Gamma-Felder und Weyl-Funktionen. Resvolentenformel von Krein-Neumark

Ausarbeitung zum Seminarvortrag

Ché Netzer

18. August 2013

1 Einführung

Dies ist eine Ausarbeitung zu einem Vortrag im Rahmen des Seminars „Lineare Operatoren“. Im Vorgängervortrag wurden lineare Relationen und Randtripel eingeführt, um mithilfe dieser die abgeschlossenen selbstadjungierten Erweiterung eines symmetrischen, dicht definierten Operators T auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ zu beschreiben. Es wurde eine bijektive Beziehung zwischen den selbstadjungierten, abgeschlossenen linearen Relationen auf $\mathcal{K}$, wobei $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ ein Randtripel für T^* ist, und den selbstadjungierten, abgeschlossenen Erweiterungen von T aufgezeigt, welche eine Relation $\mathcal{B}$ mit einem Operator $T_{\mathcal{B}}$ verknüpft. In dieser Ausarbeitung werden wir solche Erweiterungen mithilfe von Gamma-Feldern und Weyl-Funktionen beschreiben. Mit der Resolventenformel von Krein-Neumark erhalten wir eine Darstellung der Resolvente eines Operators $T_{\mathcal{B}}$.

Dabei halten wir uns an [Schm], wo auch die Beweise der hier aufgereihten Behauptungen zu finden sind.

2 Vorbereitung

Es seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zwei (komplexe) Hilbert-Räume. Wir stellen fest, dass sich ein linearer Operator $T\colon \mathcal{H}_1 \supset \operatorname{dom} T \to \mathcal{H}_2$ eindeutig durch seinen Graphen

$$\operatorname{graph} T = \{(x,y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 : x \in \operatorname{dom}(T), y = Tx\} \subset \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

beschreiben lässt. Dieser ist ein Unterraum von $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, was die Definition einer linearen Relation motiviert:

Definition 2.1. Als *lineare Relation von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$* bezeichnen wir einen Unterraum von $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Wir definieren den *Definitionsbereich* $\operatorname{dom} \mathcal{B}$, das *Bild* $\operatorname{ran} \mathcal{B}$ und den *Kern* $\ker \mathcal{B}$ einer linearen Relation $\mathcal{B}$ von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ als

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} \mathcal{B} &:= \{x \in \mathcal{H}_1 : \text{Es gibt ein } y \in \mathcal{H}_2 \text{ mit } (x,y) \in \mathcal{B}\}, \\
\operatorname{ran} \mathcal{B} &:= \{y \in \mathcal{H}_2 : \text{Es gibt ein } x \in \mathcal{H}_1 \text{ mit } (x,y) \in \mathcal{B}\} \text{ und} \\
\ker \mathcal{B} &:= \{x \in \mathcal{H}_1 : (x,0) \in \mathcal{B}\}.
\end{aligned}$$

Ist $\mathcal{B}$ der Graph eines Operators, so stimmen die so definierten Mengen mit dem Definitionsbereich, dem Bild bzw. dem Kern dieses Operators überein. Für allgemeine lineare Relationen können wir jedoch als Gegenstück zum Kern den *mehrwertigen Teil* $\operatorname{mul} \mathcal{B}$ von $\mathcal{B}$ als

$$\operatorname{mul} \mathcal{B} := \{y \in \mathcal{H}_2 : (0,y) \in \mathcal{B}\}$$

definieren. Auch die Begriffe des Abschlusses, der Adjungierten und der Inversen können wir von Operatoren auf lineare Relationen verallgemeinern, indem wir

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{B}} &:= \operatorname{clos}_{\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2}} \mathcal{B}, \\
\mathcal{B}^* &:= \Big\{(y,x) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 : (x,y) \in \mathcal{B},\ \langle v,y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x,u\rangle_{\mathcal{H}_1} \text{ für alle } (u,v) \in \mathcal{B}\Big\} \text{ und} \\
\mathcal{B}^{-1} &:= \{(y,x) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 : (x,y) \in \mathcal{B}\}
\end{aligned}$$

setzen.

Obwohl Abschluss, Adjungierte und Inverse auch dann existieren, wenn $\mathcal{B}$ der Graph eines Operators ist, müssen diese Relationen nicht wieder der Graph eines Operators sein – dies ist genau dann der Fall, wenn der entsprechende Operator abschließbar, dicht definiert bzw. invertierbar ist.

Auch Summen und Vielfache von Relationen können definiert werden: Für zwei lineare Relationen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 := \{(x, y_1 + y_2) : (x,y_1) \in \mathcal{B}_1,\ (x,y_2) \in \mathcal{B}_2\}$$

und

$$\alpha\mathcal{B}_1 := \{(x, \alpha y) : (x,y) \in \mathcal{B}_1\}.$$

Im Folgen betrachten wir einen (komplexen) Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Für lineare Relationen auf $\mathcal{H}$ (d. h. von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$) lassen sich weitere Begriffe aus der Operatortheorie übertragen.

Definition 2.2. Es sei $\mathcal{B}$ eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *regulärer Wert* von $\mathcal{B}$, falls $(\mathcal{B}-\lambda)^{-1} := \big(\mathcal{B} - \operatorname{graph}(\lambda \operatorname{Id})\big)^{-1}$ der Graph eines stetigen linearen Operators auf ganz $\mathcal{H}$ ist – wir schreiben dann $(\mathcal{B}-\lambda)^{-1} \in L(\mathcal{H})$. Die Menge aller regulären Werte von $\mathcal{B}$ bezeichnen wir mit $\rho(\mathcal{B})$ und nennen sie die *Resolventenmenge von* $\mathcal{B}$. Das Komplement dieser Menge, $\sigma(\mathcal{B}) := \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{B})$, heißt *Spektrum von* $\mathcal{B}$.
Weiter heißt $\mathcal{B}$ *symmetrisch*, falls $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$, und *selbstadjungiert*, falls $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$.

Nun führen wir den Begriff eines Randtripels ein.

Definition 2.3. Ein Randtripel für T^* ist ein Tripel $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, bestehend aus einem Hilbert-Raum $(\mathcal{K}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$ und zwei linearen Operatoren $\Gamma_0, \Gamma_1\colon \operatorname{dom} T^* \to \mathcal{K}$, so dass für alle $x, y \in \operatorname{dom} T^*$

$$\langle T^*x, y\rangle - \langle x, T^*y\rangle = \langle \Gamma_1 x, \Gamma_0 y\rangle_{\mathcal{K}} - \langle \Gamma_0 x, \Gamma_1 y\rangle_{\mathcal{K}} \tag{2.1}$$

gilt und die Abbildung $(\Gamma_0, \Gamma_1)\colon \operatorname{dom} T^* \to \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, $x \mapsto (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x)$ surjektiv ist.

Im Folgenden sei $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ ein Randtripel für T^*.

Beispiel 2.4. Wir wählen $\mathcal{H} = L^2(a,b)$, $a < b$, und definieren $T\colon \operatorname{dom} T \to \mathcal{H}$ durch $\operatorname{dom} T := H_0^1(a,b)$ und $Tf := -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ für $f \in \operatorname{dom} T$. Dann ist T dicht definiert und symmetrisch und der zu T adjungierte Operator T^* ist durch $\operatorname{dom} T^* = H^1(a,b)$ und $T^*f = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ für $f \in \operatorname{dom} T^*$ gegeben. Mit $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ und $\Gamma_0, \Gamma_1\colon \operatorname{dom} T^* \to \mathbb{C}$, wobei

$$\Gamma_0 f = \frac{f(a) - f(b)}{\sqrt{2}\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad \Gamma_1 f = \frac{f(a) + f(b)}{\sqrt{2}},$$

$f \in \operatorname{dom} T^*$, ein Randtripel $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ für T^* gegeben.

Beispiel 2.5. Wir wählen $\mathcal{H} = L^2(a,b)$, $a < b$, und definieren $T\colon \operatorname{dom} T \to \mathcal{H}$ durch $\operatorname{dom} T := H_0^2(a,b)$ und $Tf := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f$ für $f \in \operatorname{dom} T$. Dann ist T dicht definiert und symmetrisch und der zu T adjungierte Operator T^* ist durch $\operatorname{dom} T^* = H^2(a,b)$ und $T^*f = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f$ für $f \in \operatorname{dom} T^*$ gegeben. Mit $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2$ und $\Gamma_0, \Gamma_1\colon \operatorname{dom}(T^*) \to \mathbb{C}^2$, wobei

$$\Gamma_0 f = \big(f(a), f(b)\big) \quad \text{und} \quad \Gamma_1 f = \big(f'(a), -f'(b)\big),$$

$f \in \operatorname{dom} T^*$, ein Randtripel $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ für T^* gegeben.

Wir merken an, dass jeder linearen Relation $\mathcal{B}$ auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{K}$ eine abgeschlossene Erweiterung $T_{\mathcal{B}}$ (d. h. ein Operator auf $\mathcal{H}$) von T mit $T \subset T_{\mathcal{B}} \subset T^*$ zugewiesen werden kann. Dabei ist der Operator $T_{\mathcal{B}}$ genau dann symmetrisch (selbstadjungiert), wenn die Relation $\mathcal{B}$ symmetrisch (selbstadjungiert) ist. Wir verzichten auf weitere Ausführung zu dieser Beziehung zwischen Erweiterungen und Relationen. Stattdessen behaupten wir im letzten Schritt der Vorbereitung, dass durch $\mathcal{B}_0 := \{0\} \times \mathcal{K}$ eine selbstadjungierte Erweiterung $T_0 := T_{\mathcal{B}_0}$ von T mit $T \subset T_0 \subset T^*$ gewonnen werden kann, welche durch $\operatorname{dom} T_0 = \ker \Gamma_0$ charakterisiert wird. Für diese gilt weiterhin

$$\operatorname{dom} T^* = \operatorname{dom} T_0 \dotplus E_{T^*}(\lambda) = \ker \Gamma_0 \dotplus E_{T^*}(\lambda) \tag{2.2}$$

für alle $\lambda \in \rho(T_0)$, wobei $E_{T^*}(\lambda) := \ker(T^* - \lambda)$ den Eigenraum von T^* zum Eigenwert λ bzw. den Nullvektorraum bezeichnet. Analog erhalten wir $T_1 := T_{\mathcal{B}_1}$ mit $\mathcal{B}_1 := \mathcal{K} \times \{0\}$, für welchen $\operatorname{dom} T_1 = \ker \Gamma_1$ gilt.

3 Gamma-Felder und Weyl-Funktionen

In diesem Kapitel wollen wir Gamma-Felder definieren und ebenso die Weyl-Funktionen, welche erstmals in [DeMa1, DeMa2] erschienen. Eine Motivation dieser Funktionen lässt sich in [DHMS, Example 1.3] finden. Anschließend führen wir einige Eigenschaften der genannten Abbildungen auf, welche sich zum Teil auch in [DeMa3] finden lassen.

Um jedoch die Definitionen der Gamma-Felder und Weyl-Funktionen rechtfertigen zu können, benötigen wir ein Lemma.

Lemma 3.1. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Die Operatoren* $\Gamma_0, \Gamma_1 \colon (\operatorname{dom} T^*, \|\cdot\|_{T^*}) \to \mathcal{K}$ *sind stetig, wobei* $\|\cdot\|_{T^*} := \|\cdot\| + \|T^* \cdot\|$ *die Graphennorm bezüglich* T^* *auf* $\operatorname{dom} T^*$ *bezeichnet.*

(ii) *Für jedes* $\lambda \in \rho(T_0)$ *ist der Operator* $\Gamma_0 \colon E_{T^*}(\lambda) \to \mathcal{K}$ *stetig invertierbar.*

Beweis. (i). Wir stellen zunächst fest, dass $\operatorname{dom} T^*$ mit der Graphennorm $\|\cdot\|_{T^*}$ vollständig ist, denn T^* ist abgeschlossen: Ist $(x_n) \subset \operatorname{dom} T^*$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{T^*}$, so müssen (x_n) und (Tx_n) in $\mathcal{H}$ konvergieren. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{dom} T^*$ und $T^* \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^* x_n$, d. h. (x_n) konvergiert auch in $\operatorname{dom} T^*$.

Da $\operatorname{dom} T^*$ also vollständig ist, können wir den Satz vom abgeschlossenen Graphen anwenden, um die Stetigkeit von $(\Gamma_0, \Gamma_1) \colon \operatorname{dom} T^* \to \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ zu zeigen. Sei dazu $(x_n) \subset \operatorname{dom} T^*$ eine Nullfolge (d. h. $x_n \to 0$ und $T^* x_n \to 0$ in $\mathcal{H}$) und es konvergiere $(\Gamma_0 x_n, \Gamma_1 x_n)$ gegen (u, v) in $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Zu zeigen ist $u = v = 0$. Für alle $y \in \operatorname{dom} T^*$ ist nun mit (2.1)

$$\begin{aligned} \langle v, \Gamma_0 y \rangle_{\mathcal{K}} - \langle u, \Gamma_1 y \rangle_{\mathcal{K}} &= \lim_{n\to\infty} \Big(\langle \Gamma_1 x_n, \Gamma_0 y \rangle_{\mathcal{K}} - \langle \Gamma_0 x_n, \Gamma_1 y \rangle_{\mathcal{K}} \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\langle T^* x_n, y \rangle - \langle x_n, T^* y \rangle \right) = 0 \,, \end{aligned}$$

also $\langle v, \Gamma_0 y \rangle = \langle u, \Gamma_1 y \rangle$. Aufgrund der Surjektivität von (Γ_0, Γ_1) können wir y so wählen, dass wir $\langle v, 0 \rangle = 0 = \langle u, u \rangle$ bzw. $\langle v, v \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$ erhalten. Damit ist $u = v = 0$ und (Γ_0, Γ_1) ist abgeschlossen und somit stetig.

(ii). Mit (2.2) ist die Einschränkung von Γ_0 auf $E_{T^*}(\lambda)$ injektiv und nach Definition surjektiv. Die Stetigkeit der Inversen folgern wir aus dem Satz von der offenen Abbildung, denn auf $E_{T^*}(\lambda)$ ist $\|\cdot\|_{T^*} = (1 + |\lambda|)\|\cdot\|$ äquivalent zur Norm auf $\mathcal{H}$, womit die Einschränkung von Γ_0 auf $E_{T^*}(\lambda)$ stetig ist. Als Kern des abgeschlossenen Operators $T^* - \lambda$ ist $E_{T^*}(\lambda)$ auch abgeschlossen in $\mathcal{H}$ und somit vollständig bezüglich $\|\cdot\|$, weshalb der Satz von der offenen Abbildung angewandt werden kann. □

Dies erlaubt die folgende Definition:

Definition 3.2. Für $\lambda \in \rho(T_0)$ setzen wir $\gamma(\lambda) := \left(\Gamma_0|_{E_{T^*}(\lambda)} \right)^{-1}$ und $M(\lambda) := \Gamma_1 \gamma(\lambda)$. Die Abbildung

$$\rho(T_0) \ni \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = \left(\Gamma_0|_{E_{T^*}(\lambda)} \right)^{-1} \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$$

heißt *Gamma-Feld* und die Abbildung

$$\rho(T_0) \ni \lambda \mapsto M(\lambda) = \Gamma_1 \left(\Gamma_0|_{E_{T^*}(\lambda)} \right)^{-1} \in L(\mathcal{K})$$

heißt *Weyl-Feld* zum Operator T_0 bezüglich des Randtripels $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ für T^*.

Beispiel 3.3. Wir greifen Beispiel 2.4 auf, d. h. wir betrachten das Randtripel $(\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ mit $\sqrt{2}\mathrm{i}\Gamma_0 f = f(a) - f(b)$ und $\sqrt{2}\Gamma_1 f = f(a) + f(b)$ für $f \in \operatorname{dom}(T^*) = H^1(a,b)$. Dann ist $E_{T^*}(\lambda)$, $\lambda \in \rho(T_0)$, der Lösungsraum von $f' = \mathrm{i}f$, also der eindimensionale Vektorraum, der durch $\exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,)$ aufgespannt wird, und $\Gamma_0|_{E_{T^*}(\lambda)}$ ist für

$$f = c\exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,) \in E_{T^*}(\lambda)$$

durch

$$\left(\Gamma_0|_{E_{T^*}(\lambda)}\right) f = c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$$

gegeben. Als Umkehrung erhalten wir also

$$\gamma(\lambda)z = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}}\exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Weiterhin ist

$$M(\lambda)z = \Gamma_1\gamma(\lambda)z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}}z\,.$$

Beispiel 3.4. Wir greifen Beispiel 2.5 auf, d. h. wir betrachten das Randtripel $(\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1)$ mit $\Gamma_0 f = (f(a), f(b))$ und $\Gamma_1 f = (f'(a), -f'(b))$ für $f \in \operatorname{dom}(T^*) = H^2(a,b)$. Dann ist $E_{T^*}(\lambda)$, $\lambda \in \rho(T_0)$ (und $\lambda \neq 0$), der Lösungsraum von $f'' = -\lambda f$, also der zweidimensionale Vektorraum, der durch $\exp(\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,\cdot\,)$ und $\exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,\cdot\,)$ aufgespannt wird, wobei $\sqrt{\lambda}$ eine der beiden Wurzeln von λ bezeichne. Weiterhin ist $\Gamma_0|_{E_{T^*}(\lambda)}$ für

$$f = c_1\exp(\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,\cdot\,) + c_2\exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,\cdot\,) \in E_{T^*}(\lambda)$$

durch

$$\left(\Gamma_0|_{E_{T^*}(\lambda)}\right) f = \left(c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a} + c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a},\ c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b} + c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es ergibt sich also

$$\gamma(\lambda)(z_1, z_2) = c_1\exp(\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,\cdot\,) + c_2\exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,\cdot\,)$$

mit

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(a-b)} - \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}(b-a)}}}_{=\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\left(\sqrt{\lambda}(a-b)\right)}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b} & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a} \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

für $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. In dieser Darstellung ist

$$\begin{aligned} M(\lambda)(z_1, z_2) &= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a} - c_2\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}a} \\ -c_1\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b} + c_2\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}b} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sin(\sqrt{\lambda}(a-b))}\begin{pmatrix} z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(a-b)} - z_2 + z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(b-a)} - z_2 \\ -z_1 + z_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(b-a)} - z_1 + z_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}(a-b)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}(a-b))}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}(a-b)) & -1 \\ -1 & \cos(\sqrt{\lambda}(a-b)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften des Gamma-Felds sammeln. Dazu bemerken wir, dass für $\lambda \in \rho(T_0)$ auch $\overline{\lambda} \in \rho(T_0)$ gilt, da T_0 selbstadjungiert ist.

Proposition 3.5. *Für $\lambda, \mu \in \rho(T_0)$ mit $\lambda \neq \mu$ gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Der adjungierte Operator zu $\gamma(\bar{\lambda})$ ist durch*

$$\gamma(\bar{\lambda})^* = \Gamma_1 (T_0 - \lambda)^{-1} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$$

gegeben.

(ii) *Die Einschränkung von $\gamma(\lambda)^*$ auf $E_{T^*}(\lambda)$ ist bijektiv (nach $\mathcal{K}$).*

(iii) *Für den Differenzenquotienten gilt*

$$\frac{\gamma(\lambda) - \gamma(\mu)}{\lambda - \mu} = (T_0 - \lambda)^{-1} \gamma(\mu) = (T_0 - \mu)^{-1} \gamma(\lambda) \,.$$

(iv) *Das Gamma-Feld ist holomorph (und insbesondere stetig) und besitzt die Ableitung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \gamma(\lambda) = (T_0 - \lambda)^{-1} \gamma(\lambda) \,.$$

Auf einen Beweis der Behauptungen (i) und (iii) verzichten wir an dieser Stelle. Die Aussage (ii) jedoch folgt sofort aus der Bijektivität von $\gamma(\lambda) \colon \mathcal{K} \to E_{T^*}(\lambda)$ und (iv) folgt mit der Stetigkeit der Resolventenabbildung direkt aus (iii). Die zweite Gleichheit ergibt sich aus der Symmetrie von λ und μ im Differenzenquotienten.

Beispiel 3.6. Wir überprüfen die unbewiesenen Eigenschaften (i) und (iii) anhand des Beispiels 3.3. Wir wollen zunächst den zu $\gamma(\bar{\lambda}) \colon \mathbb{C} \to L^2(a,b)$ adjungierten Operator bestimmen. Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f \in L^2(a,b)$ soll daher

$$\int_a^b \gamma(\bar{\lambda}) z \cdot \bar{f} \, \mathrm{d}x = \langle \gamma(\bar{\lambda}) z, f \rangle = \langle z, \gamma(\bar{\lambda})^* f \rangle = z \cdot \overline{\gamma(\bar{\lambda})^* f}$$

gelten. Damit ist

$$\gamma(\bar{\lambda})^* f = \int_a^b \overline{\gamma(\bar{\lambda}) 1} \cdot f \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \overline{\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}b}} \right)} \mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b}} \int_a^b f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \, \mathrm{d}x \,.$$

Für das weitere Vorgehen bieten wir zwei verschiedene Wege an:

- Damit wir $\gamma(\bar{\lambda})^* = \Gamma_1 (T_0 - \lambda)^{-1}$ bestätigen können, soll $\gamma(\bar{\lambda})^* (T_0 - \lambda) g = \Gamma_1 g$ für alle $g \in \operatorname{dom} T_0 = \ker \Gamma_0$ gelten, d. h. für alle $g \in H^1(a,b)$ mit $g(a) = g(b)$. Dabei ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\gamma(\bar{\lambda})^* (T_0 - \lambda) g &= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b}} \int_a^b (-\mathrm{i} g'(x) - \lambda g(x)) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b}} \Bigg(-\mathrm{i} g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \Big|_a^b + \mathrm{i} \int_a^b g(x) (-\mathrm{i}\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&\qquad - \lambda \int_a^b g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \, \mathrm{d}x \Bigg) \\
&= \sqrt{2} g(a) = \Gamma_1 g \,.
\end{aligned}$$

- Alternativ:

  Wir wollen $(T_0 - \lambda)^{-1} f =: g$ für $f \in L^2(a,b)$ bestimmen. Wir suchen also ein $g \in H^1(a,b)$ mit $-\mathrm{i}g' - \lambda g = f$, d. h.

$$g' - \mathrm{i}\lambda g = \mathrm{i}f\,,$$

  und $g(a) = g(b)$. Für dieses g soll $\gamma(\bar{\lambda})^* f = \Gamma_1 g = \sqrt{2}g(a)$ gelten. Mit der Formel von Duhamel ist

$$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-a)} g(a) + \int_a^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)} \mathrm{i}f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

  also

$$g(b) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(b-a)} g(a) + \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(b-t)} \mathrm{i}f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

  Mit $g(b) = g(a)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda a}} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda b}} \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma(\bar{\lambda})^* f\,. \end{aligned}$$

Um (iii) zu überprüfen, setzen wir zunächst $c_\lambda := \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}}$ für alle $\lambda \in \rho(T_0)$, so dass $\gamma(\lambda) = c_\lambda \exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,)$. Damit ist für $\lambda, \mu \in \rho(T_0)$ mit $\lambda \neq \mu$

$$\begin{aligned} (T_0 - \lambda)\frac{\gamma(\lambda) - \gamma(\mu)}{\lambda - \mu} &= \left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) \frac{c_\lambda \exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,) - c_\mu \exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,)}{\lambda - \mu} \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu}\Big(c_\lambda \lambda \exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,) - \lambda c_\lambda \exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,) - c_\mu \mu \exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,) + \lambda c_\mu \exp(\mathrm{i}\lambda\,\cdot\,)\Big) \\ &= \gamma(\mu)\,. \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch einige Eigenschaften der Weyl-Funktion sammeln.

Proposition 3.7. *Für $\lambda, \mu \in \rho(T_0)$ mit $\lambda \neq \mu$ gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Auf $E_{T^*}(\lambda)$ gilt*

$$M(\lambda)\Gamma_0 = \Gamma_1\,.$$

(ii) *Der adjungierte Operator $M(\lambda)^*$ ist durch*

$$M(\lambda)^* = M(\bar{\lambda}) \in L(\mathcal{K})$$

gegeben.

(iii) *Für den Differenzenquotienten gilt*

$$\frac{M(\lambda) - M(\mu)}{\lambda - \mu} = \gamma(\bar{\lambda})^*\gamma(\mu) = \gamma(\bar{\mu})^*\gamma(\lambda)\,.$$

(iv) *Die Weyl-Funktion ist holomorph (und insbesondere stetig) und besitzt die Ableitung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} M(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})^*\gamma(\lambda)\,.$$

Die Eigenschaft (i) ergibt sich direkt aus der Definition des Weyl-Feldes, (iii) lässt sich leicht mithilfe von Proposition 3.5 nachweisen und (iv) ergibt sich wieder direkt aus (iii) mit der Stetigkeit des Gamma-Feldes.

Beispiel 3.8. Wir überprüfen (ii) und (iii) an Beispiel 3.3. Da $M(\lambda) \in L(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, entspricht das Adjungieren der komplexen Konjugation, und (ii) ergibt sich mit

$$\overline{M(\lambda)} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\lambda}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\lambda}b}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\lambda}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\lambda}b}} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}b} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}a}}{\mathrm{e}^{\bar{\lambda}b} - \mathrm{e}^{\bar{\lambda}a}} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\lambda}b}}{\mathrm{e}^{\bar{\lambda}a} - \mathrm{e}^{\bar{\lambda}b}} = M(\bar{\lambda})\,.$$

Für (iii) bemerken wir

$$\begin{aligned}
\gamma(\bar{\mu})^*\gamma(\lambda) &= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu b}} \int_a^b c_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}(\lambda-\mu)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda-\mu)b} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda-\mu)a}}{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu b}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\right)} \\
&= \frac{2\mathrm{i}}{\lambda-\mu} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda b+\mu a)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda a+\mu b)}}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu b}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\right)}
\end{aligned}$$

und

$$M(\lambda) - M(\mu) = \mathrm{i}\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu b}\right) - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu b}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu b}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\right)}\,.$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu b}\right) - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu b}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}\right) = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda b+\mu a)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda a+\mu b)}\right)\,,$$

was (iii) bestätigt.

4 Die Resolventenformel von Krein-Neumark

Wir verwenden nun das Gamma-Feld und die Weyl-Funktion, um die bereits vorgestellten Erweiterungen $T_{\mathcal{B}}$ von T zu beschreiben.

Proposition 4.1. *Es sei $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{K}$ und $\lambda \in \rho(T_0)$. Dann ist auch die Relation $\mathcal{B} - M(\lambda) := \mathcal{B} - \operatorname{graph} M(\lambda)$ abgeschlossen und es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Es ist* $\gamma(\lambda) \ker(\mathcal{B} - M(\lambda)) = \ker(T_{\mathcal{B}} - \lambda)$.

(ii) *Es gilt* $\dim \ker(T_{\mathcal{B}} - \lambda) = \dim \ker(\mathcal{B} - M(\lambda))$.

(iii) *Es ist genau dann* $0 \in \rho(T_{\mathcal{B}} - \lambda)$, *wenn* $0 \in \rho(\mathcal{B} - M(\lambda))$.

Die Aussage (ii) folgt dabei direkt aus (i), da $\gamma(\lambda)$ bijektiv von $\mathcal{K}$ nach $E_{T^*}(\lambda)$ abbildet.

Beispiel 4.2. Wir überprüfen (i) anhand von $T_0 = T_{\mathcal{B}_0}$ mit $\mathcal{B}_0 = \{0\} \times \mathcal{K}$ und Beispiel 3.3. Damit ist

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 - M(\lambda) &= \Big\{(0, z - M(\lambda)\tilde{z}) \in \mathbb{C}^2 : (0,z) \in \mathcal{B}_0, (0, M(\lambda)\tilde{z}) \in \operatorname{graph} M(\lambda)\Big\}\\ &= \{(0,z) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}\} = \mathcal{B}_0\end{aligned}$$

und $\big(\mathcal{B}_0 - M(\lambda)\big)^{-1} = \mathcal{B}_0^{-1}$ ist der Nulloperator. Da $\lambda \in \rho(T_0) = \rho(T_{\mathcal{B}_0})$ vorausgesetzt wurde, sind die behaupteten Eigenschaften offensichtlich.
Wir untersuchen auch $\mathcal{B}_1 = \mathcal{K} \times \{0\} = \mathcal{B}_0^{-1}$ und den zugehörigen Operator $T_1 = T_{\mathcal{B}_1}$ mit $\operatorname{dom} T_1 = \ker \Gamma_1$. Nun ist

$$\mathcal{B}_1 - M(\lambda) = \Big\{(z, 0 - M(\lambda)z) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}\Big\} = -M(\lambda)\,.$$

Mit $-M(\lambda) \in \mathbb{C}$ ist $-M(\lambda)$ der einzige Spektralwert von $-M(\lambda)$. Der Kern der Relation $\mathcal{B}_1 - M(\lambda) = -M(\lambda)$ ist nur für den Fall $-M(\lambda) = 0$ nichttrivial und besteht dann aus ganz $\mathbb{C}$, also

$$\gamma(\lambda) \ker\big(\mathcal{B}_1 - M(\lambda)\big) = \operatorname{ran} \gamma(\lambda) = E_{T^*}(\lambda)\,.$$

Gleichzeitig ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b} = 0$, wenn $E_{T^*}(\lambda)$ also in $\ker \Gamma_1 = \operatorname{dom} T_1$ liegt.

Wir geben nun eine vollständige Charakterisierung der Erweiterung $T_{\mathcal{B}}$ an, d. h. wir beschreiben den Definitionsbereich und die Bildwerte. Weiterhin geben wir die Resolventenformel von Krein-Neumark an, welche in [Neum, Krein] erstmals veröffentlicht wurde und welche die Resolvente von $T_{\mathcal{B}}$ beschreibt.

Satz 4.3. *Wieder sei $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene lineare Relation auf $\mathcal{K}$ und $\lambda \in \rho(T_0)$. Dann ist der Definitionsbereich $\operatorname{dom} T_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{H}$ von $T_{\mathcal{B}}$ der Raum aller*

$$f = (T_0 - \lambda)^{-1}(y + v) + \gamma(\lambda)u \in \mathcal{H}\,,$$

wobei $y \in E_{T^*}(\overline{\lambda})^{\perp}$ sei und außerdem die Elemente $u \in \mathcal{K}$ und $v \in E_{T^*}(\overline{\lambda})$ so gewählt seien, dass $(u, \gamma(\overline{\lambda})^* v) \in \mathcal{B} - M(\lambda)$. Die Wirkung des Operators $T_{\mathcal{B}}$ auf ein $f \in \operatorname{dom} T_{\mathcal{B}}$ in obiger Darstellung ist durch

$$T_{\mathcal{B}} f = T_{\mathcal{B}}\Big((T_0 - \lambda)^{-1}(y + v) + \gamma(\lambda)u\Big) = \lambda f + y + v$$

gegeben. Gilt weiterhin $\lambda \in \rho(T_\mathcal{B}) \cap \rho(T_0)$*, so ist* $\big(\mathcal{B} - M(\lambda)\big)^{-1} \in L(\mathcal{K})$ *und es gilt die* Krein-Neumark-Resolventenformel

$$(T_\mathcal{B} - \lambda)^{-1} - (T_0 - \lambda)^{-1} = \gamma(\lambda)\big(\mathcal{B} - M(\lambda)\big)^{-1}\gamma(\overline{\lambda})^* \,. \tag{4.1}$$

Beispiel 4.4. Auch dies überprüfen wir wie in Beispiel 4.2. Für $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, also $T_\mathcal{B} = T_0$, ist $\big(u, \gamma(\overline{\lambda})^* v\big) \in \mathcal{B} - M(\lambda)$ äquivalent zu $u = 0$. Damit besteht $\operatorname{dom} T_0$ nach Behauptung aus allen Elementen der Form $(T_0 - \lambda)^{-1}(y + v)$ mit $y + v =: w \in \mathcal{K}$. Dies ist wegen der Surjektivität von $(T_0 - \lambda)^{-1}$ tatsächlich der Fall. Auch

$$T_0\Big((T_0 - \lambda)^{-1} w\Big) = \lambda (T_0 - \lambda)^{-1} w + w$$

lässt sich durch Multiplikation mit $T_0 - \lambda$ bestätigen, denn dieser Operator kommutiert mit T_0. Die Resolventenformel (4.1) schließlich ist wegen $T_\mathcal{B} = T_0$ und $\big(\mathcal{B}_0 - M(\lambda)\big)^{-1} = 0$ offensichtlich.

Neben der hier angeführten existieren noch einige andere Varianten der Resolventenformel von Krein-Neumark, welche zum Teil auch ohne Randtripel auskommen. Wir verweisen dazu beispielhaft auf [BeMe], [Mogi] und [Schm].

Literatur

[BeMe] S. Belyi, G. Menon, *On Krein's Formula in the Case of Non-Densely Defned Symmetric Operators*, J. Math. Anal. Appl., Volume 264, Seiten 598–616 (2001)

[DeMa1] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *On Weyl function and Hermitian operators with gaps*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Volume 293 Seiten 1041–1046 (1987)

[DeMa2] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps*, J. Funct. Anal., Volume 95, Seiten 1–95 (1991)

[DeMa3] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *The Extension Theory of Hermitian Operators and the Momentum Problem*, J. Math. Sci. (New York), Volume 73, Seiten 141–242 (1995)

[Derk] V. A. Derkach, *On Weyl Functions and Generalized Resolvents of a Hermitian Operator in a Krein Space*, Integral Equations Oper. Theory, Volume 23, Seiten 387–415 (1995)

[DHMS] V. A. Derkach et. al., *Boundary Relations and Their Weyl Families*, Trans. Amer. Math. Soc., Volume 358, Seiten 5351–5400 (2006)

[Krein] M. G. Krein, *On Hermitian Operators with Defect Indices* $(1, 1)$, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Volume 43, Seiten 339–342 (1944)

[Mogi] V. Mogilevskii, *Boundary Triplets and Krein Type Resolvent Formula for Symmetric Operators with Unequal Defect Numbers*, Methods Funct. Anal. Topol., Volume 12, Seiten 258–280 (2006)

[Neum] M. A. Neumark, *On Spectral Functions of a Symmetric Operator*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., Volume 7, Seiten 285–296 (1943)

[Schm] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Spaces*, Springer-Verlag (2012)