $z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$, also $z \in K(M)$ nach dem vorherigen Argument.

(3) Sei nun K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, der die Eigenschaft (1) und (2) erfüllt. Wir haben $K(M) \subseteq K$ zu zeigen. Dazu zeigen wir per Induktion, dass $M^{(n)} \subseteq K$ gilt für jedes $n \geq 0$: Es gilt $M^{(0)} = M = \{0, 1\} \subseteq K$ trivialerweise. Sei $n \geq 0$, und wir nehmen an, wir hätten bereits $M^{(n)} \subseteq K$ gezeigt. Wir zeigen $M^{(n+1)} \subseteq K$: Sei $z \in M^{(n+1)}$, also $z \in A \cap B$, $A \neq B$, mit drei möglichen Fällen:

(a) A und B sind Geraden; $a_1,\, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $b_1,\, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, und $a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2 \in M^{(n)} \subseteq K$. Es gilt

$$A = \{a + tc \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{b + sd \mid s \in \mathbb{R}\},$$

mit $a = a_1$, $c = a_2 - a_1$, $b = b_1$, $d = b_2 - b_1 \in K$. Man kann dies auch so schreiben:

$$A = \{w \in \mathbb{C} \mid \overline{c}(w-a) = c(\overline{w-a})\},\; B = \{w \in \mathbb{C} \mid \overline{d}(w-b) = d(\overline{w-b})\},$$

[2]Anmerkung: Auf diese Eigenschaft (1) kann verzichtet werden, vgl. Lemma 5.12 unten; aus beweistechnischen Gründen fordern wie sie hier mit.

denn ist $\overline{c}(w-a)$ reell, so erhält man mit $t := \overline{c}(w-a)/\overline{c}c \in \mathbb{R}$, dass $w = a + tc$ gilt; umgekehrt folgt aus $w = a+tc$, dass $\overline{c}(w-a) = tc\overline{c}$ reell ist. Es ist also $(z, \overline{z})^t$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \overline{c} & -c \\ \overline{d} & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\overline{a} + \overline{c}a \\ -d\overline{b} + \overline{d}b \end{pmatrix}.$$

Diese ist eindeutig, denn z ist der einzige Schnittpunkt zweier ungleicher Geraden; gleichbedeutend: die Richtungsvektoren c und d sind nicht reell-proportional, was äquivalent ist dazu, dass die Determinante $-\overline{c}d + c\overline{d} \neq 0$ ist. Da alle Koeffizienten in K sind, gilt z, $\overline{z} \in K$, denn

$$\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{c} & -c \\ \overline{d} & -d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -c\overline{a} + \overline{c}a \\ -d\overline{b} + \overline{d}b \end{pmatrix}.$$

(b) A ist Gerade und B ein Kreis. Konkret:

$$\begin{aligned} A: &\quad \overline{b}(w-a) - b(\overline{w-a}) = 0 \\ B: &\quad (w-c)(\overline{w-c}) = s^2 \quad (= |w-c|^2\ ), \end{aligned}$$

mit $a, b \in M^{(n)} \subseteq K$, $b \neq 0$ (wie oben) und $c \in M^{(n)} \subseteq K$ und $s = |p-q|$, $p, q \in M^{(n)} \subseteq K$. Nutzt man nun $z \in A \cap B$, so sieht man, dass z Nullstelle eines quadratischen Polynoms $f \in K[T]$ ist, also wegen (2) folgt $z \in K$.

(c) A und B sind Kreise. Konkret:

$$\begin{aligned} A: &\quad (w-a)(\overline{w-a}) = r^2 \\ B: &\quad (w-b)(\overline{w-b}) = s^2, \end{aligned}$$

mit $a, b, r, s \in M^{(n)} \subseteq K$ mit $a \neq b$ (und r, s Beträge von Differenzen von Elementen in $M^{(n)}$). Nutzt man $z \in A \cap B$, zieht die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man mit $c := r^2 - s^2 + b\overline{b} - a\overline{a} \in K$, dass z den Gleichungen

$$(\overline{b-a})w + (b-a)\overline{w} = c, \quad (w-b)(\overline{w-b}) = s^2$$

genügt und wir nun Fall (b) anwenden können.

In jedem Fall ergibt sich also $z \in K$. Damit $M^{(n+1)} \subseteq K$, und schließlich $K(M) \subseteq M$. □

SATZ 5.4. *Für eine komplexe Zahl z sind äquivalent:*

(1) *z ist konstruierbar, d. h. $z \in K(\{0,1\})$.*
(2) *Es gibt einen Körperturm*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{n-1} \subset K_n$$

mit Schritten vom Grad $[K_i : K_{i-1}] = 2$ (für alle $1 \leq i \leq n$), welcher z erreicht, d. h. $z \in K_n$.

Der Beweis wird weiter unten geführt.

FOLGERUNG 5.5 (Notwendiges Kriterium für Konstruierbarkeit). *Jede konstruierbare komplexe Zahl z ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ und der Grad $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ ist eine Potenz von 2.* □

Die Umkehrung der Folgerung gilt nur in modifizierter Form, die wir auch erst mit mehr Theorie (Galoistheorie) beweisen können. Vgl. Satz VII.2.1.

FOLGERUNG 5.6. *Die Zahl π ist nicht konstruierbar. Damit ist die Quadratur des Kreises nicht lösbar.*

BEWEIS. π ist nicht algebraisch. (Satz von Lindemann[3] (1882).) □

[3] Auf den nicht-trivialen Beweis, der analytische Methoden verwendet, können wir hier nicht eingehen. Wir verweisen auf die Bücher von Lang, Stewart oder Morandi im Literaturverzeichnis.

FOLGERUNG 5.7. *Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar. Damit ist die Verdoppelung des Würfels nicht lösbar.*

BEWEIS. Für $\alpha = \sqrt[3]{2}$ gilt (vgl. Kriterium von Eisenstein) $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$. □

FOLGERUNG 5.8. *$\zeta = e^{2\pi i/9}$ (= 40°-Winkel) ist nicht konstruierbar. (Aber ζ^3 (= 120°-Winkel) schon.) Damit ist die Dreiteilung des Winkels nicht lösbar.*

BEWEIS. Es ist $\omega := \zeta^3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Diese Zahl ist konstruierbar. Angenommen, auch ζ selbst wäre konstruierbar. Dann auch $\zeta^{-1} = \bar{\zeta}$ und $\alpha := \zeta + \zeta^{-1}$. Offenbar gilt $\omega^3 = 1$ und $\omega^2+\omega+1 = 0$. Damit $\zeta^6+\zeta^3 = -1$. Es folgt $\alpha^3 = (\zeta+\zeta^{-1})^3 = \zeta^3+3\zeta+3\zeta^{-1}+\zeta^{-3} = 3\alpha-1$ (beachte $\zeta^{-3} = \zeta^6$). Das Polynom T^3-3T+1 ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$, weil es keine rationale Nullstelle hat. Also $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, was keine Zweierpotenz ist, Widerspruch. □

Die Nichtlösbarkeit der Verdoppelung des Würfels und der Dreiteilung des Winkels wurde zuerst von L. P. Wantzel 1837 gezeigt.

ÜBUNG 5.9. Das reguläre 5-Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

ÜBUNG 5.10. Das reguläre 7-Eck ist *nicht* konstruierbar.

BEMERKUNG 5.11. Wir werden später sehen, dass das reguläre n-Eck genau dann konstruierbar ist, wenn $\varphi(n)$ eine Potenz von 2 ist. Hier ist φ die Eulersche φ-Funktion, welche bei gegebener Primzahlfaktorisierung

$$n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$$

durch

$$\varphi(n) = \left(p_1^{r_1} - p_1^{r_1-1}\right) \cdots \left(p_t^{r_t} - p_t^{r_t-1}\right)$$

erklärt ist. Wir werden den Nachweis dieses Satzes an späterer Stelle führen, wenn uns stärkere Hilfsmittel der Galoistheorie zur Verfügung stehen.

Beweis von Satz 5.4. Wir nehmen von nun an $M = \{0, 1\}$ an. Dann ist die Eigenschaft (1), Abgeschlossenheit gegenüber Konjugation, in Satz 5.3 nicht nötig, sondern automatisch erfüllt. Dies folgt aus dem folgenden allgemeineren Lemma.

LEMMA 5.12. *Sei $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Ringautomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der abgeschlossen ist unter Lösungen von quadratischen Gleichungen. Dann gilt $\varphi(K) \subseteq K$.*

BEWEIS. Setze $K' = \varphi^{-1}(K)$. Seien $f' = T^2 + a'T + b' \in K'[T]$ und $x \in \mathbb{C}$ mit $f'(x) = 0$. Dann gilt mit $a = \varphi(a')$, $b = \varphi(b')$, $y = \varphi(x)$ und $f = T^2 + aT + b \in K[T]$:

$$f(y) = \varphi(f'(x)) = \varphi(0) = 0.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von K folgt $y \in K$ und damit $x = \varphi^{-1}(y) \in K'$. Also ist auch K' abgeschlossen unter Lösungen von quadratischen Gleichungen, und wegen der Minimalitätseigenschaft von K folgt $K \subseteq K'$. Sei nun $x \in K$. Dann gilt $x \in K'$, also $x = \varphi^{-1}(y)$ für ein $y \in K$. Es folgt $\varphi(x) = y \in K$. Es folgt $\varphi(K) \subseteq K$. □

$z \in \mathbb{C}$ heisst *erreichbar*, wenn es einen Körperturm

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

in $\mathbb{C}$ gibt, so dass alle $[K_i : K_{i-1}] = 2$ gilt $(1 \le i \le n)$, welcher z erreicht, d. h. $z \in K_n$. Mit $\widehat{\mathbb{Q}}$ bezeichnen wir die Menge aller erreichbaren $z \in \mathbb{C}$.

SATZ 5.13. *$\widehat{\mathbb{Q}}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft:*

- *Genügt $z \in \mathbb{C}$ einer quadratischen Gleichung über $\widehat{\mathbb{Q}}$, so gilt schon $z \in \widehat{\mathbb{Q}}$.*

BEWEIS. Seien z, $w \in \widehat{\mathbb{Q}}$. Es gibt Körpertürme

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

und

$$\mathbb{Q} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m$$

mit $[K_i : K_{i-1}] = 2$ und $[L_j : L_{j-1}] = 2$, mit $z \in K_n$ und $w \in L_m$. Es gibt α_i vom Grad 2 über K_{i-1} mit $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$ und β_j vom Grad 2 über L_{j-1} mit $L_i = L_{j-1}(\beta_j)$. Es ist dann $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ und $L_j = \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_j)$. Man betrachtet nun den Körperturm

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha_1) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1) \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m),$$

wobei in dem größten der Körper die Elemente z und w, und somit auch $z - w$ und z/w (sofern $w \neq 0$) liegen. Jedes β_j hat den Grad 2 über L_{j-1}, also einen Grad ≤ 2 über $K_n(\beta_1, \ldots, \beta_{j-1})$. Lässt man Indizes j mit $L_j = L_{j-1}$ aus, so erhält man einen Körperturm mit Gradschritten 2, der $z - w$ und z/w erreicht.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung von $z^2 + az + b = 0$, wobei a, $b \in \widehat{\mathbb{Q}}$ gilt. Dann werden a und b von einem gemeinsamen Körperturm der obigen Form erreicht, etwa a, $b \in K_n$. Es ist dann $z \in K_{n+1} := K_n(\sqrt{a^2/4 - b})$ und $[K_{n+1} : K_n] \leq 2$. □

SATZ 5.14. *Für $M = (\{0, 1\})$ gilt $K(M) = \widehat{\mathbb{Q}}$.*

BEWEIS. "$\subseteq$" Beide Teilkörper, $K(M)$ und $\widehat{\mathbb{Q}}$, sind abgeschlossen bzgl. Lösungen von quadratischen Gleichungen, und nach Satz 5.3 (und Lemma 5.12) ist $K(M)$ der kleinste solche. Also folgt $K(M) \subseteq \widehat{\mathbb{Q}}$.

"$\supseteq$" Sei

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

ein Körperturm in $\mathbb{C}$ mit $[K_i : K_{i-1}] = 2$ für $1 \leq i \leq n$. Man zeigt induktiv für $i = 0, \ldots, n$, dass $K_i \subseteq K(M)$ gilt. Für $i = 0$ ist dies wegen $K_0 = \mathbb{Q}$ klar. Es sei bereits gezeigt, dass $K_{i-1} \subseteq K(M)$ gilt. Sei $z \in K_i$. Wir können $z \notin K_{i-1}$ annehmen. Dann erfüllt z wegen $[K_i : K_{i-1}] = 2$ eine quadratische Gleichung $z^2 + az + b = 0$ mit a, $b \in K_{i-1}$. Es folgt a, $b \in K(M)$, und nach Satz 5.3 folgt $z \in K(M)$. □

6. Algebraischer Abschluss

In Satz 3.6 wurde gezeigt, dass ein Körper *innerhalb* eines vorgegebenen Erweiterungskörpers einen algebraischen Abschluss besitzt. Es gibt aber auch einen algebraischen Abschluss eines Körpers schlechthin. Der Beweis dafür ist aber wesentlich schwieriger.

DEFINITION 6.1. Ein Körper K heisst *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes Polynom $f \in K[T]$ vom Grad ≥ 1 eine Nullstelle in K besitzt.

Es folgt dann, dass jedes Polynom $0 \neq f \in K[T]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt: $f = c \cdot (T - a_1) \cdot \ldots \cdot (T - a_n)$ mit $c \in K^\times$, und $a_1, \ldots, a_n \in K$ (nicht notwendig paarweise verschieden). Offenbar gilt für einen Körper K: Genau dann ist K algebraisch abgeschlossen, wenn jedes irreduzible $f \in K[T]$ den Grad 1 hat.

BEISPIEL 6.2.
(1) *Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.* Dies ist der sog. Fundamentalsatz der Algebra, der am elegantesten in der Funktionentheorie bewiesen wird. Wir werden später als Satz VII.7.1 einen Beweis als Anwendung der Galoistheorie geben.
(2) Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht algebraisch abgeschlossen, denn z. B. hat das Polynom $T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$ keine reelle Nullstelle.

Wir skizzieren hier den Beweis, dass sich jeder Körper in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten läßt. Dazu bedarf es zweier Techniken, die wir verwenden, ohne detailliert darauf einzugehen:

(1) Polynomringe $R[X_i \mid i \in I]$ in einer beliebigen "Zahl" von Unbestimmten X_i ($i \in I$), wobei I eine beliebige Indexmenge ist, also auch unendlich sein darf. In jedem Polynom kommen allerdings immer nur Monome vor, die aus nur endlich vielen der Variablen bestehen.
(2) Das Lemma von Zorn. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und besagt, dass jede nichtleere (partiell) geordnete Menge $(X, \leq)$, die induktiv ist, ein maximales Element enthält. Dabei heisst induktiv, dass jede total geordnete Teilmenge L von X eine obere Schranke $s \in X$ hat (d. h. für alle $x \in L$ gilt $x \leq s$). Mit dem Lemma von Zorn zeigt man z. B. die Existenz von Basen in (beliebigen, auch nicht-endlich erzeugten) Vektorräumen. Oder die folgende Aussage:

LEMMA 6.3. *Ist R ein (kommutativer) Ring und $I \subsetneq R$ ein Ideal, so gibt es ein maximales Ideal M mit $I \subseteq M \subsetneq R$. (Es ist dann der Faktorring R/M ein Körper; dies folgt so wie in 1.10.)*

BEWEIS. Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller Ideal J mit $I \subseteq J \subsetneq R$. Diese Menge ist nichtleer (da sie I enthält), und induktiv geordnet: Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ total geordnet. Dann ist $S = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} J$ ein Ideal. Es gilt $S \in \mathcal{X}$, denn $S = R$ würde $1 \in S$ und damit $1 \in J$ und $J = R$ für ein $J \in \mathcal{X}$ nach sich ziehen. Offenbar ist S eine obere Schranke für $\mathcal{L}$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element $M \in \mathcal{L}$, und es folgt die Behauptung. □

SATZ 6.4 (Steinitz). *Sei K ein Körper. Dann gibt es einen algebraisch abgeschlossenen Körper L, der K als Teilkörper enthält.*

BEWEIS. Konstruiere einen Körper E_1, in dem jedes Polynom $f \in K[T]$ vom Grad ≥ 1 eine Nullstelle enthält. (Die Konstruktion geht auf Emil Artin zurück.) Für jedes solche Polynom f sei X_f eine Unbestimmte. Wir betrachten den Polynomring in diesen unendlich vielen Variablen,

$$R = K[X_f \mid f \in K[T]; \operatorname{grad}(f) \geq 1].$$

Jedes Element in R ist eine endliche Linearkombination von Monomen in den X_f [dabei kommen jeweils nur endlich viele Variablen vor]. Sei $I \subseteq R$ das Ideal, welches erzeugt wird von allen Polynomen in R von der Form $f(X_f)$ ($f \in K[T]$ vom Grad ≥ 1), also in jeweils einer ("seiner") Variablen.

Dieses Ideal I ist nicht ganz R: Sonst hätte man eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(X_1, \ldots, X_N) f_i(X_i) = 1$$

(nur endlich viele Variablen sind involviert, wobei wir abkürzend $X_i = X_{f_i}$ schreiben). Mit Satz 2.1 sieht man, dass es einen Erweiterungskörper E von K gibt, in dem alle Polynome $f_i(X_i)$ eine Nullstelle α_i besitzen (Übung!). Setzt man für alle X_i dann α_i ein, so erhält man $0 = 1$, Widerspruch.

Da $I \subsetneq R$ gibt es nach obigem Lemma ein maximales Ideal $M \subsetneq R$, welches I enthält. Es ist dann der Faktorring $E_1 := R/M$ ein Körper. Sei $\pi\colon R \longrightarrow R/M$ die kanonische Surjektion. Mit der Inklusion $K \subseteq R$ induziert dies einen (injektiven) Körperhomomorphismus $j\colon K \to E_1$. Identifikation von K mit $j(K) \subseteq E_1$ liefert dann eine Körpererweiterung E_1/K. Für jedes $f \in K[T]$ vom Grad ≥ 1 hat das Polynom $j^*(f)$ eine Nullstelle in E_1, nämlich $[X_f] \stackrel{def}{=} X_f + M$, denn: $j^*(f)([X_f]) = [f(X_f)] = [0]$, weil $f(X_f) \in I \subseteq M$.

Induktiv konstruiert man Körpererweiterungen

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots,$$

so dass jedes Polynom $f \in E_n[T]$ vom Grad ≥ 1 eine Nullstelle in E_{n+1} besitzt. Definiere dann L als die Vereinigung $\bigcup_{n \geq 1} E_n$. Dies ist offenbar wieder ein Körper, und ein Polynom

$f \in L[T]$ vom Grad ≥ 1 hat alle Koeffizienten in einem E_n liegend und daher eine Nullstelle in in $E_{n+1} \subseteq L$. □

FOLGERUNG 6.5. *Sei K ein Körper. Dann gibt es eine algebraische Körpererweiterung L/K, wobei L algebraisch abgeschlossen ist.*

BEWEIS. Sei E/K eine Körpererweiterung, so dass E algebraisch abgeschlossen ist. Sei L die Vereinigung aller Teilerweiterungen, die algebraisch über K sind, also (in der Notation von Satz 3.6) $L = \overline{K}$. Dann ist L algebraisch über K. Sei $f \in L[T]$ vom Grad ≥ 1. Dann hat f eine Nullstelle $\alpha \in E$, und nach Satz 3.6 ist α ist algebraisch über L. Ebenfalls nach Satz 3.6 ist α auch algebraisch über K. Es folgt $\alpha \in L$. □

DEFINITION 6.6. Sei K ein Körper. Ein algebraisch abgeschlossener Körper L, so dass L/K algebraisch ist, heisst ein *algebraischer Abschluss* von K. Wir schreiben dafür auch $\overline{K}$.

Nach der Folgerung besitzt also jeder Körper K einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit eines algebraischen Abschlusses (bis auf K-Isomorphie).

LEMMA 6.7. *Sei $\sigma\colon K \to L$ ein injektiver[4] Körperhomomorphismus von K in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L. Sei $E = K(\alpha)$, wobei α algebraisch über K ist mit Minimalpolynom $f \in K[T]$. Dann ist die Anzahl der möglichen Fortsetzungen von σ auf $K(\alpha)$ gleich der Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $\sigma^*(f)$ in L.*

BEWEIS. Sei β eine Nullstelle von $\sigma^*(f)$ in L. Sei $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i \in K(\alpha)$. Definiere $\overline{\sigma}(x) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i)\beta^i$. Dies definiert einen injektiven Körperhomomorphismus $\overline{\sigma}\colon K(\alpha) \to L$ mit $\overline{\sigma}_{|K} = \sigma$ (wie im Beweis von Satz 2.3). Für jede andere Nullstelle β' von $\sigma^*(f)$ in L erhält man analog eine weitere Fortsetzung. Sei umgekehrt $\tau\colon K(\alpha) \to L$ eine Fortsetzung von σ. Dann ist $\beta = \tau(\alpha) \in L$, und $\sigma^*(f)(\beta) = \tau(f(\alpha)) = \tau(0) = 0$, also ist β eine Nullstelle von $\sigma^*(f) \in L[T]$. Ferner gilt für jedes $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i \in K(\alpha)$ auch

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \tau(a_i)(\tau(\alpha))^i = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(a_i)\beta^i = \overline{\sigma}(x),$$

also $\tau = \overline{\sigma}$. □

SATZ 6.8 (Fortsetzungsexistenzsatz). *Sei E/K eine algebraische Erweiterung, sei $\sigma\colon K \to L$ ein injektiver Körperhomomorphismus in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L. Dann gibt es eine Fortsetzung von σ auf E.*

BEWEIS. Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller Paare (F, τ), wobei F ein Zwischenkörper von E/K ist und τ eine Fortsetzung von σ auf F. Für zwei solcher Paare (F, τ) und (F', τ') definiere $(F, \tau) \leq (F', \tau')$ falls $F \subseteq F'$ gilt und $\tau'_{|F} = \tau$. Es gilt $\mathscr{S} \neq \emptyset$. Diese Menge ist induktiv geordnet, denn ist $\{(F_i, \tau_i)\}$ eine total geordnete Teilmenge, so sei $F = \cup_i F_i$ und definiere τ auf F, so dass es auf F_i gleich τ_i ist. Dies ist eine obere Schranke für die total geordnete Teilmenge. Man kann dann Zorns Lemma anwenden, und erhält damit, dass $\mathscr{S}$ ein maximales Element (F, τ) enthält. Wir zeigen $F = E$. Andernfalls gäbe es ein $x \in E \setminus F$. Man kann nach dem vorherigen Lemma τ fortsetzen auf $F(x) \supsetneq F$, im Widerspruch zur Maximalität von (F, τ). □

FOLGERUNG 6.9. *Sei K ein Körper, und seien L und L' zwei algebraische Abschlüsse von K. Dann gibt es einen K-Isomorphismus $\sigma\colon L \stackrel{\sim}{\to} L'$.*

[4]Ein Ringhomomorphismus zwischen zwei Körpern ist trivialerweise immer injektiv, d. h. ein Monomorphismus. Wir schreiben das dennoch manchmal zur Betonung.

BEWEIS. Da L/K algebraisch ist, gibt es nach dem vorherigen Satz eine Fortsetzung $\sigma\colon L \to L'$ von $i\colon K \to L'$, $i(x) = x$ für alle $x \in K$. Es ist nur zu zeigen, dass σ surjektiv ist. Es ist aber das Bild $\sigma(L) \simeq L$ algebraisch abgeschlossen, und L' ist algebraisch über $\sigma(L)$. Also folgt $\sigma(L) = L'$. □

Die Ergebnisse dieses Abschnitts, Existenz sowie die Eindeutigkeit eines algebraischen Abschlusses, wurden zuerst von Ernst Steinitz (1871-1928) in einer grundlegenden Arbeit[5] gezeigt.

ÜBUNG 6.10. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma\colon L \to L$ ein K-Monomorphismus. Dann ist σ ein K-Automorphismus.

ÜBUNG 6.11. Jeder algebraisch abgeschlossene Körper K hat unendlich viele Elemente.

ÜBUNG 6.12. Der Körper der algebraischen komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

[5]E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, J. Reine Angew. Math. 137 (1910), 167-309. Steinitz war bis 1910 tätig an der TH Berlin-Charlottenburg, der heutigen TU Berlin.

KAPITEL VI

Galoistheorie

1. Die Galoisgruppe einer Körpererweiterung und Fixkörper

DEFINITION 1.1 (Galoisgruppe). Sei L/K eine Körpererweiterung. Die Menge aller K-Automorphismen $\sigma\colon L \to L$ ist ein Gruppe, wobei die Verknüpfung durch Komposition von Abbildungen gegeben ist. Diese Gruppe heisst die *Galoisgruppe*[1] der Körpererweiterung L/K und wird mit $\mathrm{Gal}(L/K)$ bezeichnet.

LEMMA 1.2. *Sei L/K und L'/K' Körpererweiterungen und $i\colon K \to K'$ ein Isomorphismus. Sei $\sigma\colon L/K \to L'/K'$ ein Isomorphismus von Erweiterungen. Ist $f \in K[T]$ und $x \in L$ eine Nullstelle von f, so ist $\sigma(x)$ eine Nullstelle von $i^*(f)$.*

BEWEIS. Sei $f = \sum_{j=0}^{n} a_j T^j$. Dann gilt

$$i^*(f)(\sigma(x)) = \sum_{j=0}^{n} i(a_j)(\sigma(x))^j = \sum_{j=0}^{n} \sigma(a_j)\sigma(x^j) = \sigma(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j) = \sigma(f(x)) = \sigma(0) = 0.$$

□

SATZ 1.3. *Seien $K(x)/K$ und $K'(x')/K'$ einfache algebraische Körpererweiterungen und $i\colon K \to K'$ ein Isomorphismus. Sei $f \in K[T]$ dass Minimalpolynom von x über K, und es gelte, dass $i^*(f)$ dass Minimalpolynom von x' über K' ist. Dann ist die Anzahl der Fortsetzungen $\sigma\colon K(x) \to K'(x')$ von i gleich der Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f in $K(x)$.*

BEWEIS. (Folgt ähnlich wie in Lemma V.6.7.) Seien $x = x_1, x_2, \ldots, x_s$ die verschiedenen Nullstellen von f in $L = K(x)$. Nach Satz V.2.4 gibt es einen Isomorphismus $\sigma\colon K(x) \to K'(x')$, der i fortsetzt und mit $\sigma(x) = x'$. Nach dem vorherigen Lemma überführt σ die verschiedenen Nullstellen $x_1, \ldots, x_s$ von f in die verschiedenen Nullstellen $\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_s)$ von $i^*(f)$. Ist nun $\tau\colon K(x) \to K'(x')$ ein beliebiger Isomorphismus, der i fortsetzt, so gibt es wieder nach dem vorherigen Lemma ein j mit $\tau(x) = \sigma(x_j)$. Da $1, x, \ldots, x^{n-1}$ eine K-Basis von $K(x)$ ist und τ eine Fortsetzung von $i\colon K \to K'$, ist τ durch das Bild $\tau(x)$ schon eindeutig festgelegt. Es gibt für τ also genau s Möglichkeiten. □

Spezialisiert man auf $K = K'$, $x = x'$ und $i = 1_K$, so erhält man:

FOLGERUNG 1.4. *Sei $K(x)/K$ eine einfach algebraische Körpererweiterung, und sei $f \in K[T]$ das Minimalpolynom von x über K. Dann ist die Ordnung von $\mathrm{Gal}(K(x)/K)$ gleich der Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f in $K(x)$. Insbesondere gilt*

$$|\mathrm{Gal}(K(x)/K)| \leq \mathrm{grad}(f) = [K(x) : K].$$

Es wird ein wichtiges Ziel sein, diese Aussage auf beliebige endliche Körpererweiterungen zu verallgemeinern.

BEMERKUNG 1.5. Die vorherige Aussage (und ihr Beweis) liefert ein Konstruktionsverfahren für $\mathrm{Gal}(K(x)/K)$; die Elemente von $\mathrm{Gal}(K(x)/K)$ korrespondieren mit den

[1] Nach dem französischen Mathematiker Évariste Galois (1811-1832).

(verschiedenen) Nullstellen von f in $K(x)$; sind $x_1, \dots, x_s \in K(x)$ die verschiedenen Nullstellen von f in $K(x)$, so induziert die Festsetzung $\sigma_i(x) = x_i$ ein eindeutig bestimmtes Element von $\mathrm{Gal}(K(x)/K)$.

BEISPIELE 1.6. (1) Betrachte $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Es ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$. Das Minimalpolynom $f = T^2 + 1$ von i über $\mathbb{R}$ hat die Nullstellen i und $-i$ (die beide in $\mathbb{R}(i)$ liegen). Es gibt also die Möglichkeiten $i \mapsto i$ und $i \mapsto -i$. Dies liefert die $\mathbb{R}$-Automorphismen $1_{\mathbb{C}}$ (die Identität) und τ definiert durch $\tau(a+bi) = a - bi$ (es ist also τ die komplexe Konjugation). $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \tau\} = \langle\tau\rangle$.

(2) Betrachte $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$. Hierbei bezeichnet $\sqrt[3]{2}$ die eindeutig bestimmte positive reelle dritte Wurzel aus 2. Die komplexen Nullstellen des Minimalpolynoms $T^3 - 2$ von $\alpha = \sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ sind $\alpha, e^{2\pi i/3}\alpha, e^{4\pi i/3}\alpha$. Wegen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$ liegt davon nur α in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Also besteht $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ nur aus dem neutralen Element.

(3) Betrachte $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$. Die komplexen Nullstellen des Minimalpolynoms $T^4 - 2$ von $\alpha = \sqrt[4]{2}$ über $\mathbb{Q}$ sind $\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha$. Davon sind nur α und $-\alpha$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Also besteht $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q})$ aus dem neutralen Element und dem $\mathbb{Q}$-Automorphismus σ der α auf $-\alpha$ schickt; dieser ist auf beliebigen Elementen von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ definiert durch

$$\sigma(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3) = a - b\alpha + c\alpha^2 - d\alpha^3.$$

(4) Betrachte $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(i)$. Es ist $f = T^4 - 2$ ein Polynom über $\mathbb{Q}(i)$, welches $\sqrt[4]{2}$ als Nullstelle hat. Wegen

$$8 = 2 \cdot 4 = [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(i)] \cdot [\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}]$$

folgt $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(i)] = 4$, und damit ist f auch das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{2}$ über $\mathbb{Q}(i)$. Alle Nullstellen $\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha$ (mit $\alpha = \sqrt[4]{2}$) liegen in $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$. Sei σ der $\mathbb{Q}(i)$-Automorphismus von $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$, der durch $\sigma\colon \alpha \mapsto i\alpha$ bestimmt ist. Dann gilt $\sigma^2\colon \alpha \mapsto -\alpha$, $\sigma^3\colon \alpha \mapsto -i\alpha$ und $\sigma^4 = 1_L$. Es ist also $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(i))$ zyklisch von der Ordnung 4, erzeugt von σ.

DEFINITION 1.7 (Fixkörper). Sei L ein Körper und G eine Gruppe von Automorphismen $\sigma\colon L \to L$. Dann ist $L^G = \{x \in L \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in G\}$ ein Teilkörper von L, der *Fixkörper* von G.

Insbesondere: Ist L/K eine Körpererweiterung und $U \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$ eine Untergruppe der Galoisgruppe, so ist der Fixkörper L^U ein Zwischenkörper von L/K.

BEMERKUNG 1.8. Sei L/K eine Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Es gilt $L^G \supseteq K$ und $\mathrm{Gal}(L/L^G) = \mathrm{Gal}(L/K)$, wie man leicht nachrechnet.

DEFINITION 1.9 (Galoiserweiterung). Eine algebraische Körpererweiterung L/K heisst *galoissch*, oder *Galoiserweiterung*, falls $L^{\mathrm{Gal}(L/K)} = K$ gilt.

BEISPIELE 1.10. (1) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Sei $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Es ist $\mathbb{C}^G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\} = \mathbb{R}$. Also ist $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ galoissch.

(2) Es ist $G = \{1\}$ die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$. Also gilt $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})^G = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \neq \mathbb{Q}$, d. h. diese Körpererweiterung ist nicht galoissch.

(3) Es ist $G = \{1, \sigma\}$ (wie oben beschrieben) die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$. Es ist dann

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})^G = \{x \mid \sigma(x) = x\} = \{a + c\sqrt{2} \mid a, c \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

also ist diese Körpererweiterung nicht galoissch.

(4) $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(i)$ ist galoissch. Wir haben eben schon gezeigt, dass die Galoisgruppe G zyklisch ist mit Erzeuger $\sigma\colon \alpha \mapsto i\alpha$. Es folgt weiter:

$$L^G = \{x \in \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) \mid \sigma(x) = x\}.$$

Jedes Element $x \in \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ lässt sich schreiben als

$$x = x_0 + x_1\alpha + x_2\alpha^2 + x_3\alpha^3$$

mit eindeutige x_0, x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{Q}(i)$. Damit ist

$$\sigma(x) = x_0 + x_1 i\alpha - x_2\alpha^2 - x_3 i\alpha^3,$$

Es folgt damit $x \in L^G$ genau dann, wenn $x_1 = ix_1$, $x_2 = -x_2$ und $x_3 = -ix_3$, also, wenn $x = x_0 \in \mathbb{Q}(i)$ gilt. Also $L^G = \mathbb{Q}(i)$. Damit ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(i)$ galoissch.

2. Zerfällungskörper

DEFINITION 2.1 (Zerfällungskörper). Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ mit $f \neq 0$. Ein Erweiterungskörper L von K heißt ein *Zerfällungskörper* von f über K, falls

- f zerfällt über L in Linearfaktoren, d. h. $f = c \cdot (T - a_1) \cdot \ldots \cdot (T - a_n)$ mit $c \in K^\times$ und $a_1, \ldots, a_n \in L$; und
- es gilt $L = K(a_1, \ldots, a_n)$.

Die zweite Bedingung ist offenbar gleichwertig dazu, dass es in L keinen kleineren Körper gibt, über dem f zerfällt. Außerdem gilt ersichtlich $[L : K] < \infty$.

BEISPIEL 2.2. Sei $f = T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$. Die komplexen Nullstellen von f sind $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3}$, $\sqrt[3]{2}e^{4\pi i/3}$. Ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3}, \sqrt[3]{2}e^{4\pi i/3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3}).$$

SATZ 2.3 (Existenz von Zerfällungskörpern). *Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ mit $f \neq 0$. Dann gibt es einen Zerfällungskörper L von f über K.*

BEWEIS. Über dem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ zerfällt f komplett in Linearfaktoren, $f = c \cdot \prod_{i=1}^{n}(T - a_i)$. Dann ist $L = K(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \overline{K}$ ein Zerfällungskörper von f über K. □

Man kann hier den Existenzsatz des algebraischen Abschlusses auch vermeiden. Stattdessen beweist man per Induktion nach $n = \operatorname{grad}(f)$ unter Verwendung des Satzes von Kronecker. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n > 1$. Es hat f einen irreduziblen Faktor $f_1 \in K[T]$. Nach Satz V.2.1 gibt es einen Erweiterungskörper $L_1 = K(a_1)$ von K mit $f_1(a_1) = 0$. In $L_1[T]$ gilt dann $f = (T - a_1)g$. Nach Induktionsvoraussetzung hat g einen Zerfällungskörper L/L_1. Dann ist offenbar L ein Zerfällungskörper von f über K.

SATZ 2.4 (Isomorphismen-Erweiterungs-Theorem). *Sei $i\colon K \to K'$ ein Körperisomorphismus, sei $0 \neq f \in K[T]$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K, sei L' ein Zerfällungskörper von $f' = i^*(f)$ über K'. Dann gibt es einen Isomorphismus von Erweiterungen $\sigma\colon L/K \to L'/K'$ mit $\sigma_{|K} = i$. Es gibt $\leq [L : K]$ solcher Isomorphismen. Zerfällt f in L in paarweise verschiedene Nullstellen, so ist die Anzahl $= [L : K]$.*

BEWEIS. Induktion nach $n = \operatorname{grad}(f)$. Das folgende Diagramm veranschaulicht die Vorgehensweise im Beweis.

(2.1)

$$\begin{array}{ccc} L & \overset{\sigma}{\dashrightarrow} & L' \\ | & & | \\ K(x) & \overset{j}{\dashrightarrow} & K'(x') \\ | & & | \\ K & \xrightarrow{\quad i \quad} & K' \end{array}$$

Man geht von unten nach oben vor. Zunächst erweitert man i durch j auf einen Zwischenkörper $K(x)$, wobei x eine Nullstelle von f in L ist, indem man Satz V.2.4 anwendet. Dann wird j per Induktionsvoraussetzung auf L erweitert. Die Details:

Existenz. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $n \geq 1$. Es gibt einen irreduziblen Faktor f_1 von f in $K[T]$. Dann ist $f_1' = i^*(f_1)$ ein irreduzibler Faktor von f'. Sei x eine Nullstelle von f_1 in L und x' eine Nullstelle von $i^*(f_1)$ in L'. Nach Satz V.2.4 gibt es einen Isomorphismus $j\colon K(x) \to K'(x')$, der i fortsetzt und x auf x' abbildet. Schreibe $f = (T-x)g$ und $f' = (T-x')g'$ mit $f \in K(x)[T]$ und $f' \in K'(x')[T]$. Dann gilt $f' = i^*(f) = j^*(f) = j^*(T-x)j^*(g) = (T-x')j^*(g)$, also $g' = j^*(g)$. Offenbar ist L Zerfällungskörper von g über $K(x)$ und L' Zerfällungskörper von g' über $K(x')$. Man wendet nun die Induktionsvoraussetzung auf g an.

Anzahl. Auch dies beweist man per Induktion, mit Lemma 1.2 und Satz 1.4, indem man $L/K(x)$ und $K(x)/K$ betrachtet. □

Spezialisiert[2] man auf $K = K'$ und $i = 1_K$, so erhält man:

Folgerung 2.5 (Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers). *Seien L und L' Zerfällungskörper des Polynoms $f \neq 0$ über K. Dann gibt es einen K-Isomorphismus $\sigma\colon L \to L'$.* □

Übung 2.6. Sei L der Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[T]$ vom Grad n. Dann gilt $[L : K] \leq n!$.

3. Vielfachheit von Nullstellen

Definition 3.1. Sei L/K eine Körpererweiterung und $0 \neq f \in K[T]$. Sei $a \in L$ eine Nullstelle von f. Die *Vielfachheit* e von a in L ist die natürliche Zahl $e \geq 1$ mit $f = (T-a)^e \cdot g$, wobei $g \in L[T]$ gilt mit $g(a) \neq 0$. Die Nullstelle a heisst einfach, falls $e = 1$ gilt, sonst mehrfach (doppelt, dreifach, etc.).

Definition 3.2. Sei K ein Körper. Definiere die (formale) *Derivation* $D\colon K[T] \to K[T]$ durch

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \;\mapsto\; \sum_{i=1}^{n} i a_i T^{i-1} =: D(f).$$

Es heisst $D(f)$ die (formale) Derivierte von f.

Folgende Eigenschaften sind leicht nachzurechnen:

- D ist K-linear.
- (Produktregel) $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ für alle $f, g \in K[T]$.

Proposition 3.3 (Derivationskriterium für Einfachheit von Nullstellen). *Sei K ein Körper und $0 \neq f \in K[T]$ ein Polynom.*

(1) *Sei a eine Nullstelle von f. Es ist a eine einfache Nullstelle genau dann, wenn $D(f)(a) \neq 0$ gilt.*

(2) *f hat in beliebigen Erweiterungskörpern von K nur einfache Nullstellen genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(f, D(f)) = 1$ gilt.*

(3) *Sei f zusätzlich irreduzibel. Genau dann hat f in jedem Erweiterungskörper von K nur einfache Nullstellen, wenn $D(f) \neq 0$ gilt.*

Beweis. Für (1) wendet man die Produktregel an auf $f = (T-a)^e \cdot g$, wobei $e \geq 1$ und $g(a) \neq 0$ gilt. Ist $e = 1$, so folgt $D(f) = g + (T-a)D(g)$, also $D(f)(a) = g(a) \neq 0$. Ist $e \geq 2$, so folgt $D(f)(a) = 0$ aus $D(f) = e(T-a)^{e-1}g + (T-a)^e D(g)$.

(2) Zunächst eine Vorüberlegung: Sei L/K eine Körpererweiterung. Dann gilt die Aussage $\mathrm{ggT}(f, D(f)) = 1$ in $L[T]$ genau dann, wenn sie in $K[T]$ gilt. Denn gilt dies in $K[T]$, so gibt es $g, h \in K[T]$ mit $1 = gf + hD(f)$. Dies ist auch eine Gleichung in $L[T]$, woraus sofort die Teilerfremdheit von f und $D(f)$ auch in $L[T]$ folgt. Haben umgekehrt f und $D(f)$ in $L[T]$ keine gemeinsamen Teiler, dann trivialweise auch in $K[T]$ nicht.

[2] Man beachte aber, dass für obigen Induktionsbeweis die allgemeinere Situation notwendig war.

Es genügt die Aussage in (2) zu zeigen für den Fall, dass L Zerfällungskörper von f über K ist. Sind f und $D(f)$ teilerfremd in $L[T]$, so können sie auch keine gemeinsame Nullstelle in L haben, und aus (1) folgt, dass alle Nullstellen von f in L einfach sein müssen. Haben dagegen f und $D(f)$ einen gemeinsamen Teiler $g \in L[T]$ vom Grad ≥ 1, so zerfällt g (wie f) in $L[T]$ komplett in Linearfaktoren, und es folgt, dass f und $D(f)$ eine gemeinsame Nullstelle in L haben. Aus (1) folgt dann die Mehrfachheit dieser Nullstelle von f.

(3) Gilt $D(f) \neq 0$, muss wegen $\operatorname{grad}(D(f)) \leq \operatorname{grad}(f)-1$ der ggT von f und $D(f)$ eine Einheit sein. Nach (2) hat f in jedem Erweiterungskörper von K nur einfache Nullstellen. Ist dies umgekehrt der Fall, so ist ebenfalls nach (2) der ggT von f und $D(f)$ eine Einheit, also muss $D(f) \neq 0$ gelten. □

Man beachte, dass man mit dem nützlichen Kriterium (2) bzw. (3) sehr effizient Einfachheit aller Nullstellen von f prüfen kann, ohne diese Nullstellen bzw. den Zerfällungskörper von f überhaupt zu kennen.

4. Endliche Körper

DEFINITION 4.1. (Erinnerung: Vgl. Aufgabe II.7.2.) Sei K ein Körper. Gibt es keine ganze Zahl $n \geq 1$ mit $n \cdot 1_K = 0$, so ist die *Charakteristik* von K gleich 0, also $\operatorname{Char}(K) = 0$. Gibt es eine solche Zahl n, so ist die kleinste solche Zahl eine Primzahl p, und diese ist dann die Charakteristik von K. Im ersten Fall ist der *Primkörper* $\Pi(K)$, der kleinste in K enthaltene Teilkörper, isomorph zu $\mathbb{Q}$, im zweiten Fall ist es ein Körper mit p Elementen.

Sei K ein Körper und $p = \operatorname{Char}(K)$ eine Primzahl. Die Abbildung $\mu\colon \mathbb{Z} \to \Pi(K)$, $n \mapsto n \cdot 1_K$ ist offenbar ein Ringhomomorphismus mit $\operatorname{Kern}(\mu) = p\mathbb{Z}$. Der Homomorphiesatz für Ringe liefert nun:

PROPOSITION 4.2. *Sei K ein Körper von Primzahlcharakteristik p. Dann ist der Primkörper $\Pi(K)$ zum Restklassenkörper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorph.*

BEWEIS. Es ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Bild}(\mu) \subseteq \Pi(K) \subseteq K$. Nach Lemma 1.10 ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper, also auch $\operatorname{Bild}(\mu)$. Da der Primkörper $\Pi(K)$ der kleinste Teilkörper von K ist, folgt $\Pi(K) = \operatorname{Bild}(\mu)$. □

SATZ 4.3. *Sei K ein endlicher Körper. Dann gibt es eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $|K| = p^n$.*

BEWEIS. Die Charakteristik von K ist eine Primzahl p, und es ist $n \overset{def}{=} [K : \Pi(K)] < \infty$. D. h. K ist ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\Pi(K) = \mathbb{F}_p$, hat also p^n Elemente. □

SATZ 4.4. *Sei K ein Körper, und G eine endliche Untergruppe der Einheitengruppe $E(K) = (K \setminus \{0\}, \cdot)$. Dann ist G zyklisch.*

BEWEIS. $G = E(K)$ ist eine abelsche Gruppe. Sei $n = |G|$. Dann gilt $x^n = 1$ für jedes $x \in G$. Sei $m \overset{def}{=} \min\{i \geq 1 \mid x^i = 1 \text{ für alle } x \in G\}$. Es gilt also $x^m = 1$ für jedes $x \in G$, d. h. jedes $x \in G$ ist Nullstelle des Polynoms $T^m - 1 \in \Pi(K)[T]$. Man hat also (mind.) n Nullstellen, andererseits hat es höchsten m Nullstellen. Es folgt $m = n$.

Zu zeigen ist noch, dass es ein $x \in G$ der Ordnung m gibt: Sei $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ die Primfaktorzerlegung von m ($p_1, \dots, p_r$ paarweise verschieden prim, $\alpha_i \geq 1$). Wegen der Minimalität ist m ein Teiler des kgV's der Ordnungen aller Elemente von G, also gibt es zu jedem i ein $g_i \in G$, dessen Ordnung von $p_i^{\alpha_i}$ geteilt wird. Ist $k_i p_i^{\alpha_i} = |g_i|$, so hat $g_i^{k_i}$ die Ordnung $p_i^{\alpha_i}$. Das Element $g \overset{def}{=} g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_r^{k_r}$ hat dann die Ordnung $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} = m$, was zu zeigen war. □

SATZ 4.5. *Sei K ein endlicher Körper mit $q = p^n$ Elementen (p prim). Dann ist K ein Zerfällungskörper des Polynoms $T^q - T \in \mathbb{F}_p[T]$.*

BEWEIS. Ist $x \in K$, $x \neq 0$, also $x \in E(K)$, so gilt nach dem kleinen Satz von Fermat $x^{q-1} = 1$, damit $x^q = x$. Letzteres gilt auch für $x = 0$. Die q verschiedenen Elemente aus K sind also gerade die Nullstellen $x_1, \ldots, x_q$ des Polynoms $T^q - T \in \Pi(K)[T]$. Da sicherlich auch $K = \Pi(K)(x_1, \ldots, x_q)$ gilt, ist K der Zerfällungskörper des Polynoms $T^q - T$ über $\Pi(K) \simeq \mathbb{F}_p$. □

SATZ 4.6. *Sei $q = p^n$ (mit p prim und $n \geq 1$).*

(1) *Es gibt einen Körper K mit q Elementen.*
(2) *Je zwei Körper mit q Elementen sind isomorph.*

BEWEIS. (1) Sei K Zerfällungskörper des Polynoms $f = T^q - T \in \mathbb{F}_p[T]$. Die Menge N der Nullstellen von f in K bildet einen Teilkörper von K: Denn sind $x, y \in K$ Nullstellen von f, so gilt wegen $p \mid \binom{p}{i}$ für $1 \leq i \leq p-1$

$$(x+y)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i y^{p-i} = x^p + y^p$$

und dann per Induktion nach n

$$(x+y)^q = x^q + y^q = x + y,$$

und außerdem ist

$$(xy)^q = x^q y^q = xy,$$

und ebenso für $x \neq 0$, $(x^{-1})^q = (x^q)^{-1} = x^{-1}$, und $(-x)^q = -x$ (unterscheide die Fälle p gerade bzw. ungerade). Also ist N ein Teilkörper von K. Da aber f schon über N in Linearfaktoren zerfällt, gilt $N = K$. Damit besteht K aus den Nullstellen von f. Nun ist $D(f) = qT^{q-1} - 1 = -1$, und daher ist $\mathrm{ggT}(f, D(f)) = 1$ und es hat f nur einfache Nullstellen, vgl. Proposition 3.3. Damit hat f genau q verschiedene Nullstellen, und K ist ein Körper mit q Elementen.

(2) Folgt aus Satz 4.5 und der Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers (genauer Satz 2.4). □

Ein Körper mit $q = p^n$ Elementen wird auch mit $\mathbb{F}_q$ bezeichnet.

BEMERKUNG 4.7. In Bezug auf *Schief*körper gilt der folgende Satz von Wedderburn[3]: *Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ, also ein Körper.*

5. Separabilität

DEFINITION 5.1. Ein irreduzibles Polynom $f \in K[T]$ heißt *separabel*, falls es im algebraischen Abschluss $\overline{K}$ (oder in seinem Zerfällungskörper) nur einfache Nullstellen hat. Ein beliebiges Polynom $0 \neq f \in K[T]$ heißt *separabel*, wenn jeder seiner irreduziblen Faktoren separabel ist.

BEMERKUNG 5.2. Nach Proposition 3.3 (3) ist ein irreduzibles Polynom $f \in K[T]$ separabel genau dann, wenn $D(f) \neq 0$ gilt.

DEFINITION 5.3. Sei L/K eine Körpererweiterung, sei $x \in L$ algebraisch über K. Dann heißt x *separabel* über K, falls das Minimalpolynom von x über K separabel ist. Eine algebraische Körpererweiterung L/K heißt *separabel*, falls jedes $x \in L$ separabel über K ist.

SATZ 5.4. *Jede algebraische Körpererweiterung L/K von einem Körper K der Charakteristik null ist separabel.*

[3]Für einen Beweis vgl. etwa [1, IX Satz 7.13].

BEWEIS. Sei $x \in L$ und $f = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$ das Minimalpolynom von x über K. Dann ist $D(f) = n \cdot T^{n-1} + \ldots \neq 0$. Also ist x separabel über K. □

LEMMA 5.5. *Sei $K \subseteq F \subseteq L$ ein Körperturm. Ist L/K separabel, so sind auch L/F und F/K separabel.*

BEWEIS. Sei L/K separabel. Sei $x \in L$. Das Minimalpolynom g von x über F ist (in $F[T]$) ein Teiler des Minimalpolynoms f von x über K. Mit f hat dann aber erst recht g nur einfache Nullstellen. Trivialerweise ist F/K separabel. □

SATZ 5.6 (Anzahl der Fortsetzungen). *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Sei $i\colon K \to \overline{K}$ ein injektiver Körperhomomorphismus (in den algebraischen Abschluss von K). Dann gibt es mindestens eine und höchstens $[L : K]$ verschiedene Fortsetzungen $\sigma\colon L \to \overline{K}$. Es gibt genau $[L : K]$ Fortsetzungen genau dann, wenn L/K eine separable Erweiterung ist.*

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den separablen Fall. Per Induktion nach $n = [L : K]$. Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Sei $n > 1$. Sei $\alpha \in L$, aber $\alpha \notin K$. Das Minimalpolynom f von α über K hat in $\overline{K}$ nur einfache Nullstellen. Ist $L = K(\alpha)$, so hat f genau n verschiedene Nullstellen und die Aussage folgt aus Lemma V.6.7. Gilt $L \neq K(\alpha)$, so sind $L/K(\alpha)$ und $K(\alpha)/K$ nach dem vorherigen Lemma separabel und jeweils vom Grad $< n$. Nun hat per Induktionsvoraussetzung (bzw. nach Lemma V.6.7) i die Fortsetzungen $\tau_1, \ldots, \tau_s\colon K(\alpha) \to \overline{K} = \overline{K(\alpha)}$, wobei $s = [K(\alpha) : K]$. Jedes τ_i hat nun per Induktionsannahme $[L : K(\alpha)]$ viele Fortsetzungen auf L, also gibt es insgesamt $[L : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] = [L : K]$ viele.

Um im allgemeinen Fall $\leq$ (und ≥ 1) zu bekommen geht man genauso per Induktion vor. Im nicht-separablen Fall findet man ein Element $\alpha \in L$, $\alpha \notin K$, welches nicht separabel über K ist. Dann hat i nach Lemma V.6.7 $< [K(\alpha) : K]$ viele Fortsetzungen auf $K(\alpha)$, und daher $< [L : K]$ Fortsetzungen auf L. □

SATZ 5.7 (Transitivität endlicher separabler Erweiterungen). *Sei $K \subseteq F \subseteq L$ ein Körperturm mit $[L : K] < \infty$. Sind L/F und F/K separabel, so ist auch L/K separabel.*

BEWEIS. Folgt mit dem Gradsatz aus Satz 5.6. □

Für Beispiele nicht-separabler endlicher Körpererweiterungen vergleiche man Proposition 12.9.

ÜBUNG 5.8 (Transitivität separabler Erweiterungen). Sei $K \subseteq F \subseteq L$ ein Körperturm. Sind L/F und F/K separabel, so ist auch L/K separabel.

6. Der Satz vom primitiven Element

Erinnerung: Für eine algebraische Körpererweiterung L/K heisst $\alpha \in L$ ein *primitives Element*, falls $L = K(\alpha)$ gilt.

SATZ 6.1 (Satz vom primitiven Element). *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung.*

(1) *Es gibt ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ genau dann, wenn es nur endlich viele Zwischenkörper von L/K gibt.*

(2) *Ist L/K separabel, so gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.*

BEWEIS. (1) "⇒" Gelte $L = K(\alpha)$. Sei F ein Zwischenkörper von L/K. Sei $f = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$ das Minimalpolynom von α über F und setze $E = K(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Dann gilt $F = E$: Denn $F \supseteq E$ ist klar. Es ist f offenbar irreduzibel auch über E, und ist daher das Minimalpolynom von x über E. Es ist $L = F(\alpha)$ und $L = E(\alpha)$, und es folgt $[L : F] = \operatorname{grad}(f) = [L : E]$, und aus dem Gradsatz folgt dann $F = E$. – Nun ist f ein

Teiler des Minimalpolynoms von α über K. Also gibt es für E wie oben nur endlich viele Möglichkeiten.

"$\Leftarrow$" Es habe L/K nur endlich viele Zwischenkörper. Ist K ein endlicher Körper, so auch L, und L/K ist einfach, da die Einheitengruppe $E(L)$ zyklisch ist. Also kann man im folgenden annehmen, dass K unendlich ist. Seien α, $\beta \in L$. Durchläuft c die unendlich vielen Elemente aus K, gibt es nur endlich viele verschiedene (Zwischen-) Körper $K(\alpha + c\beta)$. Es gibt also c_1, $c_2 \in K$ mit $c_1 \neq c_2$ und

$$F \overset{def}{=} K(\alpha + c_1\beta) = K(\alpha + c_2\beta).$$

Das bedeutet, dass $\alpha + c_1\beta$ und $\alpha + c_2\beta$ im selben Körper F liegen, also auch $(c_1 - c_2)\beta \in F$, damit $\beta \in F$, und dann auch $\alpha \in F$. Es folgt $K(\alpha, \beta) = F = K(\alpha + c_1\beta)$, also wird $K(\alpha, \beta)$ schon von einem Element erzeugt.

Allgemein ist L von der Form $K(a_1, \ldots, a_n)$. Per Induktion führt man dies aber auf den gerade behandelten Fall zweier Erzeuger zurück.

(2) Sei nun L/K separabel. Auch hier können wir annehmen, dass K ein unendlicher Körper ist, und wegen Lemma 5.5 per Induktion auch annehmen, dass $L = K(\alpha, \beta)$ gilt. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \colon L \to \overline{K}$ die verschiedenen Fortsetzungen von 1_K auf L, wobei $n = [L : K]$ gilt (nach Satz 5.6). Betrachte das Polynom

$$f = \prod_{i \neq j} \Big(\big(\sigma_i(\beta) - \sigma_j(\beta)\big)T + \big(\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha)\big) \Big) \in \overline{K}[T].$$

Für $i \neq j$ gilt $\sigma_i \neq \sigma_j$, und da $L = K(\alpha, \beta)$, folgt $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$ oder $\sigma_i(\beta) \neq \sigma_j(\beta)$, also $f \neq 0$. Da K unendlich ist, gibt es ein $c \in K$ mit $f(c) \neq 0$. Also sind die Elemente $\sigma_i(\alpha + c\beta)$ verschieden ($i = 1, \ldots, n$), und (vgl. Lemma 1.2) Nullstellen des Minimalpolynoms von $\alpha + c\beta$ über K. Also gilt $n \leq [K(\alpha + c\beta) : K] \leq [L : K] = n$, also folgt $L = K(\alpha + c\beta)$. □

Übung 6.2. Man bestimme alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$.

7. Normalität

Definition 7.1. Eine algebraische Körpererweiterung L/K heißt *normal*, falls für jedes (normierte) irreduzible Polynom $f \in K[T]$ gilt: Hat f eine Nullstelle $\alpha \in L$, so zerfällt f über L vollständig in Linearfaktoren.

Satz 7.2. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *L/K ist normal.*
(2) *L/K ist Zerfällungskörper eines Polynoms in $K[T]$.*

Beweis. (1)⇒(2) Sei L/K normal. Schreibe $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ sei f_i das Minimalpolynom von α_i über K. Sei $f = f_1 \ldots f_n$. Jedes f_i ist irreduzibel und zerfällt über L in Linearfaktoren, da L/K normal. Da L von den Nullstellen von f über K erzeugt wird, ist L ein Zerfällungskörper von f über K.

(2)⇒(1) Es sei L Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[T]$. Sei $g \in K[T]$ irreduzibel, ohne Einschränkung normiert. Es habe g eine Nullstelle $\alpha \in L$. Sei $M \supseteq L$ ein Zerfällungskörper von fg über K. Sei β eine weitere Nullstelle von g in M. Sei $\gamma = \alpha$ oder $\gamma = \beta$. Dann gilt

$$[L(\gamma) : L] \cdot [L : K] = [L(\gamma) : K] = [L(\gamma) : K(\gamma)] \cdot [K(\gamma) : K].$$

Nun sind $K(\alpha)$ und $K(\beta)$ nach Satz V.2.3 K-isomorph. Außerdem ist $L(\gamma)$ offenbar ein Zerfällungskörper von f über $K(\gamma)$. Daher gibt es nach Satz 2.4 einen Isomorphismus von $L(\alpha)$ nach $L(\beta)$, der obigen K-Isomorphismus fortsetzt. Man bekommt $[L(\alpha) : K(\alpha)] = [L(\beta) : K(\beta)]$, was zusammen $[L(\alpha) : K] = [L(\beta) : K]$ und schließlich durch Kürzen $[L(\alpha) : L] = [L(\beta) : L]$ ergibt. Da $\alpha \in L$, folgt $1 = [L(\alpha) : L] = [L(\beta) : L]$, was aber $\beta \in L$ bedeutet. Also liegen alle Nullstellen von g in L. □

FOLGERUNG 7.3. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *L/K ist normal und separabel.*
(2) *L ist Zerfällungskörper eines separablen Polynoms in $K[T]$.*

BEWEIS. (1)⇒(2) ergibt sich sofort aus dem vorherigen Satz und aus der Definition eines separablen Polynoms.

(2)⇒(1) Sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ Zerfällungskörper eines separablen Polynoms in $f \in K[T]$, wobei die α_i die Nullstellen von f in L sind. Nach dem vorherigen Satz ist L/K normal. Jedes α_i ist Nullstelle eines irreduziblen Faktors f_i von f. Da f_i separabel über K ist, folgt dass jedes α_i separabel über K ist. Per Induktion und der Transitivität der Separabilität genügt es zu zeigen, dass $K(\alpha)/K$ separabel ist, wenn das Minimalpolynom von α über K separabel ist. Dies folgt aber aus Lemma V.6.7 und Satz 5.6. □

SATZ 7.4 (Einschränkungssatz). *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Äquivalent sind:*

(1) *L/K ist normal.*
(2) *Für jede Körpererweiterung F/L und jeden K-Automorphismus $\sigma\colon F \to F$ gilt $\sigma(L) \subseteq L$.*
(3) *Es gibt eine normale Körpererweiterung F/K, die L enthält, so dass für jeden K-Automorphismus $\sigma\colon F \to F$ gilt $\sigma(L) \subseteq L$.*

BEWEIS. (1)⇒(2) Sei L/K normal, F/L eine Körpererweiterung und $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/K)$. Sei $\alpha \in L$. Das Minimalpolynom f von α über K zerfällt über L in Linearfaktoren. Da $\beta = \sigma(\alpha)$ auch eine Nullstelle von f ist, folgt $\sigma(\alpha) \in L$.

(2)⇒(3) Es ist L von der Form $L = K(x_1, \ldots, x_n)$. Dabei kann man annehmen, dass $x_1 = \alpha$ gilt. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ sei f_i das Minimalpolynom von x_i über K; also $f_1 = g$. Setze $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$. Sei $F \supseteq L$ Zerfällungskörper von f über K. Dann ist F/K eine normale Körpererweiterung, mit der sich (3) aus (2) ergibt.

(3)⇒(1) Es ist F Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[T]$. Sei $g \in K[T]$ irreduzibel, und es habe g eine Nullstelle α in L. Da F/K normal ist, zerfällt g über F in Linearfaktoren. Sei $\beta \in F$ eine weitere Nullstelle von g. Nach Satz V.2.3 gibt es einen K-Isomorphismus $i\colon K(\alpha) \to K(\beta)$ mit $i(\alpha) = \beta$. Da offenbar F auch Zerfällungskörper von f über $K(\alpha)$ und über $K(\beta)$ ist, gibt es nach Satz 2.4 einen (K-) Automorphismus $\sigma\colon F \to F$, der i fortsetzt. Nach Voraussetzung gilt dann $\sigma(L) \subseteq L$. Es folgt $\beta = i(\alpha) = \sigma(\alpha) \in L$, d. h. alle Nullstellen von g liegen schon in L. □

ÜBUNG 7.5. Sei L/K algebraisch. Die Äquivalenz von (1) und (2) im vorherigen Satz gilt auch unter dieser schwächeren Bedingung. Außerdem sind (1) und (2) äquivalent zu:

(4) Ist $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von L und $\tau\colon L \to \overline{L}$ ein K-Monomorphismus, so gilt $\tau(L) = L$.

ÜBUNG 7.6. Sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/K$ algebraisch mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ separabel über K. Dann ist L/K separabel.

ÜBUNG 7.7. Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$. Dann ist $\overline{K}/K$ eine normale Körpererweiterung.

8. Der Satz von Artin

LEMMA 8.1. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, und es gebe eine natürliche Zahl $n \geq 1$, so dass jedes Element α von L separabel und vom Grad $\leq n$ über K ist. Dann gilt $[L : K] \leq n$.*

BEWEIS. Sei $\alpha \in L$ so dass $m = [K(\alpha) : K]$ maximal ist. Es gilt $m \leq n$. Behauptung: Es gilt $L = K(\alpha)$. Andernfalls gibt es ein $\beta \in L$ mit $\beta \notin K(\alpha)$. Dann ist $K(\alpha, \beta)$ eine endliche Körpererweiterung, die (trivialerweise) separabel ist. Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es ein $\gamma \in L$ mit $K(\alpha, \beta) = K(\gamma)$. Es ist aber $[K(\gamma) : K] = [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K] > m$, Widerspruch. □

SATZ 8.2 (Emil Artin). *Sei L ein Körper und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von L, der Ordnung n. Sei $K = L^G$ der Fixkörper. Dann ist L/K eine normale und separable Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = n$ und mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K) = G$.*

BEWEIS. Sei $\alpha \in L$. Sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in G$ ein maximales System, so dass $\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_r(\alpha)$ verschieden sind. Sei

$$f = \prod_{i=1}^{r} \big(T - \sigma_i(\alpha)\big) \in L[T].$$

Sei $\sigma \in G$. Dann permutiert σ die Elemente $\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_r(\alpha)$, und daher gilt $\sigma^*(f) = f$. Die Koeffizienten von f bleiben also fix unter allen $\sigma \in G$, und daher liegen die Koeffizienten in $K = L^G$, d. h. $f \in K[T]$. Ferner gilt $f(\alpha) = 0$. Da f nur einfache Nullstellen hat, folgt, dass α separabel über K ist. Ferner ist $[K(\alpha) : K] \leq r \leq n$. Mit dem vorherigen Lemma folgt $[L : K] \leq n$.

Ist $\alpha \in L$ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $g \in K[T]$, so ist dieses (bis auf Normierung) das Minimalpolynom von α über K und daher ein Teiler von obigem Polynom f, und zerfällt daher in $L[T]$ (wie f) komplett in Linearfaktoren. Daher ist L/K auch normal.

Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.

Es gilt $G \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$: Denn jedes $\sigma \in G$ fixiert jedes $x \in K = L^G$. Es ist $|\mathrm{Gal}(L/K)|$ nach Folgerung 1.4 die Anzahl der verschiedenen Nullstellen des Minimalpolynoms g von α über K, also mit obigen Bezeichnungen $\leq r \leq n = |G|$. Es folgt $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Aus Folgerung 1.4 folgt außerdem $n = |\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L : K]$. Damit ist alles bewiesen. □

FOLGERUNG 8.3. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann gilt $|\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L : K]$. Genauer ist $|\mathrm{Gal}(L/K)|$ ein Teiler von $[L : K]$. Es gilt Gleichheit genau dann, wenn L/K eine Galoiserweiterung ist.*

BEWEIS. Sei $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ und L^G der Fixkörper. Zunächst ist festzuhalten, dass G endlich ist. Denn sei $\tau\colon L \to \overline{K}$ ein festgewählter injektiver Körperhomomorphismus, der 1_K fortsetzt (existiert!). Sind $\sigma, \sigma' \in G$ mit $\sigma \neq \sigma'$, so sind $\tau \circ \sigma \neq \tau \circ \sigma'$ ebenso Fortsetzungen von 1_K. Nach Satz 5.6 gibt es aber höchstens $[L : K]$ viele solcher Fortsetzungen, insbesondere ist $|G| \leq [L : K]$ endlich.

Nach dem vorherigen Satz und dem Gradsatz gilt $|G| = [L : L^G] \mid [L : K]$. Wiederum mit dem Gradsatz folgt

$$|G| = [L : K] \quad \Leftrightarrow \quad [L^G : K] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L^G = K \quad \Leftrightarrow \quad L/K \text{ galoissch.}$$

□

FOLGERUNG 8.4. *Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung. Dann ist L/K separabel und normal.*

BEWEIS. Für $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ gilt $L^G = K$, und die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz von Artin. □

9. Charakterisierung von Galoiserweiterungen

SATZ 9.1. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

(1) *L/K ist galoissch.*

(2) *L/K ist normal und separabel.*

(3) *Es gilt $|\operatorname{Gal}(L/K)| = [L : K]$.*

BEWEIS. Folgerung 8.3 zeigt die Äquivalenz von (1) und (3). Es fehlt nur noch der Beweis von (2)⇒(3). Ist L/K separabel und vom Grad n, so ist nach dem Satz vom primitiven Element $L = K(\alpha)$ einfach. Sei f das Minimalpolynom von α über K. Dann hat wegen der Normalität und der Separabilität f genau n verschiedene Nullstellen in L, und $|\operatorname{Gal}(L/K)| = n$ folgt aus Folgerung 1.4. □

FOLGERUNG 9.2. *Sei L/K endlich galoissch und M ein Zwischenkörper. Dann ist L/M galoissch.*

BEWEIS. Es ist L/K normal und separabel. Dann ist L/M nach Lemma 5.5 separabel, und offenbar ist L als Zerfällungskörper eines Polynoms f über K auch Zerfällungskörper von f über M, also ist L/M auch normal. □

FOLGERUNG 9.3. *Jede endliche Galoiserweiterung ist einfach algebraisch.*

BEWEIS. Da Galoiserweiterungen insbesondere separabel sind, folgt die Aussage aus dem Satz vom primitiven Element. □

Ergänzung: der algebraische Fall.

SATZ 9.4. *Sei L/K algebraisch. Dann sind äquivalent:*

(1) *L/K ist galoissch.*

(2) *L/K ist normal und separabel.*

BEWEIS. Setze $G = \operatorname{Gal}(L/K)$.

(1)⇒(2) Es gelte $L^G = K$. Sei $\alpha \in L$ und $f = \operatorname{MIPO}(\alpha/K)$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die verschiedenen Elemente aus der Menge $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in G\}$; diese Menge ist endlich, weil sie aus Nullstellen (in L) von f besteht (Lemma 1.2). Setze

$$g := \prod_{i=1}^{n} (T - \alpha_i) \in L[T].$$

Für jedes $\sigma \in G$ gilt offenbar $\sigma^*(g) = g$. Es folgt $g \in L^G[T] = K[T]$. Da f als Minimalpolynom g teilt, folgt, dass mit g auch f über L in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

(2)⇒(1) Sei L/K normal und separabel. Sei $\overline{K} = \overline{L}$ der algebraische Abschluss von K. Sei $\alpha \in L^G$ und $f = \operatorname{MIPO}(\alpha/K)$. Sei $\iota\colon K(\alpha) \to \overline{K}$ ein K-Monomorphismus. Dieser erweitert sich zu einen K-Monomorphismus $\sigma\colon L \to \overline{K}$ (Satz V.6.8.) Da L/K normal ist, folgt $\sigma(L) = L$, vgl. Aufgabe 7.5. Also $\sigma \in G$. Wegen $\sigma(\alpha) = \alpha$, folgt ι ist die identische Abbildung auf $K(\alpha)$. Es folgt, dass α die einzige Nullstelle von f in $\overline{K}$ ist. Weil f separabel ist, folgt notwendig $f = T - \alpha$, und damit $\alpha \in K$. □

ÜBUNG 9.5. Sei L/K eine galoissche, aber nicht endliche Körpererweiterung. Dann hat $\operatorname{Gal}(L/K)$ unendlich viele Elemente. (Hinweis: Satz 5.6 und Aufgabe 7.5.)

10. Der Hauptsatz der Galoistheorie

LEMMA 10.1. *Sei L/K eine Körpererweiterung und M ein Zwischenkörper. Ist $\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)$, so ist*

$$\operatorname{Gal}(L/\sigma(M)) = \sigma \operatorname{Gal}(L/M)\sigma^{-1}.$$

BEWEIS. Ist τ ein M-Automorphismus von L, so ist $\sigma\tau\sigma^{-1}$ offenbar ein $\sigma(M)$-Automorphismus von L, und jeder solche ist von dieser Form. □

Sei L/K eine Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Bezeichne mit $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zwischenkörper M von L/K, also so, dass $K \subseteq M \subseteq L$ ein Körperturm ist. Bezeichne mit $\mathcal{U}$ die Menge aller Untergruppen von G. Beides sind geordnete Mengen bzgl. der Inklusion.

SATZ 10.2 (Hauptsatz der Galoistheorie). *Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung vom Grad $n = [L : K]$ und mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Dann gilt:*

(1) *Es ist $|G| = n$.*

(2) *Die Abbildungen*

$$\Phi\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{U},\ M \mapsto \mathrm{Gal}(L/M)$$

und

$$\Psi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{Z},\ U \mapsto L^U$$

sind ordnungs-umkehrend und zueinander invers.

(3) *Für jeden Zwischenkörper M von L/K ist die Körpererweiterung L/M galoissch; dagegen ist M/K galoissch genau dann, wenn $\Phi(M) = \mathrm{Gal}(L/M) \subseteq G$ ein Normalteiler ist. In diesem Fall hat man eine kanonische Isomorphie von Gruppen*

$$\mathrm{Gal}(M/K) \simeq \frac{\mathrm{Gal}(L/K)}{\mathrm{Gal}(L/M)}.$$

BEWEIS. (1) Folgt aus Satz 9.1.

(2) Sei M ein Zwischenkörper, also $M \in \mathcal{Z}$. Es ist L/M galoissch nach Folgerung 9.2. Mit $U = \mathrm{Gal}(L/M) \in \mathcal{U}$ folgt also $L^U = M$. Mit anderen Worten, es gilt $\Psi\Phi(M) = M$, also $\Psi \circ \Phi = 1_{\mathcal{Z}}$.

Sei umgekehrt U eine Untergruppe von G. Dann gilt nach dem Satz von Artin $\mathrm{Gal}(L/L^U) = U$, mit anderen Worten $\Phi\Psi(U) = U$. Damit gilt auch $\Phi \circ \Psi = 1_{\mathcal{U}}$.

(3) Der erste Teil wurde schon gezeigt. Sei M/K galoissch (äquivalent: normal). Sei $\sigma \in G$. Nach Satz 7.4 gilt dann $\sigma(M) = M$, also $\sigma_{|M} \in \mathrm{Gal}(M/K)$. Wegen

$$\mathrm{Gal}(L/\sigma(M)) = \sigma\,\mathrm{Gal}(L/M)\sigma^{-1}$$

folgt, dass $\mathrm{Gal}(L/M)$ ein Normalteiler in G ist.

Ist umgekehrt $\mathrm{Gal}(L/M)$ ein Normalteiler in G, so folgt aus dieser Formel die Gleichheit $\mathrm{Gal}(L/\sigma(M)) = \mathrm{Gal}(L/M)$, also $\Phi(\sigma(M)) = \Phi(M)$ für jedes $\sigma \in G$. Aus Teil (2) folgt $\sigma(M) = M$ für jedes $\sigma \in G$, also ist M/K normal (also galoissch) nach Satz 7.4.

Sind diese Bedingungen nun erfüllt, so ist $\sigma \mapsto \sigma_{|M}$ ein Gruppenhomomorphismus $\rho\colon G = \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(M/K)$. Dessen Kern ist offenbar gerade durch $\mathrm{Gal}(L/M)$ gegeben. Ferner ist ρ surjektiv aufgrund der Liftungseigenschaft von Zerfällungskörpern. Es induziert ρ nach dem Homomorphiesatz also einen Isomorphismus $\mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(M/K)$. □

11. Ein Beispiel

BEISPIEL 11.1. Wir betrachten die Körpererweiterung $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ über $K = \mathbb{Q}$.

(1) Offenbar ist L der Zerfällungskörper des separablen Polynoms $f = T^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$, denn die komplexen Nullstellen von f sind $\alpha = \sqrt[4]{2}$, $i\alpha$, $-\alpha$, $-i\alpha$, und es ist $L = \mathbb{Q}(\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha)$. Daher ist L/K galoissch.

(2) Es gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$, denn $T^4 - 2$ ist nach Eisenstein das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Es ist $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$, also $i \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. Andererseits ist i Nullstelle des Polynoms $T^2 + 1 \in \mathbb{Q}(\alpha)[T]$, und daher gilt $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$. Es folgt daher

$$[L : K] = [\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 4 = 8.$$

(3) Betrachte die Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(i)$. Über diesen ist L jeweils einfach, erzeugt von i bzw. von α mit Minimalpolynomen T^2+1 über $\mathbb{Q}(\alpha)$ bzw. T^4-2 über $\mathbb{Q}(i)$. Nach Satz V.2.3 gibt es einen $\mathbb{Q}(i)$-Automorphismus σ von L mit $\sigma(\alpha) = i\alpha$ und einen $\mathbb{Q}(\alpha)$-Automorphismus τ von L mit $\tau(i) = -i$. Insbesondere sind dies K-Automorphismen, also σ, $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$.

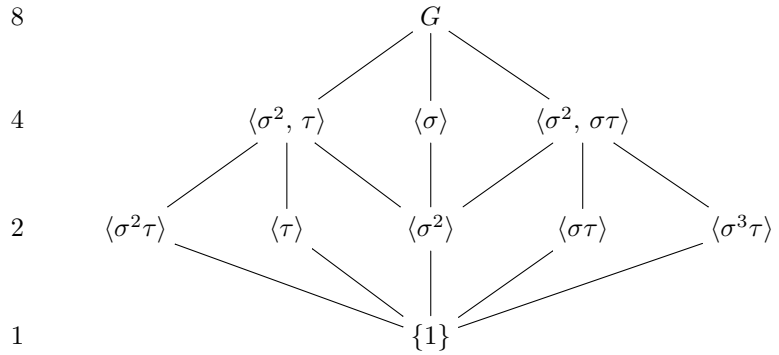
Automorphismus	Wirkung auf α	Wirkung auf i
1	α	i
σ	$i\alpha$	i
σ^2	$-\alpha$	i
σ^3	$-i\alpha$	i
τ	α	$-i$
$\sigma\tau$	$i\alpha$	$-i$
$\sigma^2\tau$	$-\alpha$	$-i$
$\sigma^3\tau$	$-i\alpha$	$-i$

Da dies 8 verschiedene K-Automorphismen sind, sind dies auch schon alle Elemente von $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Die abstrakte Beschreibung von G ist

$$G = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1 = \tau^2, \tau\sigma = \sigma^3\tau \rangle.$$

Dies ergibt also die Diedergruppe $\mathbb{D}_4$ vom Grad 4, vgl. II.4.

(4) Wir haben den folgenden Untergruppenverband von G:



(5) Wir berechnen die Fixkörper der Untergruppen. Es ist $L^G = \mathbb{Q}$ und $L^{\{1\}} = L$. Schreibe jedes $x \in L$ in der Form

$$x = x_0 + x_1\alpha + x_2\alpha^2 + x_3\alpha^3 + x_4 i + x_5 i\alpha + x_6 i\alpha^2 + x_7 i\alpha^3$$

mit rationalen Koeffizienten.

Es ist

$$\begin{aligned} L^{\langle \sigma^2, \tau \rangle} &= \{x \in L \mid \sigma^2(x) = x = \tau(x)\} \\ &= \{x \in L \mid x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 0,\ x_4 = x_6 = 0\} \\ &= \{x = x_0 + x_2\sqrt{2}\} \\ &= \mathbb{Q}(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned} L^{\langle \sigma \rangle} &= \{x \in L \mid \sigma(x) = x\} \\ &= \{x \in L \mid x_1 = x_5 = 0,\ x_2 = 0 = x_6,\ x_3 = -x_7 = 0\} \\ &= \{x = x_0 + x_4 i\} \\ &= \mathbb{Q}(i). \end{aligned}$$

Ferner

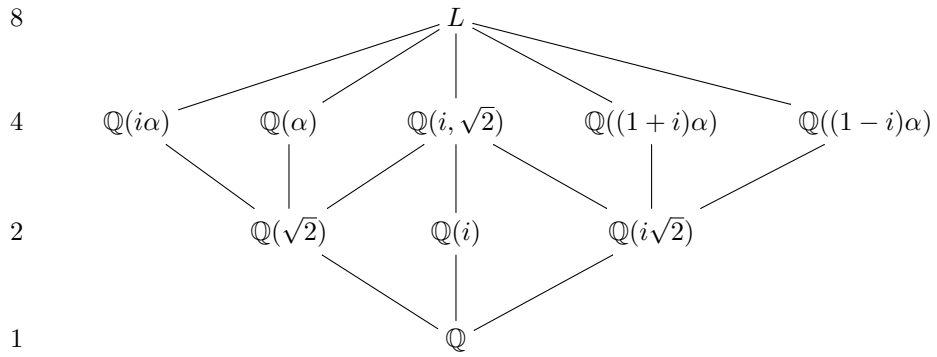
$$\begin{aligned} L^{\langle\sigma^2,\sigma\tau\rangle} &= \{x \in L \mid \sigma^2(x) = x = \sigma\tau(x)\} \\ &= \{x \in L \mid x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 0,\, x_2 = x_4 = 0\} \\ &= \{x = x_0 + x_6 i\sqrt{2}\} \\ &= \mathbb{Q}(i\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Es sind noch die Fixkörper der Untergruppen der Ordnung 2 zu berechnen. Wir demonstrieren dies nur am folgenden Beispiel:

$$\begin{aligned} L^{\langle\sigma\tau\rangle} &= \{x \in L \mid \sigma\tau(x) = x\} \\ &= \{x \in L \mid x_1 = x_5,\, x_2 = 0 = x_4,\, x_3 = -x_7,\} \\ &= \{x = x_0 + x_1(1+i)\alpha + x_6 i\alpha^2 + x_3(1-i)\alpha^3\} \\ &= \{x = x_0 + x_1(1+i)\alpha + x_6/2((1+i)\alpha)^2 - x_3/2((1+i)\alpha)^3\} \\ &= \mathbb{Q}((1+i)\alpha). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich $L^{\langle\sigma^2\rangle} = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, $L^{\langle\tau\rangle} = \mathbb{Q}(\alpha)$, $L^{\langle\sigma^2\tau\rangle} = \mathbb{Q}(i\alpha)$ und $L^{\langle\sigma^3\tau\rangle} = \mathbb{Q}((1-i)\alpha)$.

(6) Der Hauptsatz der Galoistheorie liefert daher den Zwischenkörperverband:



(7) Da (außer G und $\{1\}$) gerade die Untergruppen $\langle\sigma^2, \tau\rangle$, $\langle\sigma\rangle$, $\langle\sigma^2, \sigma\tau\rangle$ (vom Index 2) und $\langle\sigma^2\rangle$ Normalteiler von G sind, folgt aus dem Hauptsatz der Galoistheorie, dass von den Zwischenkörpern (außer $\mathbb{Q}$ und L selbst) genau die Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ normal (äquivalent: galoissch) über $\mathbb{Q}$ sind.

Übung 11.2. Sei $\omega = e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel, und sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Man bestimme die Galoisgruppe und den Zwischenkörperverband von $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q}$.

Übung 11.3. Man bestimme Galoisgruppe und Zwischenkörperverband der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}$.

Übung 11.4. Man bestimme die Galoisgruppe und den Zwischenkörperverband der folgenden Körpererweiterungen L/K mit $K = \mathbb{Q}$, sowie das Minimalpolynom des jeweils angegebenen primitiven Elements.

(1) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$.
(2) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{4 + 3\sqrt{-1}})$.

12. Der Frobenius-Endomorphismus. Perfekte Körper

Definition 12.1. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist die Abbildung $K \to K$, $x \mapsto x^p$ ein Homomorphismus von Ringen, und heißt der *Frobenius-Endomorphismus* von K. Er ist immer injektiv.

Die beiden folgenden Sätze vervollständigen die Klassifikation endlicher Körper, hier in Bezug auf ihre (endlichen) Körpererweiterungen und Zwischenkörperverbände.

SATZ 12.2. *Sei $q = p^n$ (p prim, $n \geq 1$). Dann ist $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ galoissch mit zyklischer Galoisgruppe der Ordnung n, erzeugt von dem Frobenius-Automorphismus $\sigma\colon x \mapsto x^p$.*

BEWEIS. $\mathbb{F}_q$ ist Zerfällungskörper des Polynoms $T^q - T$ über $\mathbb{F}_p$. Dieses Polynom ist separabel, denn der ggT von $T^q - T$ und $D(T^q - T) = -1 \neq 0$ ist eine Einheit. Damit ist $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ normal und separabel nach Folgerung 7.3.

Es ist offenbar $\sigma\colon x \mapsto x^p$ ein $\mathbb{F}_p$-Automorphismus von $\mathbb{F}_q$. Denn für jedes $x \in \mathbb{F}_p$ gilt $x^p = x$, und σ ist injektiv, und wegen der Endlichkeit auch surjektiv. Sei m die Ordnung von σ. Da die Ordnung der Galoisgruppe gleich dem Körpergrad $[\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p] = n$ ist, folgt $m \mid n$. Für jedes $x \in \mathbb{F}_q$ folgt $x = \sigma^m(x) = x^{p^m}$. Also sind alle $q = p^n$ Elemente von $\mathbb{F}_q$ Nullstellen des Polynoms $T^{p^m} - T$, und es folgt $p^m = p^n$, also $m = n$. □

BEMERKUNG 12.3. Sei L/K eine Körpererweiterung endlicher Körper. Sei $\mathrm{Char}(K) = p$ (Primzahl). Ist $[L : K] = s$ und $[K : \mathbb{F}_p] = n$, so gilt $K = \mathbb{F}_{p^n}$ und $L = \mathbb{F}_{p^{sn}}$.

SATZ 12.4. *Sei L/K eine Körpererweiterung endlicher Körper und sei $s = [L : K]$ sowie $|K| = p^n$.*

(1) *Es ist L/K galoissch.*
(2) *Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist zyklisch, erzeugt von σ^n, wobei $\sigma\colon L \to L$, $x \mapsto x^p$ der Frobenius-Automorphismus von L ist.*
(3) *Sei M ein Zwischenkörper. Dann ist $|M| = p^{rn}$ für einen Teiler r von s. Zu jedem Teiler r von s gibt es genau einen Zwischenkörper M mit $|M| = p^r$.*

BEWEIS. (1) Es ist K Zwischenkörper von der Galoiserweiterung $L/\mathbb{F}_p$. Also ist auch L/K galoissch.

(2) Es ist $K = \mathbb{F}_{p^n}$ und $L = \mathbb{F}_{p^{sn}}$. Für jedes $x \in K$ ist $\sigma^n(x) = x^{p^n} = x$, also ist σ^n ein K-Automorphismus. Es hat σ die Ordnung $[L : \mathbb{F}_p] = sn$. Daher hat σ^n die Ordnung s.

(3) Die Aussage über die Anzahl folgt aus dem Gradsatz. Die zyklische Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ hat zu jedem Teiler r von s genau eine Untergruppe U der Ordnung s/r. Übergang zu den Fixkörpern, den Hauptsatz der Galoistheorie ausnutzend, folgt das Ergebnis. □

DEFINITION 12.5. Ein Körper K heißt *perfekt* (oder *vollkommen*), wenn jedes (nichtkonstante) Polynom $f \in K[T]$ separabel über K ist.

BEMERKUNG 12.6. Es genügt offenbar, irreduzible (und normierte) Polynome zu betrachten. Ein Körper K ist genau dann perfekt, wenn jede endliche (oder auch: jede algebraische) Körpererweiterung L/K separabel ist.

SATZ 12.7. *Sei K ein Körper. Genau in den folgenden beiden Fällen ist K perfekt:*

- $\mathrm{Char}(K) = 0$.
- $\mathrm{Char}(K) = p > 0$, *und der Frobenius-Endomorphismus $K \to K$, $x \mapsto x^p$ ist surjektiv (d. h. es gilt $K^p = K$).*

BEWEIS. Ist $\mathrm{Char}(K) = 0$, so folgt aus Satz 5.4, dass K perfekt ist. Nehmen wir also $\mathrm{Char}(K) = p > 0$ an. Zu zeigen ist: K ist perfekt genau dann, wenn der Frobenius-Endomorphismus surjektiv ist.

Sei der Frobenius-Endomophismus surjektiv. Sei $f \in K[T]$ vom Grad ≥ 1. Offenbar gilt $D(f) = 0$ genau dann, wenn f eine Polynom in T^p ist. Sei etwa $f = \sum_{i=0}^{n} a_{ip} T^{ip}$. Nach Voraussetzung gibt es $b_i \in K$ mit $a_{ip} = {b_i}^p$, und dann ist

$$f = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i T^i \right)^p$$

nicht irreduzibel. Anders ausgedrückt: Ist $f \in K[T]$ irreduzibel, so gilt $D(f) \neq 0$, und daher hat f nach Proposition 3.3 nur einfache Nullstellen, ist also separabel.

Der Frobenius-Endomorphismus sei nicht surjektiv. Dann gibt es ein $a \in K$, so dass das Polynom $f = T^p - a \in K[T]$ keine Nullstelle in K hat. Sei L Zerfällungskörper von f über K. Es gibt ein $b \in L$ mit $f(b) = 0$, also mit $a = b^p$, und es folgt

$$f = T^p - b^p = (T - b)^p.$$

Sei g ein irreduzibler (und ohne Einschränkung normierter) Faktor von f in $K[T]$. Dann ist g auch ein Faktor von f in $L[T]$, und muss daher von der Form $g = (T - b)^m$ sein, wobei $m \leq p$ gilt sowie $m \geq 2$ (denn für $m = 1$ folgt $b \in K$). Damit hat das irreduzible Polynom $g \in K[T]$ eine mehrfache Nullstelle, ist also nicht separabel über K. □

FOLGERUNG 12.8. *Jeder endliche Körper ist perfekt.* □

Die einfachsten Beispiele für nicht-separable (endliche) Körpererweiterungen bzw. nicht-perfekte Körper sind durch folgende Aussage beschrieben.

PROPOSITION 12.9. *Sei p eine Primzahl. Sei $L = \mathbb{F}_p(X)$ der rationale Funktionenkörper über $\mathbb{F}_p$. Es gilt:*

(a) *Der Frobenius-Endomorphismus $L \longrightarrow L$, $x \mapsto x^p$ ist nicht surjektiv. (D. h. der Körper L ist nicht perfekt.)*

(b) *Sei $K \subset L$ der Teilkörper $K = \mathbb{F}_p(X^p)$. Es gilt $[L : K] = p$, und L/K ist nicht separabel.*

BEWEIS. (a) Es liegt z. B. das Element X nicht im Bild des Frobenius-Endomorphismus: denn andernfalls würde gelten $X = \big(f(X)/g(X)\big)^p$ mit Polynomen $f, g \in \mathbb{F}_p[X]$. Dann folgte aber $X \cdot g(X^p) = X \cdot g(X)^p = f(X)^p = f(X^p)$, was offenbar nicht möglich ist.

(b) Man zeigt leicht, dass $1, X, X^2, \ldots, X^{p-1}$ eine K-Basis von L ist. Das (primitive) Element $X \in L$ ist nicht separabel über K: denn das Minimalpolynom von X über K ist (vgl. obige Basis) $T^p - X^p \in K[T]$, und wegen $T^p - X^p = (T - X)^p$ ist X eine p-fache Nullstelle in L. □

PROPOSITION 12.10. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Genau dann ist K perfekt, wenn L perfekt ist.*

BEWEIS. Sei K perfekt. Jede endliche Körpererweiterung M von L ist auch endlich über K. Da K perfekt, ist M separabel über K, dann aber auch separabel über L. Also ist L perfekt.

Sei umgekehrt L perfekt. Wir können offenbar $\mathrm{Char}(K) = p > 0$ annehmen, da in Charakteristik 0 die Aussage klar ist. Dann ist der Frobenius-Endomorphismus $\varphi\colon L \to L$, $x \mapsto x^p$ bijektiv. Es folgt

$$[L : K] = [\varphi(L) : \varphi(K)] = [L : \varphi(K)] = [L : K^p] = [L : K] \cdot [K : K^p],$$

und somit $[K : K^p] = 1$, also ist $K = K^p$ perfekt. □

ÜBUNG 12.11. (1) Sei K ein endlicher Körper. Seien $f, g \in K[T]$ irreduzibel und vom selben Grad. Man zeige, dass f und g denselben[4] Zerfällungskörper über K haben.

(2) Man zerlege $T^4 + 1 \in \mathbb{F}_3[T]$ in irreduzible Faktoren und bestimme den Zerfällungskörper von $T^4 + 1$ über $\mathbb{F}_3$.

(3) Man mache das gleiche für $T^5 + 2T^3 + 2 \in \mathbb{F}_3[T]$. (Hinweis: Man probiere einen Teiler aus (2).)

ÜBUNG 12.12. Sei K ein endlicher Körper. Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ irreduzible Polynome in $K[T]$ vom Grad n.

[4] Als Teilkörper des algebraischen Abschlusses $\overline{K}$.

ÜBUNG 12.13. Jeder algebraisch abgeschlossene Körper ist perfekt.

ÜBUNG 12.14. Sei L/K algebraisch. Ist K perfekt, so ist auch L perfekt. (Gilt auch die Umkehrung?)

Ergänzende Themen und Aufgaben.

ÜBUNG 12.15. Sei K ein Körper und $\overline{K}$ der algebraische Abschluss von K. Es heisst $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ die *absolute Galoisgruppe* von K. (Diese ist natürlich im allgemeinen nicht von endlicher Ordnung.) Sei L/K ein Zwischenkörper. Es operiert die Gruppe G auf der Menge

$$X_L = \{\iota\colon L \to \overline{K} \mid \iota \text{ ist } K\text{-Monomorphismus}\}$$

vermöge $\sigma.\iota := \sigma \circ \iota$. Sei $[L : K] < \infty$. Dann gilt:

(1) Es operiert G transitiv auf X_L.
(2) Für die Elementanzahl von X_L gilt $1 \leq |X_L| \leq [L : K]$. Falls K ein perfekter Körper ist, gilt $|X_L| = [L : K]$.

(Hinweis: Vgl. die Sätze V.6.8 und VI.5.6, sowie Lemma V.6.7.)

Rein-inseparable Erweiterungen. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heisst *rein-inseparabel* über K, wenn $f = \mathrm{MIPO}(\alpha/K)$ in $\overline{K}$ nur eine einzige Nullstelle (mit Vielfachhheit) hat (nämlich α). L/K heisst *rein-inseparabel*, wenn jedes Element in L rein-inseparable über K ist. — Offenbar gilt: Ist L/K rein-inseparabel, so ist kein Element aus $L \setminus K$ separabel über K.

ÜBUNG 12.16. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, in der kein Element aus $L \setminus K$ separable über K ist. Dann muss $\mathrm{Char}(K) = p > 0$ gelten. Ist $\alpha \in L \setminus K$ mit $f = \mathrm{MIPO}(\alpha/K)$, so gibt es ein $n \geq 1$ und ein $g \in K[T]$ irreduzibel und separabel mit $f(T) = g(T^{p^n})$. Es folgt $\alpha^{p^n} \in K$ und $f = (T - \alpha)^{p^n}$. Es ist L/K also rein-inseparabel. (Hinweis: Betrachte $D(f)$; induktives Vorgehen.)

ÜBUNG 12.17. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Dann gibt es einen Zwischenkörper E von L/K, so dass E/K separabel und L/E rein-inseparabel ist.

ÜBUNG 12.18. Sei L/K eine rein-inseparable Körpererweiterung. Dann ist die Galoisgruppe trivial: $\mathrm{Gal}(L/K) = \{1_L\}$. (Gilt auch die Umkehrung?)

Separabler Abschluss. Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$. Dann heisst die Menge $\overline{K}^s$ der in $\overline{K}$ über K separablen Elemente der *separable Abschluss* von K.

ÜBUNG 12.19. Ein Körper K ist genau dann perfekt, wenn $\overline{K} = \overline{K}^s$ gilt.

ÜBUNG 12.20. Sei K ein Körper.

(1) $\overline{K}^s$ ist ein Teilkörper von $\overline{K}$.
(2) Sei $L/\overline{K}^s$ eine (algebraische) separable Körpererweiterung. Dann gilt $L = \overline{K}^s$.
(3) Sei L/K eine (algebraische) separable Körpererweiterung. Dann gibt es einen K-Monomorphismus $L \to \overline{K}^s$.
(4) $\overline{K}^s/K$ ist eine normale (vgl. Aufgabe 7.5) und separable, also galoissche (vgl. Satz 9.4) Körpererweiterung.
(5) Die Körpererweiterung $\overline{K}/\overline{K}^s$ ist rein-inseparable. (Vgl. Aufgabe 12.16.)
(6) Einschränkung liefert einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{K}^s/K)$.

Die Aussage aus Übung 12.15 hat Anwendungen z. B. in der Algebraischen Geometrie[5]. Der folgende Spezialfall ist eine Variante davon.

ÜBUNG 12.21. Sei K ein endlicher Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$. Die absolute Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ von K operiert in natürlicher Weise auf $\overline{K}$ (vermöge $\sigma.x := \sigma(x)$). Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es (mindestens ein) normiertes, irreduzibles Polynom $f \in K[T]$ vom Grad n. Jedes solche Polynom f zerfällt in $\overline{K}[T]$ in genau n verschiedene (normierte) Linearfaktoren. Die Menge der n verschiedenen Nullstellen von f in $\overline{K}$ bildet eine G-Bahn. Ist auch $f' \in K[T]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom vom Grad n mit $f' \neq f$, so ist die zu f' gehörige G-Bahn disjunkt von der zu f.

Wir nennen ein Element $x \in \overline{K}$ *vom Grad* n über K, wenn das Minimalpolynom von x über K den Grad n hat. Es folgt also, dass für jedes $n \geq 1$ die Menge

$$\{x \in \overline{K} \mid x \text{ hat Grad } n \text{ über } K\} \neq \emptyset$$

ist und eine (endliche) disjunkte Vereinigung von n-elementigen G-Bahnen ist. Die normierten, irreduziblen Polynome in $K[T]$ vom Grad n stehen in bijektiver Korrespondenz zu diesen n-elementigen G-Bahnen.

BEMERKUNG 12.22. In der Zahlentheorie und auch bei dem sog. Umkehrproblem der Galoistheorie spielt die absolute Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ von $\mathbb{Q}$ eine wichtige Rolle. Das *Umkehrproblem der Galoistheorie*, formuliert 1892 von David Hilbert, lautet:

Gibt es zu jeder endlichen Gruppen G eine (endliche) Galoiserweiterung $L/\mathbb{Q}$ mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq G$*?*

Dieses Problem ist noch heute nicht vollständig gelöst.

[5]Vgl. Proposition 5.4 in: Ulrich Görtz, Torsten Wedhorn: *Algebraic Geometry I: Schemes.* Vieweg +Teubner Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2010.

KAPITEL VII

Anwendungen der Galoistheorie

1. Einheitswurzeln

1.1. Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Ein $\zeta \in K$ heißt n-te *Einheitswurzel*, falls $\zeta^n = 1$ gilt. Die Menge der n-ten Einheitswurzeln in K bilden eine Gruppe $\mu_n(K)$, eine Untergruppe der Einheitengruppe $E(K)$. Da jede n-te Einheitswurzel in K Nullstelle des Polynoms $T^n - 1 \in K[T]$ ist, hat $\mu_n(K)$ endliche Ordnung $\leq n$. Aus Satz VI.4.4 folgt, dass $\mu_n(K)$ eine zyklische Gruppe ist. Ist $\zeta \in \mu_n(K)$ von der Ordnung n, so heißt ζ eine *primitive* n-te Einheitswurzel. Die Menge aller primitiven n-ten Einheitswurzeln in K bezeichen wir mit $\mu_n^*(K)$.

Definition 1.2. Seien K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Mit $E_n(K)$ bezeichnen wir einen Zerfällungskörper von $T^n - 1$ über K. Man nennt $E_n(K)$ den n-ten *Kreisteilungskörper* über K.

Satz 1.3. *Seien K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, die nicht von* $\mathrm{Char}(K)$ *geteilt wird (z. B.* $\mathrm{Char}(K) = 0$*).*

(1) *Die Erweiterung $E_n(K)/K$ ist galoissch.*
(2) *Die Anzahl der primitiven n-ten Einheitswurzeln in $\overline{K}$ (oder $E_n(K)$) ist gleich* $\varphi(n) = |E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})| = |\{1 \leq k < n \mid \mathrm{ggT}(k,n) = 1\}|$.

Beweis. (1) Das Polynom $T^n - 1$ hat keine mehrfachen Nullstellen in $E_n(K)$, da $D(T^n - 1) = nT^{n-1} \neq 0$ gilt. Als Zerfällungskörper des separablen Polynoms $T^n - 1$ über K ist daher $E_n(K)/K$ galoissch.

(2) Sei $L = E_n(K)$ (oder $L = \overline{K}$). Als endliche Untergruppe von $E(L)$ ist $\mu_n(L)$ zyklisch, erzeugt von einer primitiven Einheitswurzel ζ und von der Ordnung n. Es ist also $\mu_n^*(L) = \{\zeta^k \mid 1 \leq k < n,\ \zeta^k \text{ primitiv}\}$. Nun ist ζ^k primitiv genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $s > 0$ gibt mit $(\zeta^k)^s = \zeta$, was aber gerade $ks = 1 + rn$ für ein $r \in \mathbb{Z}$ bedeutet. Dies ist äquivalent dazu, dass k eine Einheit in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, und auch dazu, dass $\mathrm{ggT}(k,n) = 1$ gilt. □

Übung 1.4. Sei $p = \mathrm{Char}(K) > 0$. Man bestimme den Zerfällungskörper von $T^{p^m} - 1$ über K.

Wir betrachten nun alles über $\mathbb{Q}$ bzw. in $\mathbb{C}$.

Definition 1.5. Das n-te *Kreisteilungspolynom* $\Phi_n \in \mathbb{C}[T]$ ist definiert durch

$$\Phi_n = \prod_{\zeta} (T - \zeta),$$

wobei ζ die primitiven n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ durchläuft.

Dies ist ein normiertes Polynom vom Grad $\varphi(n)$.

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine n-te Einheitswurzel. Dann ist für genau einen Teiler d von n (innerhalb der natürlichen Zahlen) ζ eine *primitive* d-te Einheitswurzel. Umgekehrt, jede (primitve) d-te Einheitswurzel, wobei d ein Teiler von n ist, ist auch n-te Einheitswurzel. Man erhält also

$$T^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{C})} (T - \zeta) = \prod_{d|n} \Phi_d.$$

SATZ 1.6. *Das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n hat ganzzahlige Koeffizienten, also $\Phi_n \in \mathbb{Z}[T]$.*

BEWEIS. Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $\Phi_1 = T - 1 \in \mathbb{Z}[T]$. Sei nun $n > 1$. Dann gilt $T^n - 1 = f \cdot \Phi_n$ in $\mathbb{C}[T]$, wobei $f = \prod_{d|n,\, d\neq n} \Phi_d$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $f \in \mathbb{Z}[T]$. Polynomdivision mit Rest (vgl. Bemerkung IV.3.7) liefert eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}[T]$ mit $T^n - 1 = fq + r$ mit $r = 0$ oder $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(f)$. Man erhält $r = f(\Phi_n - q)$. Aus Gradgründen ergibt sich $\Phi_n = q$. □

BEMERKUNG 1.7. Die Formel $T^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$ erlaubt eine rekursive Berechnung der Kreisteilungspolynome Φ_n. Es ist $\Phi_1 = T - 1$. Für eine Primzahl p gibt sich wegen $T^p - 1 = \Phi_1\Phi_p = (T - 1) \cdot \Phi_p$ nochmal die aus den Übungen bekannte Aussage

$$\Phi_p = T^{p-1} + T^{p-2} + \cdots + T + 1.$$

Aus $T^4 - 1 = \Phi_1\Phi_2\Phi_4$ folgt $\Phi_4 = T^2 + 1$. Aus $T^6 - 1 = \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_6$ folgt $\Phi_6 = (T^6 - 1)/(T^4 + T^3 - T - 1) = T^2 - T + 1$, u.s.w.

SATZ 1.8. *Das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass Φ_n in $\mathbb{Z}[T]$ irreduzibel ist. Sei $f \in \mathbb{Z}[T]$ ein (normierter) irreduziber Faktor. Zu zeigen genügt, dass f denselben Grad wie Φ_n hat.

Sei x eine Nullstelle von f in $E_n(\mathbb{Q})$. Dann ist x (als Nullstelle von Φ_n) eine primitive n-te Einheitswurzel. Es genügt zu zeigen, dass alle primitiven n-ten Einheitswurzeln Nullstellen von f sind, denn dann ist $\operatorname{grad}(f) = \varphi(n) = \operatorname{grad}(\Phi_n)$. Die primitiven n-ten Einheitswurzeln sind von der Form x^k wobei $1 \leq k < n$ teilerfremd zu n ist. Es genügt zu zeigen: Ist p prim und teilerfremd zu n, so ist x^p eine Nullstelle von f. Denn ist k eine beliebige zu n teilerfremde Zahl, so zerlegt man $k = p_1 \dots p_r$ in Primfaktoren, und es ist für $1 \leq j \leq r$ auch $x^{p_1 \cdots p_j}$ eine primitive n-te Einheitswurzel, und man schließt sukzessive

$$0 = f(x) = f(x^{p_1}) = f((x^{p_1})^{p_2}) = f(x^{p_1 p_2}) = \cdots = f(x^k).$$

Sei also p prim, teilerfremd zu n. Wir nehmen an, dass $f(x^p) \neq 0$ und wollen das zum Widerspruch führen. Es ist f als Teiler von Φ_n auch ein Teiler von $T^n - 1$ in $\mathbb{Z}[T]$. Es gibt also ein $g \in \mathbb{Z}[T]$ mit $T^n - 1 = fg$. Es ist x^p eine n-te Einheitswurzel, und aus unserer Annahme folgt $g(x^p) = 0$. Es ist also x eine Nullstelle des Polynoms $g(T^p) \in \mathbb{Z}[T]$. Da f das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$ ist, folgt, dass f ein Teiler von $g(T^p)$ in $\mathbb{Q}[T]$ ist, etwa $g(T^p) = fh$ für ein $h \in \mathbb{Q}[T]$. Da f normiert ist, kann man in $\mathbb{Z}[T]$ auch durch f mit Rest dividieren, und da dies dann auch in $\mathbb{Q}[T]$ gilt, folgt aus Eindeutigkeitsgründen, dass $h \in \mathbb{Z}[T]$ gilt.

Betrachte nun die kanonischen Surjektion $\nu\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$, $x \mapsto \overline{x} \stackrel{def}{=} x \bmod n$. Dies ergibt den Homomorphismus $\nu^*\colon \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{F}_p[T]$, $f \mapsto \overline{f}$. Wir erhalten

$$\overline{f} \cdot \overline{h} = \overline{g(T^p)} = \overline{g}^p.$$

Sei nun $\overline{f}_0$ ein irreduzibler Faktor von $\overline{f}$ in $\mathbb{F}_p[T]$. Dann ist $\overline{f}_0$ auch ein irreduzibler Faktor von $\overline{g}$, und aus der Darstellung $\overline{T^n - 1} = \overline{f} \cdot \overline{g}$ folgt, dass $\overline{f}_0^2$ ein Teiler von $\overline{T^n - 1} = T^n - \overline{1}$ ist. Damit hat $T^n - \overline{1}$ eine mehrfache Nullstelle (in einem Zerfällungskörper). Andererseits ist $D(T^n - \overline{1}) = \overline{n}T^{n-1} \neq 0$, da p kein Teiler von n ist, Widerspruch. □

FOLGERUNG 1.9. $[E_n(\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

BEWEIS. Es ist $E_n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\zeta)$, wobei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Das Minimalpolynom von ζ ist Φ_n (nach dem Satz), und $\operatorname{grad}(\Phi_n) = \varphi(n)$. □

SATZ 1.10. *Es ist* $\operatorname{Gal}(E_n(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}) \simeq E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

BEWEIS. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine feste primitive n-te Einheitswurzel. Es gilt $E_n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\zeta)$. Die Abbildung ϕ: $\mathrm{Gal}(E_n(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $\sigma \mapsto [k] = k \bmod n$, wobei $1 \leq k < n$ gilt mit $\sigma(\zeta) = \zeta^k$. Da $\sigma(\zeta)$ wieder primitiv ist, gilt, dass k teilerfremd zu n ist, also ist $[n]$ eine Einheit in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Gelte $\sigma(\zeta) = \zeta^k$ und $\tau(\zeta) = \zeta^l$ mit $1 \leq k, l < n$. Es ist

$$\sigma\tau(\zeta) = \sigma(\zeta^l) = (\sigma(\zeta))^l = (\zeta^k)^l = \zeta^{kl} = \zeta^{kl \bmod n},$$

und es folgt $\phi(\sigma\tau) = [kl] = [k] \cdot [l] = \phi(\sigma)\phi(\tau)$. Also ist ϕ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(E_n(\mathbb{Q})/\mathbb{Q})$ mit $\phi(\sigma) = [1]$. Dann gilt $\sigma(\zeta) = \zeta$, und es folgt $\sigma = 1_{E_n(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}}$. Also ist ϕ injektiv. Da aber beide Gruppen Ordnung $\varphi(n)$ haben, ist ϕ ein Isomorphismus. □

ÜBUNG 1.11. Sei $K = \mathbb{Q}$.

(1) Man berechne die Kreisteilungspolynome $\Phi_{27}(T)$ und $\Phi_{32}(T)$.
(2) Es gilt $\Phi_2(T) = -\Phi_1(-T)$.
(3) Sei $n > 1$ ungerade. Dann gilt $\Phi_{2n}(T) = \Phi_n(-T)$. (Hinweis: $T^{2n} - 1 = (T^n - 1)(T^n + 1)$.)
(4) Sei p eine Primzahl, die n nicht teilt. Man zeige

$$\Phi_{pn}(T) = \frac{\Phi_n(T^p)}{\Phi_n(T)}.$$

(5) Man berechne $\Phi_{54}(T)$ und $\Phi_{96}(T)$.

2. Das reguläre n-Eck

Wir wollen die natürlichen Zahlen n (≥ 3) charakterisieren, für die das reguläre n-Eck (mit Zirkel und Lineal aus $M = \{0, 1\}$) konstruierbar ist. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass die komplexe Zahl $z = e^{2\pi i/n}$ konstruierbar ist. Der folgende Satz macht die Ergebnisse des letzten Abschnitts anwendbar. Sein Beweis macht von der Galoistheorie Gebrauch.

SATZ 2.1 (Hinreichendes und notwendiges Kriterium für Konstruierbarkeit). *Sei $z \in \mathbb{C}$. Äquivalent sind:*

(1) *z ist konstruierbar.*
(2) *z ist algebraisch, und der Grad des Zerfällungskörpers des Minimalpolynoms von z über $\mathbb{Q}$ ist eine Potenz von 2.*

BEWEIS. (1)⇒(2) Sei z konstruierbar. Dann gibt es einen Körperturm

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$$

mit $[K_i : K_{i-1}] = 2$ für $i = 1, \ldots, n$ und mit $z \in K_n$. Jedes K_i wird über K_{i-1} durch ein Element von Grad 2 erzeugt. Quadratische Ergänzung zeigt dann, dass $K_i = K_{i-1}(\sqrt{a_i})$ für ein $a_i \in K_{i-1}$ gilt ($i = 1, \ldots, n$). Wir zeigen:

Es gibt eine endliche Galoiserweiterung L/K_0, die K_n als Zwischenkörper enthält, und einen Körperturm

$$\mathbb{Q} = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_m = L$$

mit $[L_i : L_{i-1}] \leq 2$ ($i = 1, \ldots, m$).

Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun $n \geq 2$. Betrachte den Körperturm

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_{n-1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Körper L', der die geforderten Eigenschaften von L für diese Teilkette erfüllt. Sei

$$g = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/K_0)} \big(T^2 - \sigma(a_n)\big).$$

Es gilt $g \in K_0[T]$ (da L'/K_0 galoissch). Sei L der Zerfällungskörper von g über L' in $\mathbb{C}$. Es ist L' Zerfällungskörper eines Polynoms f über K_0, also ist L Zerfällungskörper von fg über K_0, also ist L/K_0 galoissch. Außerdem gilt $K_n \subseteq L$, da $T^2 - a_n$ ein Faktor von g ist, d. h. $\sqrt{a_n} \in L$. Verlängert man den Körperturm für L' sukzessive um die Zerfällungskörper der einzelnen Faktoren von g, so erhält man einen Körperturm wie gewünscht für L. –

Da nun L/K_0 normal ist mit $z \in L$, enthält L den F Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von z über $\mathbb{Q}$. Es ist nach Konstruktion $[L : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2, also auch $[F : \mathbb{Q}]$ als Teiler dieser Zahl.

(2)⇒(1) Sei L Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von z über $\mathbb{Q}$, und es sei $[L : \mathbb{Q}] = 2^m$. Es ist $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung. Beweise per Induktion nach m, dass jedes $x \in L$ konstruierbar ist. Für $m = 0$ (oder $m = 1$) ist die Sache klar. Sei nun $m \geq 1$. Die Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ hat die Ordnung 2^m und hat daher ein nichtriviales Zentrum, und dies Zentrum enthält nach Lemma I.5.7 ein Element der Ordnung 2; die davon erzeugte Untergruppe N ist ein Normalteiler von G. Sei $K = L^N$. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie ist $K/\mathbb{Q}$ galoissch, vom Grad $[K : \mathbb{Q}] = 2^{m-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist jedes Element in K konstruierbar. Da jedes $x \in L$ einer quadratischen Gleichung über K genügt, ist dann auch x konstruierbar. □

Definition 2.2. Eine ungerade Primzahl p heißt *Fermatsche Primzahl*, falls $p - 1$ eine Potenz von 2 ist.

Lemma 2.3. *Sei p eine Primzahl. p ist Fermatsche Primzahl genau dann, wenn $p = 2^{2^t} + 1$ gilt für eine ganze Zahl $t \geq 0$.*

Beweis. Ist p fermatsch, dann ist $p = 2^m + 1$ für ein $m \geq 1$. Ist s eine ungerade positive Zahl, so ist -1 eine Nullstelle von $T^s + 1$, also gilt $T^s + 1 = (T + 1) \cdot g$ für ein $g \in \mathbb{Z}[T]$. Für jede positive ganze Zahl r gilt also

$$2^{rs} + 1 = (2^r)^s + 1 = (2^r + 1) \cdot g(2^r).$$

Ist dies eine Primzahl, so muss $s = 1$ sein. Es folgt: Ist $p = 2^m + 1$ prim, so enthält m (außer 1) keinen ungeraden Teiler, ist also eine Potenz von 2. □

Bemerkung 2.4. Es ist allerdings unklar, welche der Zahlen $p = 2^{2^t} + 1$ überhaupt Primzahlen sind. Bisher ist dies nur für $t = 0, 1, \ldots, 4$ bekannt. D. h. die zur Zeit einzig bekannten Fermatschen Primzahlen sind 3, 5, 17, 257 und 65.537. Für $t = 5$ hat man $4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ (Euler).

Lemma 2.5. (1) *Sei p eine Primzahl und $k \geq 1$. Dann gilt $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.*
(2) *Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so gilt $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.*
(3) *Sei $n = p_1^{k_1} \ldots p_t^{k_t}$ mit $k_i \geq 1$ und paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_t$. Dann gilt*

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{t} (p_i^{k_i} - p_i^{k_i - 1}) = \prod_{i=1}^{t} p_i^{k_i - 1}(p_i - 1).$$

Beweis. (1) Von den p^k Elementen 1, 2, …, p^k sind genau die p^{k-1} Elemente $p \cdot m$ $(1 \leq m \leq p^{k-1})$ nicht teilerfremd zu p^k.

(2) Es gilt $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, und es folgt $E(\mathbb{Z}_{mn}) \simeq E(\mathbb{Z}_m) \times E(\mathbb{Z}_n)$, und die Behauptung folgt.

(3) Folgt sofort aus (1) und (2). □

SATZ 2.6 (Gauß (1798)). *Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und ζ eine primitive n-te Einheitswurzel. Äquivalent sind:*

(1) *ζ ist konstruierbar (aus 0, 1) (d. h. das reguläre n-Eck ist konstruierbar).*
(2) *$\varphi(n)$ ist eine Potenz von 2.*
(3) *Es ist $n = 2^r p_1 \dots p_t$ mit $r \geq 0$ und paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen $p_1, \dots, p_t$ ($t \geq 0$).*

BEWEIS. Nach dem obigen Satz ist ζ konstruierbar genau dann, wenn $[E_n(\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2 ist; andererseits gilt $[E_n(\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, was die Äquivalenz von (1) und (2) zeigt.

Ist $n = 2^r p_1 \dots p_t$ mit $r \geq 0$ und paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen $p_1, \dots, p_t$, so gilt

$$\varphi(n) = (2^r - 2^{r-1}) \cdot (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_t - 1),$$

wobei der erste Faktor nur für $r \geq 1$ auftaucht. Aus der Form der Fermatschen Primzahlen folgt, dass $\varphi(n)$ eine Potenz von 2 ist.

Sei umgekehrt $\varphi(n)$ eine Potenz von 2. Sei $n = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t}$ die Primfaktorzerlegung. Dann gilt

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{t} (p_i^{k_i} - p_i^{k_i - 1}),$$

und daher muss jedes $p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}$ eine Potenz von 2 sein. Ist $p_i \neq 2$, so muss dann $k_i = 1$ sein, da sonst p_i ein Teiler wäre. Es ist also n von der Form $n = 2^r p_1 \dots p_t$ mit $r \geq 0$ und paarweise verschiedenen ungeraden Primzahlen p_i, und es ist $p_i - 1 = \varphi(p_i)$ eine Potenz von 2, also p_i fermatsch. □

3. Die Polynome $T^n - a$

Wir betrachten hier nur Körper der Charakteristik 0.

DEFINITION 3.1. Eine Körpererweiterung L/K heißt *einfache Radikalerweiterung*, falls es ein $a \in L$ gibt mit $L = K(a)$ und mit $a^k \in K$ für eine natürliche Zahl $k \geq 1$.

Gilt hierbei $a^k = b \in K$, so schreibt man auch $a = \sqrt[k]{b}$ und $L = K(\sqrt[k]{b})$. Es bezeichnet also $\sqrt[k]{b}$ *eine* Nullstelle von $T^k - b$.

SATZ 3.2. *Sei K ein Körper der Charakteristik 0, und K enthalte eine primitive n-te Einheitswurzel ζ.*

(1) *Jede Körpererweiterung der Form $K(\sqrt[n]{a})/K$ mit $a \in K$ ist eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe, deren Ordnung n teilt.*
(2) *Ist L/K eine endliche Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe und $[L : K] = n$, so ist L Zerfällungskörper eines Polynoms $T^n - a$ für ein $a \in K$.*

BEWEIS. (1) Sei $a \neq 0$. Ist y eine Nullstelle von $T^n - a$, so sind alle Nullstellen von $T^n - a$ von der Form $y\zeta^k$ für eine ganze Zahl k, also ist $K(y) = K(\sqrt[n]{a})$ Zerfällungskörper des Polynoms $T^n - a$, also $K(\sqrt[n]{a})/K$ galoissch. Jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(y)/K)$ ist durch das Bild $\sigma(y) = y\zeta^k$, also durch $k \bmod n$ eindeutig bestimmt. Es ist leicht zu sehen, dass damit $\sigma \mapsto k \bmod n$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Gal}(K(y)/K) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ induziert. Daher kann $\mathrm{Gal}(K(y)/K)$ mit einer Untergruppe der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ identifiziert werden und ist dann als solche selbst zyklisch.

(2) Sei σ ein erzeugendes Element der Galoisgruppe G. Zu jedem $y \in L$ betrachten wir die sogenannte Lagrangsche Resolvente

$$R(\zeta, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i \sigma^i(y).$$

Behauptung: *Es gibt ein $y \in L$ mit $R(\zeta, y) \neq 0$.*

Nehmen wir das zunächst an. Wegen $\zeta \in K$ gilt $\sigma(\zeta) = \zeta$. Da außerdem $\sigma^n = 1_L$ gilt, folgt

$$\sigma\big(R(\zeta, y)\big) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i \sigma^{i+1}(y) = \zeta^{-1} \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \sigma^i(y) = \zeta^{-1} R(\zeta, y).$$

Es ergibt sich

$$\sigma^i\big(R(\zeta, y)\big) = \zeta^{-i} R(\zeta, y)$$

für $i = 1, \ldots, n$. Ist nun $\tau = \sigma^i$ ein K-Automorphismus von L, der $R(\zeta, y)$ festlässt, so folgt wegen $R(\zeta, y) \neq 0$, dass $\tau = 1_L$ gelten muss. Es ist also $U \stackrel{def}{=} \mathrm{Gal}\Big(L/K\big(R(\zeta, y)\big)\Big) = \{1\}$. Aus dem Hauptsatz der Galoistheorie folgt $K\big(R(\zeta, y)\big) = L^U = L^{\{1\}} = L$. Ferner ist

$$\sigma\big(R(\zeta, y)^n\big) = \Big(\sigma\big(R(\zeta, y)\big)\Big)^n = \zeta^{-n}\big(R(\zeta, y)^n\big) = R(\zeta, y)^n,$$

also $R(\zeta, y)^n \in L^G = K$. Dies bedeutet aber, dass $R(\zeta, y) = \sqrt[n]{\big(R(\zeta, y)\big)^n}$ ein Radikal über K ist. –

Es bleibt obige Behauptung zu beweisen. Es genügt zu zeigen: Sind $a_0, \ldots, a_{n-1} \in L$ und gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \sigma^i(y) = 0$$

für alle $y \in L$, so gilt $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Angenommen, dies ist falsch. Dann sei s die kleinste ganze Zahl, so dass

$$\sum_{i=0}^{s} a_i \sigma^i(y) = 0$$

für alle y gilt mit $a_0, \ldots, a_s$ und mit $a_s \neq 0$. Es gilt offenbar $0 < s < n$. Es können offenbar nicht alle Koeffizienten a_i mit $0 \leq i < s$ verschwinden. Es sei $0 \leq t < s$ die größte ganze Zahl mit $a_t \neq 0$. Wähle ein $z \in L$ mit $\sigma^t(z) \neq \sigma^s(z)$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{s} a_i \sigma^i(z)\sigma^i(y) = \sum_{i=0}^{s} a_i \sigma^i(zy) = 0$$

und

$$\sum_{i=0}^{s} a_i \sigma^s(z)\sigma^i(y) = 0.$$

Subtraktion ergibt: Für jedes $y \in L$ gilt

$$\sum_{i=0}^{t} a_i\big(\sigma^i(z) - \sigma^s(z)\big)\sigma^i(y) = 0.$$

Wegen $a_t\big(\sigma^t(z) - \sigma^s(z)\big) \neq 0$ ist dies ein Widerspruch zu Minimalität von s. □

Übung 3.3. Sei K ein Körper der Charakteristik 0, der eine primitive p-te Einheitswurzel enthält (p prim). Sei $a \in K$. Man zeige, dass das Polynom $T^p - a$ entweder irreduzibel in $K[T]$ ist oder in $K[T]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Übung 3.4. Man zeige, dass die einfachen Radikalerweiterungen, die man mit $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{4})$ bezeichnen kann, nicht alle untereinander isomorph sind.

4. Auflösbarkeit von Gleichungen. Galois' Kriterium

Wir nehmen im folgenden der Einfachheit halber an, dass alle vorkommenden Körper die Charakteristik 0 haben. Insbesondere ist dann jedes über K algebraische Element separabel.

DEFINITION 4.1. Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ ein separables Polynom. (Im Fall $\mathrm{Char}(K) = 0$ ist die Separabilität automatisch.) Sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Es ist L/K eine endliche Galoiserweiterung. Sei $\mathrm{Gal}(f/K) \stackrel{def}{=} \mathrm{Gal}(L/K)$, die *Galoisgruppe* von f *über* K.

Wegen der Eindeutigkeit eines Zerfällungskörpers bis auf K-Isomorphie, ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f/K)$ (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

DEFINITION 4.2. Eine Körpererweiterung L/K heißt *Radikalerweiterung*, falls es einen Körperturm

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = L$$

gibt, so dass K_i/K_{i-1} eine einfache Radikalerweiterung ist für jedes $i = 1, \ldots, n$.

DEFINITION 4.3. Sei $f \in K[T]$. Die Gleichung $f(x) = 0$ heißt *auflösbar* (durch Radikale; über K), falls der Zerfällungskörper von f über K in einer Radikalerweiterung von K liegt.

BEISPIELE 4.4. (1) Sei $f = T^2 + aT + b \in K[T]$. Die Nullstellen lassen sich in einem Zerfällungskörper L über K beschreiben als $x = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}$. Es ist also $L = K\big(\sqrt{a^2/4 - b}\big)$ (es wird nur $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ benötigt), und dies ist eine Radikalerweiterung. Es ist also die Gleichung $f(x) = 0$ auflösbar. (Die Normierung stellt keine Einschränkung dar.)

(2) (Cardanische Formeln; Cardano 1545, Tartaglia 1515, del Ferro um 1500) Sei $f = T^3 + aT^2 + bT + c \in \mathbb{Q}[T]$. Durch Substitution $T = T - \frac{a}{3}$ bekommt man ein Polynom

$$f = T^3 + pT + q$$

mit rationalen Koeffizienten. Es genügt, die Nullstellen für solch ein Polynom zu bestimmen. Die 3 Nullstellen x, y und z dieses Polynoms sind gegeben durch $x = a + b$, $y = \varepsilon^2 a + \varepsilon b$, $z = \varepsilon a + \varepsilon^2 b$, wobei

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,, \quad b = -\frac{p}{3a} \quad \text{und} \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}.$$

Man sieht, dass der Zerfällungskörper $L = \mathbb{Q}(x, y, z)$ von f in einer Radikalerweiterung liegt:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a_1) \subset \mathbb{Q}(a_1, a_2) \subset \mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)$$

mit

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},\ a_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + a_1},\ a_3 = \varepsilon,$$

und es gilt $L \subset \mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3)$.

(3) Auch für Polynome f vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ gibt es Formeln, die zeigen, dass die Gleichung $f(x) = 0$ durch Radikale auflösbar ist. (Ferrari 1540.)

Es wird sich zeigen, dass dies allgemein für Polynome vom Grad ≥ 5 (über $\mathbb{Q}$) nicht mehr richtig ist. Dies geht auf Abel (1824) und Ruffini (1799/1810) zurück, vgl. Satz 6.2. Etwas später hat Galois mit Satz 4.6 (der den Hauptsatz der Galoistheorie verwendet) die Thematik wesentlich eleganter und systematischer gelöst.

Um dieses Problem dem Hauptsatz der Galoistheorie zugänglich zu machen, benötigen wir zuvor die folgende Aussage.

LEMMA 4.5. *Es gelte* $\mathrm{Char}(K) = 0$. *Jede Radikalerweiterung* L/K *ist in einer galoisschen Radikalerweiterung* N/K *enthalten.*

BEWEIS. Induktion nach $n = [L : K]$. Für $n = 1$ ist die Aussage offenbar richtig. Sei nun $n \geq 2$. Die folgende Argumentation verläuft wie im Beweis von Satz 2.1. Nach Definition einer Radikalerweiterung gibt es einen Zwischenkörper L' von L/K, so dass L'/K eine Radikalerweiterung ist und mit $L = L'(x)$ mit $x \in L$ und $x^s = y \in L'$ für ein $s \geq 2$, und $[L : L'] \geq 2$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es eine normale Radikalerweiterung N'/K mit $L' \subset N'$. Sei N Zerfällungskörper des Polynoms

$$g = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(N'/K)} \big(T^s - \sigma(y)\big)$$

über N'. Man kann das so einrichten, dass $x \in N$ gilt, da x Nullstelle von g ist. Da N'/K galoissch ist, gilt $g \in K[T]$. Außerdem ist N' Zerfällungskörper eines Polynoms f über K. Es folgt, dass N Zerfällungskörper von fg über K ist. Damit ist N/K normal. Außerdem gilt $L = L'(x) \subseteq N'(x) \subseteq N$. Offensichtlich ist N/N' eine Radikalerweiterung (es werden sukzessive nur s-te Wurzeln von Elementen aus N' hinzuadjungiert). Da N'/K eine Radikalerweiterung ist, ergibt sich dies auch für N/K. □

SATZ 4.6 (Auflösbarkeitskriterium (Galois 1832)). *Sei* K *ein Körper der Charakteristik* 0. *Sei* $f \in K[T]$. *Genau dann ist die Gleichung* $f(x) = 0$ *auflösbar, wenn die Gruppe* $\mathrm{Gal}(f/K)$ *auflösbar ist.*

BEWEIS. (1) Sei zunächst die Gleichung $f(x) = 0$ auflösbar. Sei M Zerfällungskörper von f über K. Dieser ist nach dem Lemma in einer galoisschen Radikalerweiterung L/K enthalten. Da M/K als Zerfällungskörper normal ist, hat man nach dem Hauptsatz der Galoistheorie eine Isomorphie von Gruppen $\mathrm{Gal}(M/K) \simeq \mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/M)$. Es gibt also einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi\colon \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(M/K)$. Es genügt daher nach Lemma III.8.2 zu zeigen, dass $\mathrm{Gal}(L/K)$ auflösbar ist.

Es gibt einen Körperturm

$$K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_{s-1} \subseteq L_s = L$$

mit $L_i = L_{i-1}(a_i)$ und $a_i^{n_i} \in L_{i-1}$ für eine natürliche Zahl $n_i \geq 2$ $(i = 1, \ldots, s)$. Sei $n = n_1 n_2 \ldots n_s$. Definiere $K' = E_n(K)$, $L_i' = E_n(L_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $L' = E_n(L)$. Offenbar kann man dabei $L_{i-1}' \subseteq L_i'$ annehmen. Man erhält einen Körperturm

$$K' = L_0' \subseteq L_1' \subseteq \cdots \subseteq L_{s-1}' \subseteq L_s' = L'.$$

Hierbei ist jedes L_i'/L_{i-1}' eine einfache Radikalerweiterung. Ist L Zerfällungskörper eines Polynoms g über K, so ist L' Zerfällungskörper von $g \cdot (T^n - 1)$ über K, also ist L'/K galoissch. Da auch L/K galoissch ist, gilt nach dem Hauptsatz der Galoistheorie, dass $\mathrm{Gal}(L'/L)$ ein Normalteiler in $\mathrm{Gal}(L'/K)$ ist und

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathrm{Gal}(L'/K)/\mathrm{Gal}(L'/L)$$

ist als homomorphes Bild von $\mathrm{Gal}(L'/K)$ auflösbar, wenn gezeigt wird, dass $\mathrm{Gal}(L'/K)$ auflösbar ist.

Es ist $\mathrm{Gal}(K'/K)$ als Untergruppe von $E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (analog zu dem Beweis von Satz 1.10) abelsch, also auflösbar. Ebenso folgt aus dem Hauptsatz

$$\mathrm{Gal}(K'/K) \simeq \mathrm{Gal}(L'/K)/\mathrm{Gal}(L'/K'),$$

und daher genügt zu zeigen, dass $\mathrm{Gal}(L'/K')$ auflösbar ist.

Wir beweisen dies durch Induktion nach s. Der Vorteil ist nun, dass durch das Vorhandensein der n-ten (und daher auch der n_i-ten) Einheitswurzeln die Erweiterungen L_i'/L_{i-1}' galoissch sind mit zyklischen Galoisgruppen nach Satz 3.2, insbesondere sind sie abelsch.

Der Fall $s = 0$ ist trivial. Sei also $s \geq 1$. Es ist L_1'/K' galoissch, also nach dem Hauptsatz $\mathrm{Gal}(L'/L_1')$ Normalteiler in $\mathrm{Gal}(L'/K')$ mit

$$\mathrm{Gal}(L_1'/K') \simeq \mathrm{Gal}(L'/K')/\mathrm{Gal}(L'/L_1').$$

Nun ist $\mathrm{Gal}(L_1'/K')$ als abelsche Gruppe auflösbar, und $\mathrm{Gal}(L'/L_1')$ ist auflösbar nach Induktionsvoraussetzung. Also ist nach Lemma III.8.2 auch $\mathrm{Gal}(L'/K')$ auflösbar.

(2) Sei L Zerfällungskörper von f über K. Sei $\mathrm{Gal}(L/K)$ auflösbar. Seien $p_1, \ldots, p_r$ die Primteiler von $[L : K]$, und setze $n = p_1 \ldots p_r$. Setze $K' = E_n(K)$ und $L' = E_n(L)$, wobei L' als Erweiterungskörper von K' aufgefasst werden kann. Als Zerfällungskörper des Polynoms $f \cdot (T^n - 1)$ über K ist L' über K galoissch. Zu zeigen genügt, dass L'/K eine Radikalerweiterung ist.

Es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Gal}(L'/K') \to \mathrm{Gal}(L/K)$, $\sigma \mapsto \sigma_{|L}$. Denn L/K ist normal, also gilt $\sigma(L) = L$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/K')$ nach Satz VI.7.4. Ist $\sigma_{|L}$ die Identität, so wird jedes Element aus $L \cup K'$ fest gehalten. Es ist aber offenbar $L' = L(K')$, also ist $\sigma = 1_{L'}$. Dies zeigt die Injektivität.

Es ist also mit $\mathrm{Gal}(L/K)$ auch die Untergruppe (bis auf Isomorphie) $\mathrm{Gal}(L'/K')$ auflösbar. Zu zeigen genügt, dass L'/K' eine Radikalerweiterung ist. Da K'/K eine Radikalerweiterung ist, folgt dies dann auch für L'/K.

Wir zeigen nun, dass L'/K' eine Radikalerweiterung ist. Da $G = \mathrm{Gal}(L'/K')$ auflösbar ist, gibt es nach Lemma III.8.5 eine Kette von Untergruppen

$$\{1\} = U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_{t-1} \subset U_t = G,$$

so dass U_{j-1} ein Normalteiler in U_j ist und die Faktorgruppe U_j/U_{j-1} zyklisch von Primzahlordnung q_j $(j = 1, \ldots, t)$. Dabei ist q_j ein Teiler von $[L' : K']$, also auch von $[L : K] = n$. Es ist also $q_j = p_i$ für ein i. Also enthält K' alle q_j-ten Einheitswurzeln. Übergang zu den Fixkörpern liefert nach dem Hauptsatz der Galoistheorie einen Körperturm

$$K' = K_t' \subset K_{t-1}' \subset \ldots \subset K_1' \subset K_0' = L'.$$

Dabei ist jede Erweiterung K_{j-1}'/K_j' galoissch (denn $\mathrm{Gal}(L'/K_{j-1}') = U_{j-1}$ ist Normalteiler in $U_j = \mathrm{Gal}(L'/K_j')$) mit zyklischer Galoisgruppe

$$\mathrm{Gal}(K_{j-1}'/K_j') \simeq U_j/U_{j-1}$$

von Primzahlordnung q_j. Aus Satz 3.2 (2) folgt, dass $K_{j-1}' = K_j'(a_j)$ für ein $a_j \in K_{j-1}'$ und $a_j^{q_j} \in K_j'$. Also ist L'/K' eine Radikalerweiterung. □

5. Nichtauflösbare Gleichungen

5.1. Sei $f \in K[T]$ separabel. Seien $a_1, \ldots, a_m$ die verschiedenen Nullstellen von f in einem Zerfällungskörper L. Für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$ gilt $\sigma(\{a_1, \ldots, a_m\}) = \{a_1, \ldots, a_m\}$, d. h. σ ist eine Permutation der Elemente $a_1, \ldots, a_m$. Offenbar lässt nur $\sigma = 1_L$ alle a_i fest. Man erhält damit einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Gal}(f/K) \to \mathbb{S}(X) = S_m$, in die symmetrische Gruppe der Menge $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$.

Ist $f \in K[T]$ irreduzibel, ohne Einschränkung normiert, so operiert $\mathrm{Gal}(f/K)$ *transitiv* auf der Menge X, d. h. sind $a_i, a_j \in X$, so gibt es ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(f/K)$ mit $\sigma(a_i) = a_j$. Denn es ist f das Minimalpolynom sowohl von a_i als auch von a_j, und die Aussage ergibt sich aus Satz V.2.3 und Satz VI.2.4.

Zunächst das "positive" Ergebnis:

Bemerkung 5.2. Sei K ein Körper der Charakeristik 0 und $f \in K[T]$ ein Polynom vom Grad ≤ 4. Dann ist die Gleichung $f(x) = 0$ auflösbar. Denn $G = \mathrm{Gal}(f/K)$ ist zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_n$ mit $n \leq 4$ isomorph. Die $\mathbb{S}_n$ für $n \leq 4$ sind auflösbar. Es ist etwa

$$\{e\} \subset \mathbb{V}_4 \subset \mathbb{A}_4 \subset \mathbb{S}_4$$

eine Kette von Untergruppen mit sukzessiven Normalteilern, so dass die entsprechenden Faktorgruppen abelsch sind. Hier bei ist $\mathbb{V}_4$ die Gruppe, die erzeugt wird von den Transpositionen (1 2) und (3 4).

Ziel des Abschnitts ist der folgende Satz, den wir weiter unten beweisen werden.

SATZ 5.3. *Sei p eine Primzahl und $f \in \mathbb{Q}[T]$ irreduzibel und vom Grad p. Es habe f genau zwei nicht-relle Nullstellen. Dann ist $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{S}_p$. Für $p \geq 5$ ist insbesondere die Gleichung $f(x) = 0$ nicht auflösbar.*

FOLGERUNG 5.4. *Sei $f = T^5 - 6T + 3 \in \mathbb{Q}[T]$. Dann ist die Gleichung $f(x) = 0$ nicht auflösbar.*

BEWEIS. Das Polynom ist irreduzibel nach Eisenstein und hat genau zwei nicht-reelle Nullstellen (vgl. Übungen). □

LEMMA 5.5. *Die symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n$ ($n \geq 2$) wird von der Transposition $\tau = (1\ 2)$ und dem n-Zykel $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$ erzeugt.*

BEWEIS. Sei G die Untergruppe von $\mathbb{S}_n$, die von σ und τ erzeugt wird. Dann enthält G auch

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (2\ 3),\ \sigma^2\tau\sigma^{-2} = (3\ 4),\ \ldots,$$

also alle Transpositionen der Form $(i\ i{+}1)$. Aber dann enthält G auch die Transpositionen

$$(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3),\ (1\ 3)(3\ 4)(1\ 3) = (1\ 4),\ \ldots,$$

also alle Transpositionen der Form $(1\ i)$. Aber dann enthält G auch eine beliebige Transposition $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$. Da jede Permutation in $\mathbb{S}_n$ ein Produkt von Transpositionen ist, folgt $G = \mathbb{S}_n$. □

BEWEIS VON SATZ 5.3. Wegen Charakteristik 0 hat f genau p verschiedene Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ im Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$. Es ist $[\mathbb{Q}(x_1) : \mathbb{Q}] = p$. Die Ordnung der Gruppe $G = \mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$ ist also ein Vielfaches von p. Wie oben beschrieben kann man G als Untergruppe von $\mathbb{S}_p$ auffassen. Nach dem Satz von Cauchy hat G ein Element σ der Ordnung p. Die einzigen Elemente der Ordnung p in $\mathbb{S}_p$ sind p-Zykel. Sind etwa x_1 und x_2 die nicht-reellen Nullstellen, so gilt $x_2 = \overline{x_1}$. Da $L/\mathbb{Q}$ normal ist, folgt aus Satz VI.7.4, dass komplexe Konjugation einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus $\tau\colon L \to L$ induziert, also ein Element der Ordnung 2, welches der Transposition $\tau = (1\ 2)$ entspricht. Nach evtl. Potenzierung von σ und Umnummerierung der reellen Nullstellen $x_3, \ldots, x_p$ kann man annehmen, dass σ der p-Zykel $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ p)$ ist. Nach dem vorherigen Lemma folgt dann aber $G = \mathbb{S}_p$. Wir haben früher gesehen, dass $\mathbb{S}_p$ für $p \geq 5$ nicht auflösbar ist (Folgerung III.8.4). □

6. Die allgemeine Gleichung n-ten Grades

Sei k ein Körper und $k(t_1, \ldots, t_n)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $k[t_1, \ldots, t_n]$ in n Unbestimmten über k. Sei $f(X) \in L[X]$ das folgende Polynom in einer Unbestimmten X über dem Körper $L = k(t_1, \ldots, t_n)$:

$$f(X) = (X - t_1) \cdot (X - t_2) \cdot \ldots \cdot (X - t_n) = X^n - s_1X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n,$$

wobei die $s_i \in k(t_1, \ldots, t_n)$ die *elementar-symmetrischen Polynome* sind:

$$s_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_n,\ s_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + \cdots + t_{n-1}t_n,\ \ldots,\ s_n = t_1t_2 \ldots t_n.$$

Es heisst $f(X)$ das *allgemeine Polynom* n-ten Grades über k, und $f(x) = 0$ die *allgemeine Gleichung* n-ten Grades über k. Es ist $K = k(s_1, \ldots, s_n)$ ein Teilkörper von L, und $f(X) \in K[X]$. Offenbar ist L der Zerfällungskörper von $f(X)$ über K.

LEMMA 6.1. *L/K ist eine Galoiserweiterung vom Grad $[L : K] = n!$ und mit Galoisgruppe $\mathbb{S}_n$.*

BEWEIS. Man verifiziert leicht, dass die k-Automorphismen von L gegeben sind durch $t_i \mapsto t_{\sigma(i)}$ mit $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Nach dem Satz von Artin ist mit $G = \mathrm{Gal}(L/L^G)$ dann L/L^G galoissch mit Galoisgruppe $G \simeq \mathbb{S}_n$ und $[L : L^G] = |G| = n!$. Offenbar gilt $k(s_1, \ldots, s_n) \in L^G$. Da L Zerfällungskörper von $f(X)$ (Polynom vom Grad n) über $K = k(s_1, \ldots, s_n)$ ist, gilt außerdem $[L : K] \leq n!$. Damit ergibt sich $K = L^G$. □

Aus Satz 4.6 folgt sofort:

SATZ 6.2 (Ruffini-Abel (1799/1810, 1824)). *Sei f das allgemeine Polynom n-ten Grades über einem Körper der Charakteristik 0. Für $n \geq 5$ ist $f(x) = 0$ nicht auflösbar durch Radikale.* □

Das allgemeine Polynom n-ten Grades ist eigentlich ein ganz spezielles Polynom. Es ist aber insofern "allgemein", weil man in die Koeffizienten (die selbst in keinerlei algebraischer Relation zueinander stehen) beliebige Körperelemente aus k einsetzen kann, und dann ein "konkretes" Polynom in $k[X]$ vom Grad n erhält. Klar ist dann: wenn sich das allgemeine Polynom n-Grades über k durch Radikale auflösen lässt, dann auch *jedes* Polynom n-ten Grades in $k[X]$; die "Lösungsformel" wäre dabei sogar sozusagen "universell" durch die des allgemeinen Polynoms vorgegeben. (Für $n \leq 4$ kann man dies ausnutzen.) Umgekehrt sagt die Nichtauflösbarkeit (durch Radikale) des allgemeines Polynoms n-ten Grades wie im vorstehenden Satz nichts über die Auflösbarkeit einzelner, konkreter Polynome n-Grades in $k[X]$ aus. So schließt Satz 6.2 theoretisch nicht aus, dass etwa sogar alle Polynome 5-ten Grades in $\mathbb{Q}[X]$ auflösbar wären (was ja nach Folgerung 5.4 nicht der Fall ist). Daher ist Galois' Satz 4.6, mit dem wir ja auch Satz 6.2 bewiesen haben, eine deutliche Verbesserung vom letzteren.

7. Der Fundamentalsatz der Algebra

Ziel dieses Abschnitts ist es, einen weitesgehend algebraischen Beweis des folgenden Satzes zu geben.

SATZ 7.1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.*

Die elegantesten Beweise des Satzes werden in der Funktionentheorie geführt mit dem Satz von Liouville. Hier soll der Beweis als Anwendung der Galoistheorie und der Sylowsätze erfolgen.

Zerfällungskörper einer Familie von Polynomen. Zunächst dehnen wir den Begriff des Zerfällungsköpers auf Mengen von Polynomen über K aus: sei $\mathscr{S}$ eine Familie nicht-konstanter Polynome $f \in K[T]$. Ein Körper $L \supseteq K$ heisst *Zerfällungskörper* von $\mathscr{S}$ über K, wenn gilt

- alle $f \in \mathscr{S}$ zerfallen in Linearfaktoren über L; und
- $L = K(N)$, wobei N die Vereinigung aller Nullstellen aller $f \in \mathscr{S}$ ist.

Betrachtet man die ganze Situation im algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K, so folgt genau wie in Satz VI.2.3 (mit analogem Beweis) die Existenz eines Zerfällungskörpers von $\mathscr{S}$ über K. Es ist dann L offenbar der kleinste Teilkörper von $\overline{K}$, über dem jedes $f \in \mathscr{S}$ in Linearfaktoren zerfällt. Ist $\mathscr{S}$ endlich, so ist L/K endlich; denn L entsteht dann aus K durch Adjunktion endlich vieler über K algebraischer Elemente.

Normaler Abschluss. Sei L/K eine (endliche) Körpererweiterung. Ein Körper N heisst *normaler Abschluss* von L/K, wenn gilt:

- N/K ist algebraisch und eine normale Erweiterung (Erinnerung: d. h. jedes irreduzible $f \in K[T]$, welches eine Nullstelle in N hat, zerfällt über N in Linearfaktoren), die L als Zwischenkörper enthält, und
- für jede normale Erweiterung M/K mit $N \supseteq M \supseteq L$ gilt $M = N$.

Die Existenz eines normalen Abschlusses N von L/K folgt sofort durch den Zerfällungskörper der Menge $\mathscr{S}$ über K, wobei $\mathscr{S}$ die Menge aller Minimalpolynome der $x \in L$ über K ist. Dabei gilt offenbar:

- Ist $[L : K]$ endlich, so ist auch $[N : K]$ endlich; denn ist $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ mit $f_i = \mathrm{MIPO}(x_i/K)$, so ist N der Zerfällungskörper von $\{f_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ über K, welcher identisch ist mit dem Zerfällungskörper des Polynoms $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ über K.
- Ist L/K endlich separabel, so ist N/K galoissch.

Analytische Eigenschaften der reellen Zahlen. Für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benötigen wir die folgenden, wohl-bekannten Eigenschaften des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen:

(1) jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[T]$ ungeraden Grades hat eine reelle Nullstelle (dies folgt aus dem Zwischenwertsatz);
(2) jede positive reelle Zahl hat eine reelle Quadratwurzel.

Aus (1) ergibt sich sofort:

LEMMA 7.2. *Ist $L/\mathbb{R}$ eine endliche Körpererweiterung mit $[L : \mathbb{R}]$ ungerade, so gilt $L = \mathbb{R}$.*

BEWEIS. Da $\mathbb{R}$ perfekt ist, gibt es nach dem Satz vom primitiven Element ein $x \in L$ mit $L = \mathbb{R}(x)$. Dann hat $f = \mathrm{MIPO}(x/\mathbb{R})$ ungeraden Grad n, ist irreduzibel und hat eine reelle Nullstelle, was nur für $n = 1$ möglich ist. □

Aus (2) kann man leicht (z. B. aus der Polarkoordinatendarstellung) ableiten, dass jede komplexe Zahl eine (komplexe) Quadratwurzel besitzt. Daraus folgt:

LEMMA 7.3. *Ist $L/\mathbb{C}$ eine Körpererweiterung mit $[L : \mathbb{C}] \leq 2$, so gilt $L = \mathbb{C}$.*

BEWEIS. Wie beim vorherigen Lemma. □

BEWEIS VON SATZ 7.1. (Gauß-Artin) Es sei $L/\mathbb{C}$ eine endliche Körpererweiterung. Dann ist auch $L/\mathbb{R}$ endlich. Sei N/L der normale Abschluss von $L/\mathbb{R}$. Dann ist $N/\mathbb{R}$ eine endliche Galoiserweiterung. (In Charakteristik 0 ist alles separabel.) Wir werden $N = \mathbb{C}$ zeigen, was den Fundamentalsatz beweist. Sei $G = \mathrm{Gal}(N/\mathbb{R})$. Es ist $|G| = [N : \mathbb{R}] = [N : \mathbb{C}] \cdot [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[N : \mathbb{C}]$ gerade. Sei P eine 2-Sylowgruppe von G. Sei $M = N^P$ der Fixkörper von P in N. Dann ist $[M : \mathbb{R}] = [G : P]$ ungerade. Nach dem ersten Lemma folgt $M = \mathbb{R}$. Damit ist G eine 2-Gruppe (eine Gruppe der Ordnung 2^m). Dann ist auch $H := \mathrm{Gal}(N/\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Gal}(N/\mathbb{R})$ eine 2-Gruppe. Sagen wir, $|H| = 2^n$. Angenommen, $n > 0$. Eine maximale Untergruppe (existiert!) $U \neq H$ von H hat die Ordnung 2^{n-1}, also $[H : U] = 2$: dies zeigt man per Induktion nach n; man nutzt aus, dass H für $n \geq 1$ ein nicht-triviales Zentrum hat (Lemma I.5.7), das eine Untergruppe V der Ordnung 2 enthält (Satz von Cauchy); dann wendet man die Induktionsvoraussetzung auf die Faktorgruppe H/V an. — Für den Fixkörper $T = N^U$ gilt also $[T : \mathbb{C}] = 2$. Das ist aber nach dem zweiten Lemma nicht möglich. Also gilt $n = 0$, und damit $[N : \mathbb{C}] = |H| = 2^0 = 1$, also $N = \mathbb{C}$. □

ÜBUNG 7.4. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Äquivalent sind:

(1) L/K ist normal.
(2) L ist Zerfällungskörper einer Menge $\mathscr{S}$ von nicht-konstanten Polynomen in $K[T]$.

ÜBUNG 7.5. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Äquivalent sind:

(1) L/K ist galoissch.
(2) L ist Zerfällungskörper einer Menge $\mathscr{S}$ von nicht-konstanten, separablen Polynomen in $K[T]$.

Literaturverzeichnis

[1] Jens Carsten Jantzen, Joachim Schwermer: *Algebra*. (2. Auflage.) Springer-Verlag 2014
[2] Serge Lang: *Algebra*. (3rd rev. edition, corr. printing 2005.) Springer-Verlag 2002
[3] Patrick Morandi: *Field and Galois Theory*. Springer-Verlag 1996
[4] Ian Stewart: *Galois Theory*. (4th edition.) CRC Press (A Chapman & Hall Book) 2015