

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN  
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

BACHELORARBEIT

IM STUDIENGANG TECHNOMATHEMATIK

**Anwendung des Mountain-Pass-Lemmas  
auf eine spezielle Klasse von semilinearen  
elliptischen Randwertproblemen**

Aras Bacho

betreut von Prof. Dr. Etienne Emmrich

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung versichert an Eides statt:

Berlin, den

---

(Aras Bacho)

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Einführung in die Theorie kritischer Punkte</b>             | <b>2</b>  |
| 2.1      | Grundlagen . . . . .   | 2         |
| 2.2      | Eine Regularitätsaussage . . . . .                             | 7         |
| 2.3      | Eigenwerte und Eigenfunktionen des LAPLACE-Operators . . . . . | 8         |
| 2.4      | Minimax-Methoden . . . . .                                     | 11        |
| 2.4.1    | PALAIS-SMALE-Bedingung . . . . .                               | 12        |
| 2.4.2    | Mountain-Pass-Lemma . . . . .                                  | 14        |
| <b>3</b> | <b>Existenz von positiven Lösungen</b>                         | <b>18</b> |
| 3.1      | Subkritischer Fall . . . . .                                   | 18        |
| 3.2      | Kritischer Fall . . . . .                                      | 20        |
| 3.2.1    | POHOŽAEV-Identität . . . . .                                   | 20        |
| <b>4</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                            | <b>27</b> |
| <b>5</b> | <b>Literaturverzeichnis</b>                                    | <b>28</b> |

# 1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der schwachen Lösbarkeit der folgenden Klasse von semilinearen elliptischen Randwertproblemen:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1}u & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet der Dimension  $n \geq 3$  sei,  $\lambda$  eine reelle Zahl und  $1 < p \leq (n+2)/(n-2)$  ist. Insbesondere werden wir dabei der Frage nachgehen, für welche Werte von  $\lambda$  Lösbarkeit des Problems besteht. Dass der Exponent  $p$  in dem oben angegebenen Intervall liegt, beruht darauf, dass der Wert  $(n+2)/(n-2)$  als obere Schranke die Wohldefiniertheit des Integrals in der schwachen Formulierung von (1.1) sicherstellt: Da wir als Lösungs- und Testraum den SOBOLEW-Raum  $H_0^1(\Omega)$  wählen, ist der gesamte Ausdruck

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \lambda \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} u(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (1.2)$$

nach dem Einbettungssatz von SOBOLEW für  $p \in [1, 2^* - 1]$  wohldefiniert, wobei wir mit  $2^* := (n+2)/(n-2) + 1$  den kritischen Exponenten der stetigen Einbettung  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$  bezeichnen. Um schwache Lösungen des Randwertproblems (1.1) zu finden, wählen wir den variationellen Ansatz. Dabei werden wir das zur Differentialgleichung gehörende *Energiefunktional*<sup>1</sup>

$$\Psi(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} u(x)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx \quad (1.3)$$

auf die Existenz kritische Punkte (auch stationäre Punkte genannt) hin untersuchen, die dann auch schwache Lösungen unseres Randwertproblems darstellen. Da das zu untersuchende Funktional sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist und es demnach keinen globalen Minimierer gibt, erübrigen sich die direkten Methoden der Variationsrechnung, in denen es darum geht, das Energiefunktional auf dem gesamten Lösungsraum zu minimieren. Deshalb werden wir mit Hilfe geeigneter *Minimax-Methoden* aus der Theorie der kritischen Punkte die Existenz von stationären Punkten wie etwa lokale Extrema oder Sattelpunkte nachweisen. Es wird sich herausstellen, dass die Existenz von kritischen Punkten in engem Zusammenhang zu topologischen Eigenschaften von *Niveaumengen* steht.

Die Änderung der topologischen Eigenschaften von Niveaumengen und eine Kompaktheitsbedingung, welcher das Funktional genügen muss, spielen dabei die zentrale Rolle, die wir im zweiten Kapitel erörtern werden. Mit Hilfe dieser Kompaktheitsbedingung, der sogenannten *Palais-Smale-Bedingung*, werden wir mit dem *Mountain-Pass-Lemma* ein hinreichendes Kriterium für die Existenz kritischer Punkte erhalten. Des Weiteren werden wir im zweiten Kapitel auf die Regularität von Lösungen eingehen, welche in Relation zu der Beschaffenheit des zugrundeliegenden Gebietes  $\Omega$  steht. Wir werden zeigen, dass bei einem hinreichend glatten Gebiet tatsächlich klassische Lösungen zu erwarten sind.

Als Anwendung des Mountain-Pass-Lemmas auf das Energiefunktional  $\Psi$  werden wir dann im dritten Kapitel die Existenz von Lösungen des Randwertproblems (1.1) nachweisen. Dabei werden wir den subkritischen und den kritischen Fall gesondert behandeln, da im kritische Fall keine kompakte Einbettung  $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$  mehr gegeben ist und infolgedessen die Überprüfung der PALAIS-SMALE-Bedingung zusätzlicher Hilfsmittel bedarf.

---

<sup>1</sup>Der Begriff Energiefunktional stammt aus der Physik, in der derartige Funktionale in zahlreichen Anwendungen als Energie interpretiert werden können, wie es etwa beim HAMILTONSchen Prinzip der Fall ist.

## 2 Einführung in die Theorie kritischer Punkte

### 2.1 Grundlagen

Bevor wir ein Existenzresultat für den subkritischen Fall bringen, werden wir noch die dafür notwendigen Grundlagen legen. Diese Grundlagen betreffen sowohl Grundlagen der Funktionalanalysis als auch der Variationsrechnung. Dabei werden wir zu Anfang auf beliebigen BANACH-Räumen arbeiten, wenngleich wir für die Existenzbeweise HILBERT-Raum-Struktur fordern werden; denn der SOBOLEW-Raum  $H_0^1(\Omega)$  ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{1,2} := \left( \int_{\Omega} u(x)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

und dem Skalarprodukt

$$((u, v))_{1,2} := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

bildet als zugrundeliegender Lösungs- und Testraum einen separablen HILBERT-Raum (vgl. dazu auch BRÉZIS [4; Abschnitt 9.1, S. 263 ff.]). Zunächst führen wir Ableitungsbegriffe für Funktionale ein.

**Definition 2.1.1** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein BANACH-Raum,  $U \subseteq X$  offen, sowie  $u \in U$ . Ein Funktional  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt FRÉCHET-differenzierbar in  $u$ , falls es ein lineares stetiges Funktional  $A_u \in X^*$  gibt, sodass

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{J(u+v) - J(u) - \langle A_u, v \rangle}{\|v\|} = 0$$

gilt, wobei  $X^*$  den topologischen Dualraum von  $X$  bezeichnet. Falls  $J$  in jedem Punkt aus  $U$  FRÉCHET-differenzierbar ist, so heißt  $J$  FRÉCHET-differenzierbar und das Funktional  $J'(u) = A_u$  die FRÉCHET-Ableitung von  $J$  an der Stelle  $u \in X$ . Ist darüber hinaus die Abbildung

$$u \mapsto J'(u)$$

stetig bzw. lokal LIPSCHITZ-stetig auf  $U$ , so schreiben wir  $J \in C^1(U, \mathbb{R})$  bzw.  $J \in C^{1,1}(U, \mathbb{R})$ .

**Bemerkung 2.1.2** Ist ein HILBERT-Raum  $(H, (\cdot, \cdot), |\cdot|)$  gegeben, so kann die FRÉCHET-Ableitung  $J'(u) \in H^*$  nach dem RIESZschen Darstellungssatz mit einem eindeutigen  $\nabla J(u) \in H$  identifiziert werden, sodass für alle  $v \in H$

$$(\nabla J(u), v) = \langle J'(u), v \rangle \text{ mit } |\nabla J(u)| = |J'(u)|_*$$

gilt. Dann heißt  $\nabla J(u)$  auch *Gradient* von  $J$  an der Stelle  $u$ .

Ist eine Funktion FRÉCHET-differenzierbar, so folgt nach Definition 2.1.1 auch unmittelbar die Stetigkeit dieser Funktion. Neben der FRÉCHET-Ableitung führen wir noch einen schwächeren Ableitungsbegriff ein, dessen Existenz stets durch die Existenz der FRÉCHET-Ableitung impliziert wird.

**Definition 2.1.3** Unter den Voraussetzungen von Definition 2.1.1 heißt das Funktional  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  GÂTEAUX-differenzierbar im Punkt  $u \in U$  der Richtung  $v \in U$ , falls es ein lineares stetiges Funktional  $A_u \in X^*$  gibt, sodass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \langle A_u, v \rangle,$$

gilt. Dann heißt  $J'_G(u) = A_u$  GÂTEAUX-Ableitung von  $J$  an der Stelle  $u$ .

Der Vorteil der GÂTEAUX-Ableitung gegenüber der FRÉCHET-Ableitung ist, dass sie technisch einfacher zu bestimmen ist. Da wir jedoch oft die Existenz letzterer Ableitung fordern werden, benötigen wir hinreichende Kriterien, um von der Existenz der GÂTEAUX-Ableitung auf die Existenz der FRÉCHET-Ableitung zu schließen. Mit dem nächsten Lemma ist eine solche Korrelation zwischen beiden Ableitungsbegriffen gegeben.

**Lemma 2.1.4** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein BANACH-Raum,  $U \subseteq X$  offen, sowie  $u \in U$ . Ist  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  GÂTEAUX-differenzierbar und die Abbildung  $u \mapsto J'_G(u)$  stetig, so existiert die Fréchet-Ableitung von  $J$  und es gilt  $J'_G(u) = J'(u)$ .

*Beweis.* Wird in ZEIDLER [11; Proposition 4.8, S. 137 ff.] bewiesen.  $\square$

Es folgt die Definition eines kritischen Punktes.

**Definition 2.1.5** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein BANACH-Raum,  $U \subseteq X$  offen, sowie  $u \in U$  und  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $u$  FRÉCHET-differenzierbar. Dann heißt  $u$  kritischer Punkt von  $J$ , falls  $u$  die EULER-LAGRANGE Gleichung

$$J'(u) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle J'(u), v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in X$$

erfüllt.

Im Weiteren meinen wir stets die FRÉCHET-Ableitung (-Differenzierbarkeit), wenn wir von Ableitung (Differenzierbarkeit) sprechen.

Nun stellen wir noch die Einbettungssätze von SOBOLEW und RELICH-KONDRACHOW sowie die Ungleichung von POINCARÉ-FRIEDRICHS vor, die in nahezu allen folgenden Beweisen verwendet werden und demnach von großer Wichtigkeit sind. Auf alle weiteren Sätze, wovon wir Gebrauch machen, verweisen wir auf bestimmte Literatur.

**Satz 2.1.6 (SOBOLEW)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann gelten die stetigen Einbettungen

$$H_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-mp)} \quad \text{für } 1 \leq mp < n.$$

*Beweis.* Wird in DOBROWOLSKI [7; Satz 6.11, S. 109] bewiesen.  $\square$

Es folgt der Satz von RELICH-KONDRACHOW, der dazu benötigt wird, um aus der Beschränktheit einer Folge in  $H_0^1(\Omega)$  die Existenz einer in  $L^p(\Omega)$  stark konvergenten Teilfolge zu erhalten.

**Satz 2.1.7 (RELICH-KONDRACHOW)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $1 \leq p < n$ . Dann ist die Einbettung  $H_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  kompakt für  $1 \leq q < np/(n-p)$ .

*Beweis.* Einen Beweis findet man in DOBROWOLSKI [7; Satz 6.18, S. 116] oder in BRÉZIS [4; Theorem 9.16, S. 285]  $\square$

**Bemerkung 2.1.8** Wir erhalten speziell für den Raum  $H_0^1(\Omega)$  die kompakte Einbettung

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{für } 1 \leq q < 2^* = 2n/(n-2),$$

wobei die Einbettung für  $q = 2^*$  immer noch stetig ist.

**Satz 2.1.9 (POINCARÉ-FRIEDRICHS)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $1 \leq q \leq 2^*$ . Dann existiert eine reelle Konstante  $C > 0$ , sodass für alle  $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

gilt.

*Beweis.* Wird in einer allgemeineren Form in BRÉZIS [4; Corollary 9.19, S. 290] bewiesen.  $\square$

Die POINCARÉ-FRIEDRICHS-Ungleichung erlaubt es uns, den Raum  $H_0^1(\Omega)$  mit der Norm

$$\|u\| := \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

auszustatten, welche äquivalent zu  $\|\cdot\|_{1,2}$  ist und durch das Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

induziert wird (vgl. etwa BRÉZIS [4; Corollary 9.19, S. 290]).

Um zu zeigen, dass das in (1.3) definierte Energiefunktional kritische Punkte besitzt, die mit Lösungen unseres Randwertproblems (1.1) korrespondieren, müssen wir davor noch die Differenzierbarkeit des Funktionals zeigen. Wir begründen zunächst, weshalb es ausreichend ist, sich auf die Existenz von kritischen Punkten des Funktionals  $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\Phi(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} u^+(x)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p+1} dx \quad (2.1)$$

zu beschränken, wobei die Abbildung  $u \rightarrow u^+$  durch  $u^+(x) := \max\{0, u(x)\}$  für alle  $x \in \Omega$  und  $u \in H_0^1(\Omega)$  gegeben ist. Wir werden nämlich zeigen, dass alle nicht-trivialen stationären Punkte des Funktionals  $\Phi$  schwache Lösungen des folgenden Randwertproblems sind:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ + |u^+|^{p-1} u^+ & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Anschließend weisen wir nach, dass alle schwachen Lösungen von (2.2) bei einem hinreichend glatten Rand auch klassische Lösungen sind. Schließlich folgern wir mit dem starken Maximum-Prinzip, dass für  $\lambda \geq 0$  alle Lösungen im Inneren des Gebietes echt positiv sind, sodass  $u^+(x) = \max\{0, u(x)\} = u(x)$  in  $\Omega$  gilt und wir damit Lösungen des ursprünglichen Problems (1.1) gefunden haben.

Aufgrund der Vorüberlegungen werden wir die Differenzierbarkeit von  $\Phi$  nachweisen. Es sei aber bemerkt, dass die Differenzierbarkeit von  $\Psi$  in ganz analoger Weise gezeigt werden kann; denn wir führen den folgenden Beweis so, dass dafür lediglich  $u^+(x)$  durch  $u(x)$  ersetzt werden muss. Die Existenz von nicht-triviale kritischen Punkten der Funktionale  $\Phi$  und  $\Psi$  kann jedoch für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gezeigt werden. Im subkritischen Fall, d.h. für  $1 < p < 2^* - 1$ , können wir für  $\lambda < 0$  jedoch keine Aussage über die Eigenschaft der Positivität von Lösungen im Inneren des Gebietes machen, im Gegensatz zum kritischen Fall ( $p = 2^* - 1$ ), in der wir mit Hilfe der POHOŽAEV-Identität die Nicht-Existenz von Lösungen auf beschränkten Sterngebieten  $\Omega$  für  $\lambda \leq 0$  nachweisen werden (vgl. dazu Kapitel 3 über die Existenz von positiven Lösungen).

**Satz 2.1.10** *Das Energiefunktional  $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} u^+(x)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p+1} dx$$

*ist für alle  $1 \leq p \leq 2^* - 1$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  wohldefiniert und es gilt  $\Phi \in C^{1,1}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ , wobei die Ableitung  $\Phi' \in H^{-1}(\Omega)$  durch*

$$\langle \Phi'(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \lambda \int_{\Omega} u^+(x) \varphi(x) dx - \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p-1} u^+(x) \varphi(x) dx \in H_0^1(\Omega),$$

*für alle  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  gegeben ist.*

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit folgt unmittelbar aus dem Einbettungssatz von SOBOLEW. Um die Differenzierbarkeit von  $\Phi$  nachzuweisen, werden wir die Differenzierbarkeit der einzelnen Integrale zeigen und anschließend, dass diese lokal LIPSCHITZ-stetig sind. Zuerst weisen wir also nach, dass die Ableitung von

$$\Phi_1(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2$$

an der Stelle  $u$  in Richtung  $v$  durch den Ausdruck

$$\langle A_1, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = (u, v)$$

gegeben ist, wobei  $A_1 \in H^{-1}(\Omega)$  ein lineares stetiges Funktional darstellt. Offenbar ist  $\Phi'_1(u) = A_1$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\Phi_1(u+v) - \Phi_1(u) - \langle A_1, v \rangle}{\|v\|} &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - (u, v)}{\|v\|} \\ &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + (u, v) + \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - (u, v)}{\|v\|} \\ &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{1}{2}\|v\| = 0. \end{aligned}$$

Zudem folgt wegen der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung angewandt auf das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \Phi'_1(u_1) - \Phi'_1(u_2), v \rangle &= (u_1 - u_2, v) \\ &\leq \|u_1 - u_2\| \|v\| \end{aligned}$$

die LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $\Phi'_1$  und insbesondere damit auch die lokale LIPSCHITZ-Stetigkeit, sodass  $\Phi_1 \in C^{1,1}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  gilt.

Um die Differenzierbarkeit des superlinearen Terms

$$\Phi_2(u) := \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p+1} dx$$

für ein beliebiges, aber festes  $p$  mit  $1 \leq p \leq 2^* - 1$  zu zeigen, gehen wir hierbei etwas anders vor. Anders als beim Funktional  $\Phi_1$  direkt die Differenzierbarkeit nachzuweisen, werden wir hier zeigen, dass die GÂTEAUX-Ableitung  $\Phi'_{2,G}$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $v$  identisch dem Ausdruck

$$\langle A_2, v \rangle := \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p-1} u^+(x) v(x) dx \quad \text{für ein } A_2 \in H^{-1}(\Omega),$$

ist und anschließend, dass die durch  $u \mapsto \Phi'_{2,G}(u)$  gegebene Abbildung lokal LIPSCHITZ-stetig ist; denn dann fallen nach Lemma 2.1.4 GÂTEAUX-Ableitung und FRÉCHET-Ableitung zusammen und es gilt  $\Phi'_{2,G} = \Phi'_2 \in C^{1,1}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Dazu bestimmen wir zunächst das GÂTEAUX-Differential

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_2(u+tv) - \Phi_2(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} \frac{(|(u+tv)^+(x)|^{p+1} - |u^+(x)|^{p+1})}{t} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{d\vartheta} \frac{|(u+\vartheta tv)^+(x)|^{p+1}}{t} d\vartheta dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_0^1 |(u+\vartheta tv)^+(x)|^{p-1} ((u+\vartheta tv)^+(x)) v(x) d\vartheta dx \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} |(u+\vartheta tv)^+(x)|^{p-1} ((u+\vartheta tv)^+(x)) v(x) d\vartheta dx \quad (2.4) \\ &= \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p-1} u^+(x) v(x) dx = \langle A_2, v \rangle. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in (2.3) den Mittelwertsatz für GÂTEAUX-differenzierbare Abbildungen und in (2.4) den Satz von LEBESGUE über die majorisierte Konvergenz angewandt; denn nach dem Satz von TONELLI (vgl. Theorem 4.4 auf S. 94 in BRÉZIS [4]) und dem Satz von SOBOLEW ist die durch

$$(\vartheta, x) \mapsto f_t(\vartheta, x) := |(u+\vartheta tv)^+(x)|^{p-1} ((u+\vartheta tv)^+(x)) v(x)$$

definierte Abbildung für alle  $t \in \mathbb{R}$  LEBESGUE-integrierbar, d.h.  $f_t \in L^1([0, 1] \times \Omega)$ . Darüber hinaus ist  $f_t$  fast überall durch eine von  $t$  und sogar  $\vartheta$  unabhängige integrierbare Majorante beschränkt,



denn es gilt für ein hinreichend kleines  $t$

$$\begin{aligned}
|f_t(\vartheta, x)| &= |(u + \vartheta tv)^+(x)|^p |v(x)| \\
&\leq |(u + \vartheta tv)(x)|^p |v(x)| \\
&= |(u(x) + \vartheta tv(x))|^p |v(x)| \\
&\leq 2^{p-1} (|u(x)|^p + (\vartheta t)^p |v(x)|^p) |v(x)| \\
&\leq 2^{p-1} (|u(x)|^p + |v(x)|^p) |v(x)| \in L^1([0, 1] \times \Omega).
\end{aligned}$$

Darüber hinaus ist die Abbildung  $t \rightarrow f_t$  wegen  $u^+(x) = \max\{0, u(x)\} = (|u(x)| + u(x))/2$  und der Stetigkeit der Betragsfunktion ebenfalls stetig, sodass

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(\vartheta, x) = |u^+(x)|^{p-1} u^+(x) v(x)$$

folgt. Somit gilt für die GÂTEAUX-Ableitung  $\Phi'_{2,G}(u) = A_2$ . Nun wollen wir zeigen, dass die Abbildung  $\Phi'_{2,G} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  lokal LIPSCHITZ-stetig ist, d.h. dass es zu jedem Punkt in  $H_0^1(\Omega)$  eine Umgebung gibt, sodass die Restriktion des Funktionals auf diese Umgebung LIPSCHITZ-stetig ist. Dazu schätzen wir folgenden Term für  $u_1, u_2 \in \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| \leq R, R > 0\}$  mit Hilfe der HÖLDER-Ungleichung geeignet ab:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi'_{2,G}(u_1) - \Phi'_{2,G}(u_2), v \rangle &= \int_{\Omega} (|u_1^+(x)|^{p-1} u_1^+(x) - |u_2^+(x)|^{p-1} u_2^+(x)) v(x) dx \\
&\leq \left( \int_{\Omega} \left| |u_1^+(x)|^{p-1} u_1^+(x) - |u_2^+(x)|^{p-1} u_2^+(x) \right|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \|v\|_{0,p+1} \\
&\leq C \left( \int_{\Omega} \left| |u_1^+(x)|^{p-1} u_1^+(x) - |u_2^+(x)|^{p-1} u_2^+(x) \right|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \|v\|
\end{aligned}$$

und folglich

$$\|\Phi'_{2,G}(u_1) - \Phi'_{2,G}(u_2)\|_* \leq C \left( \underbrace{\int_{\Omega} \left| |u_1^+(x)|^{p-1} u_1^+(x) - |u_2^+(x)|^{p-1} u_2^+(x) \right|^{\frac{p+1}{p}} dx}_{=: P^*} \right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Weiter gilt

$$P^* = \int_{\Omega} \left| \int_0^1 \frac{d}{d\vartheta} (|(u_2 + \vartheta(u_1 - u_2))^+(x)|^{p-1} (u_2 + \vartheta(u_1 - u_2))^+(x)) d\vartheta \right|^{\frac{p+1}{p}} dx \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \left( \left| \int_0^1 p |(u_2 + \vartheta(u_1 - u_2))^+(x)|^{p-1} \operatorname{sgn}^+((u_2 + \vartheta(u_1 - u_2))^+(x)) (u_1(x) - u_2(x)) d\vartheta \right|^{\frac{p+1}{p}} \right) dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left( \int_0^1 p |(u_2 + \vartheta(u_1 - u_2))^+(x)|^{p-1} |u_1(x) - u_2(x)| d\vartheta \right)^{\frac{p+1}{p}} dx \\
&\leq \int_{\Omega} (p \max\{|u_1^+(x)|^{p-1}, |u_2^+(x)|^{p-1}\} |u_1(x) - u_2(x)|)^{\frac{p+1}{p}} dx \\
&\leq C \int_{\Omega} \max\{|u_1(x)|^{\frac{(p-1)(p+1)}{p}}, |u_2(x)|^{\frac{(p-1)(p+1)}{p}}\} |u_1(x) - u_2(x)|^{\frac{p+1}{p}} dx \\
&\leq C \left( \int_{\Omega} \max\{|u_1(x)|^{p+1}, |u_2(x)|^{p+1}\} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\Omega} |u_1(x) - u_2(x)|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in (2.5) wieder den Mittelwertsatz für GÂTEAUX-differenzierbare Abbildungen und in (2.6) die HÖLDER-Ungleichung verwendet. Aufgrund der stetigen Einbettung  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$

und der Dreiecks-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|\Phi'_{2,G}(u_1) - \Phi'_{2,G}(u_2)\|_* &\leq C \left( \int_{\Omega} \max\{|u_1(x)|^{p+1}, |u_2(x)|^{p+1}\} dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \|u_1 - u_2\|_{0,p+1} \\
&\leq C \left( \int_{\Omega} (|u_1(x)|^{p+1} + |u_2(x)|^{p+1}) dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \|u_1 - u_2\| \\
&\leq C (\|u_1\|_{0,p+1} + \|u_2\|_{0,p+1})^{p-1} \|u_1 - u_2\| \\
&\leq C (\|u_1\| + \|u_2\|)^{p-1} \|u_1 - u_2\| \\
&\leq C (R + R)^{p-1} \|u_1 - u_2\|,
\end{aligned}$$

wobei wir in jedem Schritt die Konstanten zusammengefasst und die selbe Bezeichnung  $C$  gegeben haben. Somit existiert zu jedem Punkt eine Umgebung, genauer eine Kugel mit Radius  $R > 0$ , auf der  $\Phi'_{2,G}$  LIPSCHITZ-stetig ist. Schließlich gilt nach Lemma 2.1.4  $\Phi_{2,G} = \Phi_2 \in C^{1,1}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Die Differenzierbarkeit des Funktional

$$\Phi_3(u) := \lambda \int_{\Omega} u^+(x)^2 dx$$

folgt mit der Differenzierbarkeit von  $\Phi_2$  für  $p = 1$ , sodass die Ableitung  $\Phi'_3$  sogar auf ganz  $H_0^1(\Omega)$  LIPSCHITZ-stetig ist und durch

$$\langle \Phi'_3(u), v \rangle = \lambda \int_{\Omega} u^+(x)v(x) dx, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

gegeben ist. Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\Phi \in C^{1,1}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  ist und die Ableitung  $\Phi'$  dem oben angegebenen Ausdruck entspricht.  $\square$

## 2.2 Eine Regularitätsaussage

Die Tatsache, dass jede Lösung unseres Randwertproblems (1.1) auch eine Lösung der EULER-LAGRANGE-Gleichung darstellt, ist schnell ersichtlich. Dass auch jede nicht-triviale Lösung der EULER-LAGRANGE-Gleichung mit einer Lösung von (1.1) in Korrelation steht, zeigen wir unter Verwendung des starken Maximum-Prinzips. Um das starke Maximum-Prinzip jedoch auf den LAPLACE-Operator anwenden zu können, braucht man entsprechend glatte Lösungen, d.h. Lösungen im klassischen Sinne. Das Maximum-Prinzip lässt sich auch auf die Anwendung von schwachen Lösungen erweitern. Die Anwendung wäre in unserem Fall aber nicht zielführend, da man lediglich die Aussage  $u \geq 0$  in  $\Omega$  gewinnt (vgl. dazu den Abschnitt 7.5 über Maximum-Prinzipien in [9; S. 159 ff.]).

Aus diesem Grund machen wir in dem folgenden Satz noch zuvor eine Aussage über die Regularität von Lösungen.

**Satz 2.2.1** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand  $\partial\Omega$ ,  $1 < p \leq 2^* - 1$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist jede schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  des Randwertproblems*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ + |u^+|^{p-1}u^+ & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

*auch klassische Lösung und gehört der Regularitätsklasse  $C^2(\overline{\Omega})$  an.*

*Beweis.* Einen Beweis findet man in STRUWE [10; Appendix B S. 268 ff.].  $\square$

**Bemerkung 2.2.2** Im Beweis des Satzes wird die Regularität der Lösung durch Anwendung der SOBOLEWSCHEN Einbettungssätze und mit SCHAUDER-Abschätzungen schrittweise „hochgezogen“. Die Gültigkeit des Satzes bleibt auch für die rechte Seite  $\lambda u + |u|^{p-1}u$  erhalten (vgl. ebenfalls STRUWE [10; Appendix B S. 268 ff.]).

Wenn wir im Weiteren von Lösungen des Randwertproblems sprechen, dann unterscheiden wir wegen Satz 2.2.1 dabei nicht mehr zwischen schwachen und klassischen Lösungen und setzen ein hinreichend glattes Gebiet voraus; denn um die Eigenschaft der Positivität von Lösungen zu zeigen, setzt das starke Maximum-Prinzip, wie schon erwähnt, hinreichend glatte Lösungen voraus. Andernfalls ist die Bedingung  $u > 0$  in (1.1) durch  $u \geq 0$  zu ersetzen und alle Existenzresultate für schwache Lösungen bleiben auch bei keinen zusätzlichen Anforderung an das Gebiet  $\Omega$  gültig.<sup>2</sup>

Mit folgendem Lemma zeigen wir nun die Positivität von kritischen Punkten im Inneren des Gebietes  $\Omega$ .

**Lemma 2.2.3** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand  $\partial\Omega$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $u \in H_0^1(\Omega)$  ein nicht-trivialer kritischer Punkt von  $\Phi$ . Dann ist  $u$  eine klassische Lösung des Randwertproblems (1.1).*

*Beweis.* Da  $u$  Lösung der EULER-LAGRANGE-Gleichung und damit eine schwache Lösung von (2.2) ist, gehört  $u$  nach Satz 2.2.1 der Regularitätsklasse  $C^2(\bar{\Omega})$  an. Somit gilt für den Differentialoperator

$$Lu := -\Delta u = \lambda u^+ + |u^+|^{p-1}u^+ \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Die Positivität im Innern von  $\Omega$  zeigen wir mit dem starken Maximum-Prinzip: Wir nehmen an, es gebe einen Punkt  $x_0$  im Inneren von  $\Omega$  mit  $u(x_0) = 0$ . Dann folgt nach dem starken Maximum-Prinzip (vgl. etwa EMMRICH [8; Satz 2.5.8, S. 40] oder DOBROWOLSKI [7; Satz 7.17, S. 162]), dass  $u \equiv 0$  auf ganz  $\Omega$ . Da  $u$  jedoch eine nicht-triviale Lösung der EULER-LAGRANGE-Gleichung ist, folgt durch Widerspruch  $u > 0$  in  $\Omega$ . Damit fallen alle klassischen Lösungen der Randwertprobleme (2.2) und (1.1) zusammen.  $\square$

### 2.3 Eigenwerte und Eigenfunktionen des LAPLACE-Operators

In diesem Abschnitt wollen wir einige Definitionen und Resultate aus der Spektraltheorie des LAPLACE-Operators vorstellen, welche uns dazu dienen wird, einen Beweis über die Nicht-Existenz von Lösungen des Randwertproblems (1.1) für bestimmte  $\lambda$  zu bringen.

**Definition 2.3.1** *Eine Funktion  $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  heißt Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  des LAPLACE-Operators mit homogenen DIRICHLET-Randbedingungen<sup>3</sup>, falls  $u$  eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

ist.

In der Tat gibt es abzählbar unendlich viele Eigenwerte  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , sodass die zugehörigen Eigenfunktionen  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$  mit  $\|u_k\| = 1$  Lösungen des Eigenwertproblems (2.7) bilden und welche nach dem Satz von COURANT-HILBERT durch eine Vielzahl von Eigenschaften charakterisiert werden (vgl. etwa ATTOUCH, BUTTAZZO und MICHAILLE [2; Theorem 8.3.2, S. 288] oder DOBROWOLSKI [7; Satz 8.39, S. 200]). Die Menge der Eigenwerte wird auch das Spektrum des LAPLACE-Operators genannt und häufig mit  $\sigma(-\Delta)$  bezeichnet. Essentiell sind die Eigenschaften, dass das Spektrum des LAPLACE-Operators keine Häufungspunkte besitzt und die Eigenwerte allesamt positiv sind. Darüber hinaus ist das Spektrum unbeschränkt. Somit können wir die Folgenglieder der Folge  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  so sortieren, dass für die Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \rightarrow \infty$$

gilt. Es sei bemerkt, dass die Eigenwerte zudem abhängig vom betrachteten Gebiet sind, d.h.  $\lambda_k = \lambda_k(\Omega)$  gilt. Die Positivität der Eigenwerte wird ersichtlich, wenn man sich die schwache Formulierung von (2.7) anschaut:

$$\int_{\Omega} \nabla u_k(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \lambda_k \int_{\Omega} u_k(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

<sup>2</sup>vgl. hierzu Kapitel 3 Abschnitt 2 in STRUWE [10] und Abschnitt 2.3.1 in BADIALE und SERRA [3].

<sup>3</sup>Einige Autoren schreiben für den LAPLACE-Operator mit homogenen DIRICHLET-Randbedingungen der Einfachheit halber LAPLACE-DIRICHLET-Operator, vgl. ATTOUCH, BUTTAZZO und MICHAILLE [2].

Wählt man nun als Testfunktion  $\varphi = u_k \neq 0$ , so erhält man nach Umstellung

$$\lambda_k = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_k(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} u_k(x)^2 dx} > 0.$$

Somit folgt für alle Eigenwerte  $\lambda_k > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Wir definieren den RAYLEIGH-Quotienten  $\mathcal{R} : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit

$$\mathcal{R}(v) := \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} v(x)^2 dx}$$

und erhalten

$$\lambda_1 = \mathcal{R}(u_1) \geq \inf_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v) = \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v) = \frac{1}{C}, \quad (2.8)$$

wobei wir im letzten Schritt die POINCARÉ-FRIEDRICHSsche Ungleichung verwendet haben und dass diese für gewisse Funktionen  $u \in H_0^1(\Omega)$  auf beschränkten Gebieten  $\Omega$  zur Gleichung übergeht.<sup>4</sup> Tatsächlich gilt auch Gleichheit in (2.8), sodass das Infimum durch  $v = u_1$  angenommen wird. Dies und weitere Eigenschaften zeigen wir mit

**Satz 2.3.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand  $\partial\Omega$ . So ist jeder Minimierer  $u = \arg \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v)$  klassische Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 v & \text{in } \Omega, \\ v > 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

*Beweis.* Sei  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  also ein Minimierer von  $\mathcal{R}$ . Mit der Quotientenregel für FRÉCHET-differenzierbare Abbildungen<sup>5</sup> und der in Satz 2.1.10 gezeigten FRÉCHET-Differenzierbarkeit der Funktionale  $\Phi_1(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$  und  $\Phi_2(v) = \lambda_1 \int_{\Omega} v(x)^2 dx$  folgt die Existenz der Ableitung des Rayleigh-Quotienten mit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}'(u), v \rangle &= \frac{(\lambda_1 \int_{\Omega} u(x)^2 dx) \langle \Phi_1'(u), v \rangle - (\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx) \langle \Phi_2'(u), v \rangle}{(\lambda_1 \int_{\Omega} u(x)^2 dx)^2} \\ &= \frac{(\lambda_1 \int_{\Omega} u(x)^2 dx) (\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx) - (\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx) (\lambda_1 \int_{\Omega} u(x)v(x) dx)}{(\lambda_1 \int_{\Omega} v(x)^2 dx)^2} \end{aligned}$$

für alle  $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ . Da  $u$  aber als globaler Minimierer ein kritischer Punkt von  $\mathcal{R}$  ist, gilt

$$\langle \mathcal{R}'(u), v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$$

und folglich

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u(x)^2 dx \cdot \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \cdot \lambda_1 \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx &= \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} u(x)^2 dx} \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \\ &= \frac{1}{C} \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Vgl. hierzu auch Korollar 9.19 auf S. 290 in BRÉZIS [4].

<sup>5</sup>Siehe Proposition 1.3.6 auf S. 13 in BADIALE und SERRA [3].

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass  $u$  ein Minimierer von  $\mathcal{R}$  ist. Notwendigerweise muss  $\lambda_1 = \frac{1}{C}$  gelten, denn andernfalls gäbe es einen kleineren Eigenwert als  $\lambda_1$ , was im Widerspruch zur Definition des ersten Eigenwertes steht. Folglich wird der RAYLEIGH-Quotient durch den Eigenvektor  $u_1$  und dessen Vielfache minimiert.

Um die Positivität von  $u$  zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass mit der Funktion  $u$  auch dessen Betrag ein Minimierer ist und wir o.B.d.A  $u \geq 0$  annehmen dürfen. Aufgrund der hinreichenden Glattheit des Gebietes  $\Omega$  ist jede schwache Lösung auch klassische Lösung von (2.9) (vgl. etwa Brézis[4; Abschnitt 9.6, S. 298 ff.]). Somit ist es uns wegen der Regularität jeder Lösung möglich, das starke Maximum-Prinzip auf den Operator

$$Lu := -\Delta u = \lambda_1 u \geq 0$$

anzuwenden. Die Behauptung folgt nun analog zu Lemma 2.2.3 mit dem starken Maximum-Prinzip.  $\square$

**Bemerkung 2.3.3** Mit dem vorstehenden Satz haben wir insbesondere die beste Konstante der POINCARÉ-FRIEDRICHS-Ungleichung ausgemacht und dass Gleichheit in dieser Ungleichung durch Funktionen aus dem Eigenraum des Eigenwertes  $\lambda_1$  angenommen wird. Somit können wir  $\lambda_1$  als Optimalwert eines Minimierungsproblems auffassen:

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v). \quad (2.10)$$

Mit Gleichung (2.10) haben wir dem Eigenwert  $\lambda_1$  eine variationelle Charakterisierung gegeben.

Um eine Vorstellung davon zu bekommen, wie solche Eigenwerte mit ihren zugehörigen Eigenfunktionen aussehen, betrachten wir das eindimensionale Eigenwertproblem.

**Beispiel 2.3.4** Es sei das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -v''(x) = \lambda v(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Mit dem üblichen Exponentialansatz  $v(x) = e^{\omega x}$  erhält man Lösungen der Form

$$v_k(x) = c_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}(x-a)\right),$$

wobei das Spektrum aufgrund der homogenen DIRICHLET-Randdaten durch die Menge

$$\sigma\left(-\frac{\partial}{\partial x^2}\right) = \left\{ \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2 : k \in \mathbb{N} \right\}$$

mit  $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2$  gegeben ist (vgl. hierzu Abschnitt 2.2 S. 21 ff. in EMMRICH [8]). Wählt man für die Konstante  $c_k = \frac{\sqrt{2(b-a)}}{\pi k}$ , so ist die Normierungsbedingung  $\|v_k\| = 1$  erfüllt und die Funktionen  $v_k$  bilden die zu den Eigenwerten  $\lambda_k$  zugehörigen Eigenfunktionen. Für die erste Eigenfunktion erhalten wir

$$v_1(x) = \frac{\sqrt{2(b-a)}}{\pi} \sin\left(\pi \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right).$$

Offenbar gilt  $v_1(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , wie nicht anders zu erwarten war.

Wir besitzen nun die nötigen Hilfsmittel, um zu zeigen, dass das Problem (1.1) für  $\lambda \geq \lambda_1$  keine Lösungen besitzt.

**Satz 2.3.5** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand  $\partial\Omega$ . Dann besitzt das Randwertproblem (1.1) für alle  $\lambda \geq \lambda_1$  und  $p \in (1, 2^* - 1]$  keine Lösungen.

*Beweis.* Sei  $v \in H_0^1(\Omega)$  eine Lösung des Randwertproblems (1.1) mit  $v > 0$  in  $\Omega$ . Nun betrachten wir das Randwertproblem (2.7), welche durch die Eigenfunktion  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$  des ersten Eigenwertes gelöst wird und testen in der schwachen Formulierung mit unserer Lösung  $v$ . Da wir mit Satz 2.3.2 gezeigt haben, dass auf hinreichend glatten Gebieten auch  $u_1 > 0$  in  $\Omega$  gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_{\Omega} u_1(x)v(x)dx &= \int_{\Omega} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x)dx \\ &= \int_{\Omega} |v(x)|^{p-1}v(x)u_1(x)dx + \lambda \int_{\Omega} v(x)u_1(x)dx \\ &> \lambda \int_{\Omega} v(x)u_1(x)dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dabei haben wir in der Gleichung (2.11) ausgenutzt, dass  $v$  eine Lösung von (1.1) ist; denn sowohl  $u_1$  als auch  $v$  können als Testfunktionen interpretiert werden, da unser zugrunde liegender Testraum  $H_0^1(\Omega)$  dem Lösungsraum entspricht. Es folgt unmittelbar  $\lambda < \lambda_1$  und mithin die Behauptung.  $\square$

## 2.4 Minimax-Methoden

Um der Frage nach der Existenz stationärer Punkte des Energiefunktionals  $\Phi$  für  $\lambda < \lambda_1$  nachzugehen, stellen wir zunächst fest, dass Minimierungsmethoden des Funktionals auf dem gesamten Lösungsraum nicht hilfreich sind, da  $\Phi$  nach unten unbeschränkt ist:

Sei dazu  $\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  beliebig, aber fest gewählt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \Phi(t\bar{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla t\bar{u}(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} (t\bar{u}^+(x))^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |t\bar{u}^+(x)|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \|t\bar{u}\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|t\bar{u}^+\|_{0,2}^2 - \frac{1}{p+1} \|t\bar{u}^+\|_{0,p+1}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} t^2 \|\bar{u}\|^2 - \frac{1}{2} \lambda t^2 \|\bar{u}^+\|_{0,2}^2 - \frac{1}{p+1} t^{p+1} \|\bar{u}^+\|_{0,p+1}^{p+1} \\ &= \left( \frac{1}{2} \|\bar{u}\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|\bar{u}^+\|_{0,2}^2 - \frac{1}{p+1} t^{p-1} \|\bar{u}^+\|_{0,p+1}^{p+1} \right) t^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Da  $p > 1$  ist, ist dieses Polynom in  $t$  nach unten unbeschränkt und damit auch das Funktional selbst, d. h. es gilt  $\Phi(t\bar{u}) \rightarrow -\infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Aus diesem Grund werden wir in diesem Abschnitt die sogenannten Minimax-Methoden vorstellen und orientieren uns dabei an BADIÁLE und SERRA [3]. Minimax-Methoden sind Methoden aus der Theorie der kritischen Punkte, die es uns erlauben, auch nach kritischen Punkten zu suchen, welche nicht globale Minimierer eines Funktionals sind. Vielmehr handelt es sich bei diesen kritischen Punkten um lokale Extrema oder Sattelpunkte.

Da das Randwertproblem (1.1) (abgesehen von der Positivitäts-Bedingung) auch die triviale Lösung besitzt, ist die Nullfunktion ein kritischer Punkt des zugehörigen Energiefunktionals. Um welche Art von kritischen Punkten es sich dabei handelt, wird mit folgender Abschätzung klar:

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} u^+(x)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|u^+\|_{0,2}^2 - \frac{1}{p+1} \|u^+\|_{0,p+1}^{p+1} \\
&\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda_1} \|u^+\|^2 - \frac{C^{p+1}}{p+1} \|u^+\|^{p+1} \\
&\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda_1} \|u\|^2 - \frac{C^{p+1}}{p+1} \|u\|^{p+1} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 - \frac{C^{p+1}}{p+1} \|u\|^{p+1} \\
&= \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) - \frac{C^{p+1}}{p+1} \|u\|^{p-1} \right] \|u\|^2 =: \varrho,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei wir die Eigenschaft der stetigen Einbettung von  $H_0^1(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$  für  $1 < p \leq 2^*$  ausgenutzt haben und  $C \in \mathbb{R}$  die Konstante dieser stetigen Einbettung bezeichnet. Da auch hier  $p > 1$  und  $\lambda < \lambda_1$  ist, folgt  $\Phi(u) \geq \varrho > 0$  für ein hinreichend kleines  $\|u\| > 0$ .

Somit handelt es sich bei der Nullfunktion wegen  $\Phi(0) = 0$  um ein strikt lokales Minimum des Energiefunktional  $\Phi$ . Es wäre nun naheliegend zu vermuten, dass es auf einer Verbindungsstrecke zwischen der Nullfunktion und einer Funktion  $v \in H_0^1(\Omega)$  mit  $\Phi(v) \leq 0$  ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt gibt, wie es bei stetigen Funktionen im Eindimensionalen stets der Fall ist. Funktionale, die diese Vermutung zulassen, besitzen auch die sogenannte *Mountain-Pass-Geometrie* (vgl. dazu auch den Abschnitt 2.4.2 Mountain-Pass-Lemma). Obwohl diese Vermutung ohne Weiteres im Allgemeinen falsch ist, werden wir zeigen, dass es in unserem Fall tatsächlich zutrifft. Dazu erörtern wir die hinreichenden Kriterien für Funktionale, für die diese Vermutung zutrifft und werden dabei auf den Begriff der PALAIS-SMALE-Bedingung antreffen.

### 2.4.1 PALAIS-SMALE-Bedingung

Stationäre Punkte werden, wie wir bereits wissen, als Lösungen der EULER-LAGRANGE-Gleichung definiert. Ist  $u \in X$  ein stationärer Punkt des Funktional  $J$ , so existiert eine in  $X$  stark konvergente Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  mit

$$J(u_k) \rightarrow c \quad \text{in } X \quad \text{und} \quad J'(u_k) \rightarrow 0 \quad \text{in } X^*, \tag{2.14}$$

für  $k \rightarrow \infty$  und ein  $c \in \mathbb{R}$ . Offenbar gilt auch  $c = J(u)$ . Es stellt sich die Frage, ob wir uns auf die Existenz einer Folge beschränken können, die lediglich (2.14) erfüllt. Solche Folgen tragen ihren eigenen Namen, was uns zur folgenden Definition führt:

**Definition 2.4.1** Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Eine Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ , für die gilt:

$$\begin{aligned}
&\{J(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt und} \\
&J'(u_k) \rightarrow 0 \text{ im Dualraum } X^* \text{ für } k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

heißt PALAIS-SMALE-Folge für  $J$ . Falls

$$\begin{aligned}
&J(u_k) \rightarrow c \text{ in } X \text{ und} \\
&J'(u_k) \rightarrow 0 \text{ in } X^* \text{ für } k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

für ein  $c \in \mathbb{R}$  gilt, so heißt die Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  PALAIS-SMALE-Folge zum Niveau  $c$ .

Reicht es nun aus, die Existenz einer solchen PALAIS-SMALE-Folge nachzuweisen, um auf die Existenz eines kritischen Punktes zu schließen? Im Allgemeinen nicht, da man daraus keine genaue Aussage über die Konvergenz der Folge selbst machen kann, wie das folgende Beispiel im Eindimensionalen zeigt:

**Beispiel 2.4.2** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto xe^{1-x}$  besitzt eine PALAIS-SMALE-Folge zum Niveau Null. Denn es existiert eine Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , für die

$$f(x_k) = x_k e^{1-x_k} \rightarrow 0 \text{ und} \\ f'(x_k) = (1-x_k)e^{1-x_k} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

gilt (vgl. Abbildung 1 auf S. 14).

Offenbar ist dies genau dann der Fall, wenn die Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gegen unendlich strebt, sodass diese Folge keine konvergente Teilfolge besitzt. Man sagt auch, die Funktion besäße einen kritischen Punkt im „Unendlichen“.

Diese fehlende Konvergenz einer PALAIS-SMALE-Folge fordert man mit der sogenannten PALAIS-SMALE-Bedingung. Dies ist eine Forderung an das Funktional, was die Existenz einer stark konvergenten Teilfolge einer PALAIS-SMALE-Folge sicherstellt.

**Definition 2.4.3** Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ .

Das Funktional  $J$  genügt einer PALAIS-SMALE-Bedingung  $(PS)$ , falls jede PALAIS-SMALE-Folge für  $J$  eine in  $X$  stark konvergente Teilfolge besitzt.

Das Funktional genügt einer PALAIS-SMALE-Bedingung zum Niveau  $c$   $(PS)_c$ , falls jede PALAIS-SMALE-Folge zum Niveau  $c$  eine in  $X$  stark konvergente Teilfolge besitzt.

Die Funktion  $f$  aus Beispiel 2.4.2 genügt etwa der  $(PS)_1$ -Bedingung, aber nicht der  $(PS)_0$ -Bedingung. Folglich genügt  $f$  auch nicht der „globalen“  $(PS)$ -Bedingung.

Es sei bemerkt, dass die  $(PS)$ -Bedingung keine Aussage über die Existenz einer PALAIS-SMALE-Folge macht; denn nach Definition kann ein Funktional der  $(PS)$ -Bedingung genügen, wenngleich die Menge der PALAIS-SMALE-Folgen leer ist. Existiert jedoch eine solche Folge, so kann auf die Existenz eines kritischen Punktes geschlossen werden. Es gilt nämlich:

**Lemma 2.4.4** Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ .

Existiert eine PALAIS-SMALE-Folge für das Funktional  $J$  und genügt  $J$  der  $(PS)$ -Bedingung, so besitzt  $J$  mindestens einen kritischen Punkt.

Falls eine PALAIS-SMALE-Folge zum Niveau  $c \in \mathbb{R}$  existiert und  $J$  der  $(PS)_c$ -Bedingung genügt, so besitzt  $J$  mindestens einen kritischen Punkt zum Niveau  $c$ .

*Beweis.* Sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine PALAIS-SMALE-Folge zum Niveau  $c$  und genüge  $J$  der  $(PS)_c$ -Bedingung. Somit existiert eine in  $X$  stark konvergente Teilfolge  $\{u_{k'}\}_{k' \in \mathbb{N}}$  mit dem Grenzwert  $u^* \in X$ . Offensichtlich ist damit durch  $u^*$  ein kritischer Punkt von  $J$  zum Niveau  $J(u^*) = c$  gegeben, denn aus der Stetigkeit von  $J$  und  $J'$  folgt

$$0 = \lim_{k' \rightarrow \infty} J'(u_{k'}) = J'(u^*) \text{ und } c = \lim_{k' \rightarrow \infty} J(u_{k'}) = J(u^*).$$

Genügt  $J$  der  $(PS)$ -Bedingung, so genügt  $J$  insbesondere einer  $(PS)_c$ -Bedingung, für ein  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Mit diesem Lemma haben wir nun zwei voneinander unabhängige Kriterien für die Existenz von kritischen Punkten gegeben. Will man also nachweisen, dass es kritische Punkte gibt, so muss man lediglich zeigen, dass es eine PALAIS-SMALE-Folge gibt und dass das Funktional einer PALAIS-SMALE-Bedingung genügt. Um Letzteres handelt es sich, wie wir auch am Beispiel 2.4.2 gesehen haben, offenbar um eine Art Kompaktheits-Bedingung. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass, wenn  $J$  der  $(PS)_c$ -Bedingung genügt, dadurch die Kompaktheit der Menge der kritischen Punkte zum Niveau  $c$ ,

$$K_c := \{u \in X : J(u) = c, J'(u) = 0\}, \quad (2.15)$$

folgt.



### 2.4.2 Mountain-Pass-Lemma

Was sind jedoch hinreichende Bedingungen für die Existenz von PALAIS-SMALE-Folgen? Dieser Frage gehen wir in diesem Abschnitt nach und werden sehen, dass die Existenz solcher Folgen eng mit den topologischen Eigenschaften von Niveaumengen verknüpft ist.

**Definition 2.4.5** Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional. Für  $c \in \mathbb{R}$  heißt die Menge

$$J^c := \{u \in X : J(u) \leq c\}, \quad (2.16)$$

Niveaumenge von  $J$  zum Niveau  $c$ .

Die Änderung der Topologie von Niveaumengen spielt dabei die wesentliche Rolle. Was genau unter „Änderung“ zu verstehen ist, demonstrieren wir anhand der Funktion  $f$  aus Beispiel 2.4.2, welche durch  $f(x) = xe^{1-x}$  gegeben war. Die Funktion  $f$  besitzt wegen  $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$  einen kritischen Punkt an der Stelle  $x = 1$  mit dem Funktionswert  $f(1) = 1$ . Damit existiert auch eine PALAIS-SMALE-Folge von  $f$  zum Niveau 1. Die Niveaumenge zu diesem Niveau besteht gerade aus der Menge der reellen Zahlen, da  $f$  an der Stelle  $x = 1$  ein globales Maximum besitzt, d.h.  $f^1 = \mathbb{R}$ . Betrachten wir nun die Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $1 - \varepsilon$  für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ . Dann existieren reelle Zahlen  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\delta_1 < \delta_2$ , sodass die Niveaumenge  $f^{1-\varepsilon}$  die Form

$$f^{1-\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 1 - \varepsilon\} = (-\infty, \delta_1] \cup [\delta_2, \infty) \subseteq f^1$$

hat, wie in Abbildung 1 zu sehen ist.

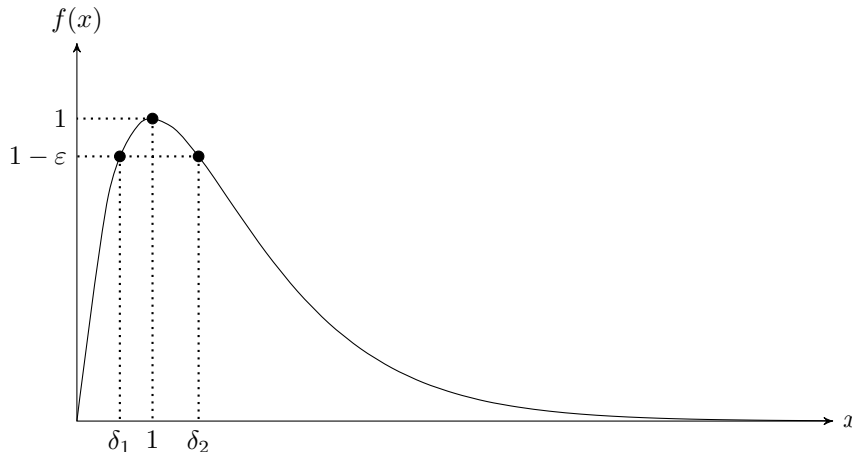


Abbildung 1: Graph der Funktion  $f(x) = xe^{1-x}$ .

Es fällt auf, dass die Menge  $f^{1-\varepsilon}$  im Gegensatz zu  $f^1$  nicht zusammenhängend ist. Offenbar findet im Übergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  eine Änderung der topologischen Eigenschaften von  $f^{1-\varepsilon}$  statt. Dieses Phänomen erörtern wir genauer mit Hilfe von *Deformationen*.

**Definition 2.4.6** Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $B \subseteq X$ . Eine stetige Abbildung  $\eta \in C([0, 1] \times B, B)$  heißt *Deformation* von  $B$ , falls  $\eta(0, u) = u$  für alle  $u \in B$  gilt. Ferner heißt  $B$  *deformierbar* in  $A \subseteq B$ , falls gilt

$$\eta(t, u) \in A \quad \text{für alle } u \in A \text{ und alle } t \in [0, 1], \quad (2.17)$$

$$\eta(1, u) \in A \quad \text{für alle } u \in B. \quad (2.18)$$

Die Menge  $f^1$  ist also nicht in  $f^{1-\varepsilon}$  deformierbar, denn andernfalls gäbe es eine stetige Abbildung  $\eta \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , sodass  $\eta(1, f^1) \subseteq f^{1-\varepsilon}$  gilt. Dies kann jedoch nicht sein, da das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend bleibt. Dem Beispiel zufolge sind Niveaumengen zu Niveaus, an denen es PALAIS-SMALE-Folgen gibt, nicht ineinander deformierbar. Unter welchen Bedingungen, eine solche Deformation von Niveaumengen möglich ist, zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 2.4.7** Sei  $H$  ein HILBERT-Raum und  $J \in C^{1,1}(H, \mathbb{R})$ , sowie  $c \in \mathbb{R}$ . Existiert keine PALAIS-SMALE-Folge zum Niveau  $c$ , so ist für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$  die Niveaumenge  $J^{c+\varepsilon}$  deformierbar in  $J^{c-\varepsilon}$  und  $J^{c-2\varepsilon}$  bleibt dabei fixiert.

*Beweis.* Wird in BADIALE und SERRA [3; Lemma 4.1.18, S. 152] bewiesen.  $\square$

Mit dem vorstehenden Lemma sind wir nun in der Lage, das Mountain-Pass-Lemma zu beweisen, welches uns, unter bestimmten Bedingungen an ein Funktional, die Existenz von sowohl PALAIS-SMALE-Folgen als auch kritischen Punkten desselben Funktionals sichert.

**Lemma 2.4.8 (Mountain-Pass-Lemma)** Sei  $H$  ein HILBERT-Raum und  $J \in C^{1,1}(H, \mathbb{R})$ . Existieren positive reelle Zahlen  $\varrho$  und  $r$ , sodass  $J$  die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(MP-1)  $J(0) = 0$  und  $J(u) \geq \varrho$  für alle  $u \in S_r := \{u \in H : \|u\| = r\}$ ;

(MP-2) Es existiert ein  $e \in H_0^1(\Omega)$ , sodass  $\|e\| > r$  und  $J(e) \leq 0$ .

Dann existiert eine PALAIS-SMALE-Folge zu einem Minimax-Niveau  $c$  mit

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)), \quad (2.19)$$

wobei

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Falls  $J$  zusätzlich der  $(PS)_c$ -Bedingung genügt, dann existiert ein kritischer Punkt von  $J$  zum Niveau  $c$ .

*Beweis.* Wir merken zunächst an, dass  $\Gamma$  nichtleer ist, da  $\alpha$  mit  $\alpha(t) = te$  ein Element dieser Menge ist. Darüber hinaus ist  $c$  wohldefiniert; denn es folgt einerseits aus der Stetigkeit von  $J$  und der Funktion  $\gamma \in \Gamma$  die Stetigkeit der Komposition  $J(\gamma)$  für alle  $\gamma \in \Gamma$ , sodass die Abbildung  $t \mapsto J(\gamma(t))$  das Maximum auf dem Intervall  $[0,1]$  annimmt. Folglich gilt

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) < \infty.$$

Andererseits folgt aus (MP-1) und der Tatsache, dass  $\gamma \in \Gamma$  die Elemente 0 und  $e$  stetig verbindet, dass

$$\max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq \varrho \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma$$

und somit auch über das Infimum aller Funktionen aus  $\Gamma$ , d.h.

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq \varrho > 0. \quad (2.20)$$

Wir nehmen an, es existiere keine PALAIS-SMALE-Folge zum Niveau  $c$  und führen dies zu einem Widerspruch. Dann ist die Niveaumenge  $J^{c+\varepsilon}$  für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$  nach Lemma 2.4.7 deformierbar in  $J^{c-\varepsilon}$ , wobei die Menge  $J^{c-2\varepsilon}$  fixiert bleibt. Es existiert also eine Deformation  $\eta \in C([0,1] \times J^{c+\varepsilon}, J^{c+\varepsilon})$ , welche die Eigenschaften

i)  $\eta(t, u) = u$  für alle  $u \in J^{c-2\varepsilon}$  und alle  $t \in [0,1]$ ;

ii)  $\eta(t, u) \in J^{c-\varepsilon}$  für alle  $u \in J^{c-\varepsilon}$  und alle  $t \in [0,1]$ ;

iii)  $\eta(1, u) \in J^{c-\varepsilon}$  für alle  $u \in J^{c+\varepsilon}$

erfüllt. Nach Definition eines Minimax-Niveaus existiert ein  $\gamma \in \Gamma$ , sodass

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon. \quad (2.21)$$

Wir definieren

$$\tilde{\gamma}(t) := \eta(t, \gamma(t))$$

und zeigen, dass  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  für hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$ . Zu zeigen ist also die Stetigkeit von  $\tilde{\gamma}$  und dass die Randbedingungen  $\tilde{\gamma}(0) = 0$  und  $\tilde{\gamma}(1) = e$  erfüllt sind. Aber als Komposition stetiger Funktionen ist die Stetigkeit von  $\tilde{\gamma}$  gegeben. Auch die Randbedingungen sind aufgrund der Eigenschaft *i*) und (2.20) erfüllt, denn für hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$  gilt

$$c - 2\varepsilon \geq \varrho - 2\varepsilon > 0,$$

sodass  $0, e \in J^{c-2\varepsilon}$  und schließlich

$$\tilde{\gamma}(0) = \eta(0, \gamma(0)) = \eta(0, 0) = 0 \text{ und } \tilde{\gamma}(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e.$$

Aus (2.21) und der Eigenschaft *iii*) folgern wir

$$\tilde{\gamma}(t) = \eta(t, \gamma(t)) \in J^{c-\varepsilon} \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

da  $\gamma(t) \in J^{c+\varepsilon}$  für alle  $t \in [0, 1]$  folgt. Schließlich erhalten wir durch

$$c \leq \max_{t \in [0, 1]} J(\tilde{\gamma}(t)) \leq c - \varepsilon$$

den gewünschten Widerspruch. Damit existiert eine PALAIS-SMALE-Folge zu dem in (2.19) angegebenen Niveau  $c$ . Die Existenz eines kritischen Punktes zum Niveau  $c$  folgt dann mit Lemma 2.4.7. □

**Bemerkung 2.4.9** Das Resultat ist auch auf allen BANACH-Räumen und für alle stetig differenzierbaren Funktionale gültig, welche die Eigenschaften **(MP-1)** und **(MP-2)** erfüllen. Für eine ausführliche Abhandlung verweisen wir auf BRÉZIS und NIRENBERG [6].

Das Mountain-Pass-Lemma kann, wie der Name auch schon sagt, geometrisch interpretiert werden. Die Punkte  $0$  und  $e$  mit  $J(0) = 0$  und  $J(e) \leq 0$  können dabei als zwei Täler gesehen werden, welche durch ein Gebirge mit einer Höhe von mindestens  $\varrho$  räumlich voneinander getrennt werden (Bedingungen **(MP-1)** und **(MP-2)**). Um von einem Tal zum anderen Tal zu gelangen, muss demnach eine Mindesthöhe von  $\varrho$  bezwungen werden. Wählt man nun von allen möglichen Wegen, welche die Täler verbindet, denjenigen mit dem niedrigsten Pass, so befindet sich auf diesem Weg in der Regel ein Sattelpunkt, wie Abbildung 2 zu sehen ist. Gemäß dieser Prozedur wird auch das Minimax-Niveau  $c$  aus dem Lemma angenommen; denn aus der Klasse der stetigen Verbindungsstrecken von  $0$  nach  $e$  wird über die maximale Höhe des Weges minimiert. Es sei noch angemerkt, dass  $c$  dabei stets von  $e$  abhängt, d.h.  $c = c(e)$  gilt.

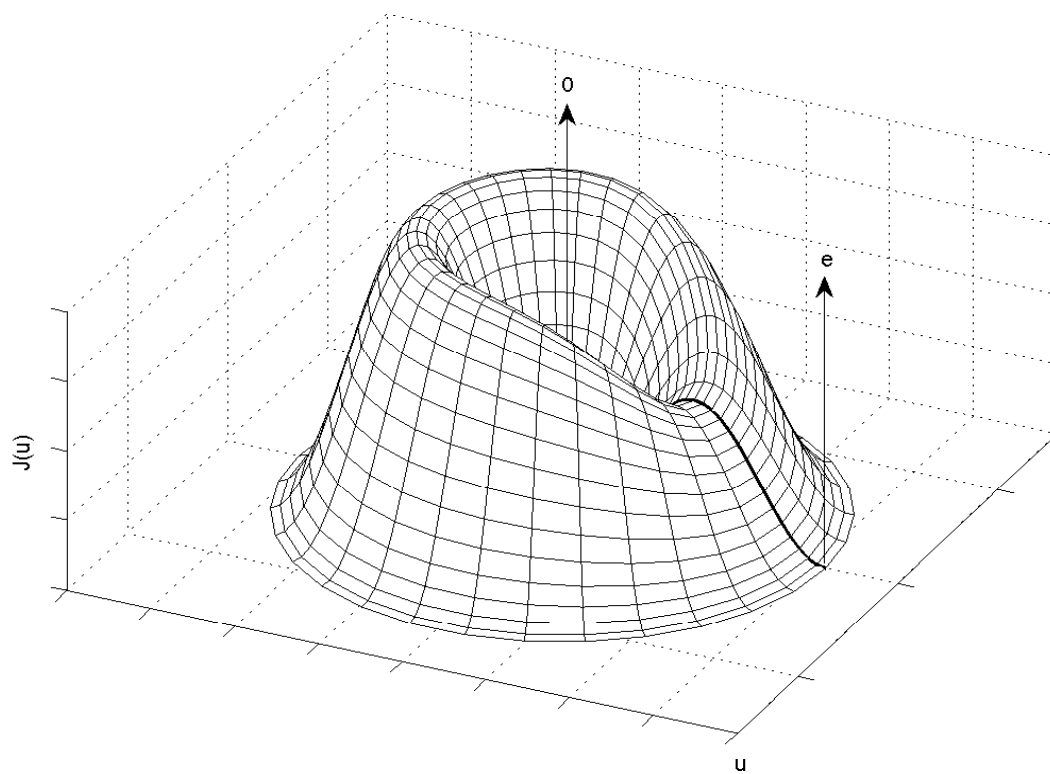


Abbildung 2: Illustration des Mountain-Pass-Lemmas.

### 3 Existenz von positiven Lösungen

In diesem Kapitel werden wir als Anwendung des Mountain-Pass-Lemmas die Existenz von positiven Lösungen des Randwertproblems (1.1) vorstellen, welche auf die Arbeit von AMBROSETTI und MALCHIODI [1] zurückgehen. <sup>6</sup>

#### 3.1 Subkritischer Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir das Randwertproblem (1.1) für Exponenten  $p$  mit  $1 < p < 2^* - 1$  und  $n \geq 3$ , wobei  $n$  wieder die Dimension des Gebietes  $\Omega$  und  $2^* = (n + 2)/(n - 2) + 1$  den kritischen Exponenten der stetigen Einbettung  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$  bezeichnet. Dazu werden wir zu Anfang nachweisen, dass das Energiefunktional für die oben genannten Exponenten der globalen (PS)-Bedingung genügt und anschließend die Eigenschaften (MP-1) und (MP-2) nachweisen, was uns die Existenz einer PALAIS-SMALE-Folge garantiert.

**Lemma 3.1.1** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $1 < p < 2^* - 1$  sowie  $\lambda \leq \lambda_1$ , wobei  $\lambda_1$  wieder den ersten Eigenwert des LAPLACE-Operators mit homogenen DIRICHLET-schen Randdaten bezeichnet. Dann genügt das Energiefunktional*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} u^+(x)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u^+(x)|^{p+1} dx$$

der (PS)-Bedingung.

*Beweis.* Sei  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$  eine PALAIS-SMALE-Folge für  $\Phi$ . Dann gilt nach Definition einer PALAIS-SMALE-Folge

i)  $\{\Phi(u_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt in  $H_0^1(\Omega)$  und

ii)  $\Phi'(u_m) \rightarrow 0$  in  $H^{-1}(\Omega)$  für  $m \rightarrow \infty$ .

Wir müssen nun zeigen, dass diese Folge der PALAIS-SMALE-Bedingung genügt, d.h. eine in  $H_0^1(\Omega)$  stark konvergente Teilfolge besitzt. Wir zeigen zunächst die Existenz einer in  $H_0^1(\Omega)$  schwach konvergenten Teilfolge. Nach dem Satz von EBERLEIN-ŠMULIAN reicht es, die Beschränktheit dieser Folge nachzuweisen (vgl. dazu Theorem 2.4.2 auf S. 56 in ATTOUCH, BUTTAZZO und MICHAÏLE [2]).

Wegen i) und ii) existiert eine reelle Konstante  $C > 0$ , sodass für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$|\Phi(u_m)| \leq C \text{ und } \|\Phi'(u_m)\|_* \leq (p+1)C.$$

Es gilt dann

$$\frac{1}{2} \|u_m\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|u_m^+\|_{0,2}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_m^+\|_{0,p+1}^{p+1} \leq C \quad (3.1)$$

und wir können die duale Paarung  $\langle \Phi'(u_m), u_m \rangle$  abschätzen mit

$$\| \|u_m\|^2 - \lambda \|u_m^+\|_{0,2}^2 - \|u_m^+\|_{0,p+1}^{p+1} \| = |\langle \Phi'(u_m), u_m \rangle| \leq \|\Phi'(u_m)\|_* \|u_m\| \leq (p+1)C \|u_m\|$$

oder anders ausgedrückt

$$-\frac{1}{p+1} \|u_m\|^2 + \frac{1}{p+1} \lambda \|u_m^+\|_{0,2}^2 + \frac{1}{p+1} \|u_m^+\|_{0,p+1}^{p+1} \leq C \|u_m\|. \quad (3.2)$$

---

<sup>6</sup>Die Arbeit von AMBROSETTI und MALCHIODI [1] basiert im Wesentlichen auf der Publikation von BRÉZIS und NIRENBERG [5] aus dem Jahr 1983.

Durch Addition der Ungleichungen (3.1) und (3.2) eliminieren wir den superlinearen Term<sup>7</sup> und erhalten zusätzlich mit der POINCARÉ-FRIEDRICHS-Ungleichung

$$\begin{aligned}
C + C\|u_m\| &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) (\|u_m\|^2 - \lambda\|u_m^+\|_{0,2}^2) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) (\|u_m\|^2 - \lambda\|u_m\|_{0,2}^2) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) (\|u_m\|^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u_m\|^2) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u_m\|^2.
\end{aligned}$$

Da  $\lambda < \lambda_1$  und  $p > 1$ , ist damit die Beschränktheit der Folge gezeigt. Also erhalten wir eine schwach konvergente Teilfolge  $\{u_{m'}\}_{m' \in \mathbb{N}}$  mit  $u_{m'} \rightharpoonup u$ , wobei  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Mit der schwachen Konvergenz gehen noch weitere wichtige Eigenschaften einher, die wir im Folgenden auflisten wollen, wobei wir Teilfolgen von Teilfolgen immer wieder denselben Laufindex geben:

- 1)  $\langle \Phi'(u_m), u_m \rangle \rightarrow 0$ ;
- 2)  $u_m \rightarrow u$  in  $L^q(\Omega)$  für alle  $q \in [1, 2^*)$ ;
- 3)  $u_m(x) \rightarrow u(x)$  fast überall in  $\Omega$  und es existiert für alle  $q \in [1, 2^*)$  ein  $v \in L^q(\Omega)$ , sodass  $|u_m(x)| \leq v(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

Die erste Eigenschaft folgt unmittelbar aus der schwachen Konvergenz von  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  in  $H_0^1(\Omega)$  und *ii*); die zweite Eigenschaft gilt nach dem Satz von RELICH-KONDRACHOW aufgrund der kompakten Einbettung von  $H_0^1(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$  für gerade diese  $q$ ; und die dritte Eigenschaft ist eine Folgerung aus der zweiten Eigenschaft mit der Umkehrung des Satzes von LEBESGUE (vgl. Theorem 4.9 auf S. 94 in BRÉZIS [4]). Es sei auch hier wieder vermerkt, dass die Eigenschaften 2) und 3) wegen  $u^+(x) = (|u(x)| + u(x))/2$  auch für die Folge  $\{u_m^+\}_{m \in \mathbb{N}}$  gelten.

Mit den vorstehenden Eigenschaften werden wir nun die starke Konvergenz von  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  nachweisen. Aus 1) und  $\Phi'(u_m) \rightarrow 0$  in  $H^{-1}(\Omega)$  folgt

$$\langle \Phi(u_m), u_m - u \rangle \rightarrow 0$$

und aus der schwachen Konvergenz  $u_m \rightharpoonup u$  folgt

$$\langle \Phi(u), u_m - u \rangle \rightarrow 0.$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
o(1) &= \langle \Phi(u_m) - \Phi(u), u_m - u \rangle \\
&= \|u_m - u\|^2 - \lambda\|u_m^+ - u^+\|_{0,2}^2 - \int_{\Omega} (|u_m^+(x)|^{p-1}u_m^+(x) - |u^+(x)|^{p-1}u^+(x))(u_m^+(x) - u^+(x))dx \\
&= \|u_m - u\|^2 + o(1),
\end{aligned}$$

wobei  $o(1) \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  gilt. Denn zum einen haben wir wegen 2) auch insbesondere Konvergenz der Folge in  $L^2(\Omega)$ , da  $2 < 2^* = 2n/(n-2)$  ist. Zum anderen erhalten wir die Nullkonvergenz des Integrals mit dem Satz von LEBESGUE; denn aus der Eigenschaft 3) mit  $q = p+1 < 2^*$  folgt

$$(|u_m^+(x)|^{p-1}u_m^+(x) - |u^+(x)|^{p-1}u^+(x))(u_m^+(x) - u^+(x)) \rightarrow 0 \text{ fast überall in } \Omega$$

und

$$\begin{aligned}
|(|u_m^+(x)|^{p-1}u_m^+(x) - |u^+(x)|^{p-1}u^+(x))(u_m^+(x) - u^+(x))| &\leq (|u_m^+(x)|^p + |u^+(x)|^p)(|u_m^+(x)| + |u^+(x)|) \\
&\leq (|v(x)|^p + |u(x)|^p)(|v(x)| + |u(x)|) \in L^1(\Omega),
\end{aligned}$$

wobei  $v \in L^{p+1}(\Omega)$ . Folglich besitzt die PALAIS-SMALE-Folge eine stark konvergente Teilfolge und genügt damit der (PS)-Bedingung.  $\square$

<sup>7</sup>Diese Methode wird oft angewendet, um die Beschränktheit einer PALAIS-SMALE-Folge zu zeigen.

Nun weisen wir die Existenz einer PALAIS-SMALE-Folge zu einem Minimax-Niveau  $c \in \mathbb{R}$  nach.

**Lemma 3.1.2** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet,  $1 < p \leq 2^* - 1$  und  $\lambda < \lambda_1$ . Dann existiert eine PALAIS-SMALE-Folge für das Energiefunktional  $\Phi$  zu einem Minimax-Niveau  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Nach Satz 2.1.10 gilt  $\Phi \in C^{1,1}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Weiter ist  $\Phi(0) = 0$  und  $\Phi$  besitzt, wie in (2.12) und (2.13) bereits nachgewiesen, die Mountain-Pass-Geometrie, d.h. auch **(MP-1)** und **(MP-2)** sind erfüllt. Somit folgt nach dem Mountain-Pass-Lemma die Existenz einer PALAIS-SMALE-Folge zu einem Minimax-Niveau  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Fassen wir alle vorstehenden Resultate zusammen, so erhalten wir

**Satz 3.1.3** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand  $\partial\Omega$  und  $1 < p \leq 2^* - 1$ . Dann besitzt das Randwertproblem (1.1) für alle  $\lambda \in [0, \lambda_1)$  mindestens eine klassische Lösung.*

*Beweis.* Die Existenz einer Palais-Smale-Folge zu einem Niveau  $c \in \mathbb{R}$  folgt mit dem Lemma 3.1.2. Mit Lemma 3.1.1 haben wir gezeigt, dass das Funktional  $\Phi$  der  $(PS)$ -Bedingung genügt, also insbesondere auch der  $(PS)_c$ -Bedingung. Somit folgt nach dem Mountain-Pass-Lemma die Existenz eines nicht-trivialen kritischen Punktes  $u \in H_0^1(\Omega)$  zum Niveau  $c$ , welche dann auch eine schwache Lösung des Randwertproblems (2.2) ist. Schließlich folgt mit Lemma 2.2.3, dass  $u$  eine klassische Lösung von (1.1) ist.  $\square$

## 3.2 Kritischer Fall

Ebenfalls wie im subkritischen Fall werden wir für einen Existenzbeweis von Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

das Mountain-Pass-Lemma anwenden, obwohl das Funktional  $\Phi$  für  $p = 2^* - 1$  nicht mehr der globalen  $(PS)$ -PALAIS-SMALE-Bedingung genügt. Dies beruht darauf, dass der Raum  $H_0^1(\Omega)$  nicht kompakt in  $L^{2^*}(\Omega)$  eingebettet ist. Folglich wird durch die schwache Konvergenz  $u_m \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$  keine starke Konvergenz  $u_m \rightarrow u$  in  $L^{2^*}(\Omega)$  impliziert. Dies war in Lemma 3.1.1 jedoch wesentlich, um aus einer PALAIS-SMALE-Folge eine in  $H_0^1(\Omega)$  stark konvergente Teilfolge zu extrahieren. Wir werden aber zeigen, dass es Minimax-Niveaus  $c \in \mathbb{R}$  gibt, sodass das Funktional  $\Phi$  der  $(PS)_c$ -Bedingung genügt.

Wegen Lemma 3.1.2 wissen wir bereits, dass  $\Phi$  auch im kritischen Fall für  $\lambda \leq \lambda_1$  die Mountain-Pass-Geometrie besitzt. Wir werden aber zeigen, dass das Randwertproblem (3.3) für nicht-positive  $\lambda$  und auf beschränkten Sterngebieten  $\Omega$  keine Lösungen besitzt. Diesen Beweis der Nicht-Existenz führen wir im folgenden Abschnitt mit Hilfe der POHOŽAEV-Identität durch.

### 3.2.1 POHOŽAEV-Identität

Die Identität von POHOŽAEV ist in der Theorie der Differentialgleichungen ein geeignetes Hilfsmittel, um die Nicht-Existenz von sowohl klassischen als auch schwachen Lösungen folgender allgemeineren Klasse von semilinearen elliptischen Randwertproblemen

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{auf } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

zu zeigen.

**Satz 3.2.1 (POHOŽAEV-Identität)** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Ist  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  eine klassische Lösung von (3.4), so gilt die Identität*

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - n \int_{\Omega} F(u(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right)^2 x \cdot \nu(x) d\sigma = 0, \quad (3.5)$$

wobei  $F(u) = \int_0^u f(t)dt$  und  $\nu$  die äußere Normale auf  $\partial\Omega$  bezeichnet.

*Beweis.* Man findet einen Beweis in BADIÀLE und SERRA [3; Theorem 3.4.26, S. 137].  $\square$

**Bemerkung 3.2.2** Die POHOŽAEV-Identität ist auch auf Lösungen von (3.4) aus der Klasse  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  anwendbar (vgl. hierzu AMBROSETTI und MALCHIODI [1; Theorem 8.30, S. 136]).

Nun stellen wir einen Beweis der Nicht-Existenz von Lösungen vor.

**Satz 3.2.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Sterngebiet der Dimension  $n \geq 3$  mit einem hinreichend glatten Rand  $\partial\Omega$ , dessen Sternmittelpunkt im Ursprung von  $\mathbb{R}^n$  liegt. Dann besitzt das Randwertproblem (3.3) für  $\lambda \leq 0$  keine Lösungen.

*Beweis.* Nach Bemerkung 2.2.2 gehört jede Lösung  $u$  von (3.3) auf glatten Gebieten der Klasse  $C^2(\bar{\Omega})$  an. Wir nehmen im folgenden an, dass  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (3.1) ist und führen dies zu einem Widerspruch. Es folgt nach Anwendung der POHOŽAEV-Identität mit  $f(u) = \lambda u + |u|^{2^*-2}u$  und  $F(u) = \frac{1}{2}\lambda u^2 + \frac{1}{2^*}|u|^{2^*}$ , dass

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - n \int_{\Omega} F(u(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right)^2 x \cdot \nu(x) d\sigma \\ &= \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} f(u(x))u(x) dx - n \int_{\Omega} F(u(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right)^2 x \cdot \nu(x) d\sigma \\ &= \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} (\lambda u(x) + |u(x)|^{2^*-2}u(x)) u(x) dx - n \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}\lambda u(x)^2 + \frac{1}{2^*}|u(x)|^{2^*} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right)^2 x \cdot \nu(x) d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} \lambda u(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right)^2 x \cdot \nu(x) d\sigma \end{aligned}$$

ist und nach Umstellung

$$\lambda \int_{\Omega} u(x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right)^2 x \cdot \nu(x) d\sigma. \quad (3.6)$$

Da  $\Omega$  nach Voraussetzung ein Sterngebiet bezüglich des Ursprunges ist, gilt  $x \cdot \nu(x) > 0$  für alle  $x \in \partial\Omega$ . Demnach folgt unmittelbar aus (3.6), dass  $u$  für negative  $\lambda$  auf  $\Omega$  verschwindet, was der Annahme  $u > 0$  in  $\Omega$  widerspricht. Ist  $\lambda = 0$ , so ist notwendigerweise  $\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \equiv 0$  auf  $\partial\Omega$ . Folglich gilt nach Anwendung der GREENSchen Formel (vgl. BADIÀLE und SERRA [3; Theorem 1.2.5, S. 9])

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{2^*-2}u(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma = 0,$$

was ebenfalls wegen  $u > 0$  in  $\Omega$  zu einem Widerspruch führt.  $\square$

**Bemerkung 3.2.4** Wie sehr die Existenz einer Lösung vom betrachteten Gebiet  $\Omega$  abhängt, zeigen KAZDAN und WARNER [9]. Darin wird bewiesen, dass das Problem (3.3), unter der Voraussetzung, dass  $\Omega$  eine Hohlkugel ist, d.h.  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$  für positive reelle Zahlen  $r, R$  mit  $r < R$ , für alle  $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$  eine Lösung besitzt.

Die Existenz von PALAIS-SMALE-Folgen zu einem Minimax-Niveau folgt ebenfalls wie im subkritischen Fall mit Lemma 3.1.2, da in diesem Lemma der Fall  $p = 2^* - 1$  zugelassen ist. Das weitere Vorgehen besteht nun darin, zuerst zu zeigen, dass es Minimax-Niveaus  $c \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $c < \frac{1}{n}S^{n/2}$  gilt und  $\Phi$  für diese  $c$  der  $(PS)_c$ -Bedingung genügt, wobei  $S$  im Zusammenhang zur besten SOBOLEW-Konstante der stetigen Einbettung  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$  steht. Genauer ist

$$S := \inf\{\|u\|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{0,2^*} = 1\}. \quad (3.7)$$



Wichtig ist dabei, dass  $S$  nicht vom betrachteten Gebiet abhängt und nur dann von Funktionen aus  $H_0^1(\Omega)$  angenommen wird, wenn  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ist (vgl. hierzu BRÉZIS und NIRENBERG [5; Abschnitt 1.1, S. 442 ff.]). Das Mountain-Pass-Lemma sichert uns dann die Existenz eines nicht-trivialen kritischen Punktes, welches mit einer Lösung des Randwertproblems (3.3) einhergeht.

Die Funktionen, für die  $S$  im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^n$  angenommen wird, spielen im Folgenden eine entscheidende Rolle; denn mit Hilfe dieser Funktionen zeigen wir, dass es Minimax-Niveaus gibt, welche echt kleiner als  $\frac{1}{n}S^{n/2}$  sind. Wir werden also zeigen, dass

$$c = c(e, \lambda) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) < \frac{1}{n}S^{n/2} \quad (3.8)$$

gilt, wobei

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

für bestimmte  $\lambda \in \mathbb{R}$  und gewisse  $e \in H_0^1(\Omega)$  ist, die in Korrelation zu den oben erwähnten Funktionen stehen. Darüber hinaus müssen weiterhin die Eigenschaften

**(MP-1)**  $J(0) = 0$  und  $J(u) \geq \varrho$  für alle  $u \in S_r := \{u \in H : \|u\| = r\}$  und

**(MP-2)** Es existiert ein  $e \in H_0^1(\Omega)$ , sodass  $\|e\| > r$  und  $J(e) \leq 0$

durch diese Funktionen erfüllt sein, sodass wir nach dem Mountain-Pass-Lemma die Existenz einer PALAIS-SMALE-Folge zu einem Niveau erhalten, welche die Eigenschaft (3.8) erfüllt. Die Funktion

$$\bar{u}(x) = \frac{(n(n-2))^{(n-2)/4}}{(1+|x|^2)^{(n-2)/2}},$$

genauso wie

$$\bar{u}_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-(n-2)/2} \bar{u}(x/\varepsilon) \text{ und } \bar{u}_\varepsilon(x - \xi), \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

besitzen diese gewünschte Eigenschaft, d.h  $S$  wird durch diese Funktionen angenommen (vgl. etwa AMBROSETTI und MALCHIODI [1; Abschnitt 11.2, S 180 ff.]). Zunächst stellen wir noch ein für das nächste Vorhaben essentielles Resultat vor.

**Lemma 3.2.5** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und o.B.d.A  $0 \in \Omega$ . Ferner sei  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \equiv 1$  auf der offenen Kugel  $B(0, \varrho)$ , wobei  $\varrho$  so gewählt ist, dass **(MP-1)** erfüllt ist. Falls*

i)  $\lambda > \lambda_1$  im Fall  $n \geq 4$  oder

ii)  $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$  und  $\Omega$  eine Kugel im Fall  $n = 3$

ist, dann gilt für

$$u_\varepsilon(x) := \varphi(x)\bar{u}_\varepsilon(x), \quad (3.9)$$

dass

$$\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_{0,2}^2 < S \|u_\varepsilon\|_{0,2^*}^2,$$

für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ .

*Beweis.* Findet man in BRÉZIS und NIRENBERG [5; Lemma 1.1, S. 443] für den Fall  $n \geq 4$  bzw. [5; Lemma 1.3, S. 448] für den Fall  $n = 3$ .  $\square$

Mit Hilfe der in (3.9) definierten Funktion und des vorstehenden Lemmas, können wir nun die Existenz einer PALAIS-SMALE-Folge zu einem Niveau, welches (3.8) erfüllt, zeigen.

**Lemma 3.2.6** *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.2.5 existieren Minimax-Niveaus  $c \in \mathbb{R}$  mit  $c < \frac{1}{n}S^{n/2}$ , falls*

i)  $\lambda \in (0, \lambda_1)$  im Fall  $n \geq 4$  und

ii)  $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$  und  $\Omega$  eine Kugel im Fall  $n = 3$

ist.

*Beweis.* Da das Energiefunktional in radialer Richtung unbeschränkt ist, wie wir in (2.12) im Abschnitt 2.4 Minimax-Methoden nachgewiesen haben, existiert für jedes feste  $v \in H_0^1(\Omega)$  ein hinreichend großes  $t > 0$ , sodass  $\Phi(tu) \leq 0$  gilt. Somit existiert auch für die in (3.12) definierte Funktion  $u_\varepsilon$  ein  $t^* > 0$ , sodass für  $\Phi(e) \leq 0$  gilt, wobei  $e := t^*u_\varepsilon$  ist. Wir definieren

$$\tilde{\gamma}(t) := te \quad \text{und} \quad \Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Dann ist  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  und es folgt für das Minimax-Niveau

$$\begin{aligned} c = c(e, \lambda) &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \Phi(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0, 1]} \Phi(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \max_{t \in [0, 1]} \Phi(te) \\ &= \max_{t \in [0, t^*]} \Phi(tu_\varepsilon) \\ &= \max_{t \geq 0} \Phi(tu_\varepsilon) < \infty, \end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei in (3.10) ausgenutzt wurde, dass  $\Phi(tu_\varepsilon) \leq 0$  für alle  $t \geq t^*$  und demnach die Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(t) := \Phi(tu_\varepsilon)$  ein endliches Maximum besitzt. Wir berechnen nun das Maximum der Funktion

$$f(t) = \Phi(tu_\varepsilon) = \frac{1}{2}t^2 (\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda\|u_\varepsilon\|_{0,2}^2) - \frac{1}{2^*}t^{2^*}\|u_\varepsilon\|_{0,2^*}^{2^*}.$$

Mit dem Satz von FERMAT, wonach die Ableitung einer differenzierbaren Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $\tau \in (a, b)$  eines lokalen Maximums oder Minimums verschwindet, d.h.  $f'(\tau) = 0$  gilt, erhalten wir die Stelle

$$\tau = \left( \frac{\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda\|u_\varepsilon\|_{0,2}^2}{\|u_\varepsilon\|_{0,2^*}^{2^*}} \right)^{(n-2)/4}$$

eines lokalen Maximums mit

$$\Phi(\tau u_\varepsilon) = \frac{1}{n} \left( \frac{\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda\|u_\varepsilon\|_{0,2}^2}{\|u_\varepsilon\|_{0,2^*}^{2^*}} \right)^{n/2},$$

da die Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $\tau$  strikt konkav ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} f''(\tau) &= -(2^* - 2)(\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda\|u_\varepsilon\|_{0,2}^2) \\ &\leq -(2^* - 2)\left(\|u_\varepsilon\|^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u_\varepsilon\|^2\right) \\ &= -(2^* - 2) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u_\varepsilon\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Dass es sich dabei auch um ein globales Maximum handelt, geht unmittelbar aus (3.10) hervor. Und schließlich folgt für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  mit Lemma 3.2.5, dass

$$c \leq \max_{t \geq 0} \Phi(tu_\varepsilon) = \Phi(\tau u_\varepsilon) = \frac{1}{n} \left( \frac{\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda\|u_\varepsilon\|_{0,2}^2}{\|u_\varepsilon\|_{0,2^*}^{2^*}} \right)^{n/2} < \frac{1}{n} S^{n/2}$$

ist. □

Als nächstes werden wir zeigen, dass das Funktional  $\Phi$  für alle  $c < \frac{1}{n} S^{n/2}$  einer  $(PS)_c$ -Bedingung genügt. Zuvor beweisen wir noch ein hilfreiches Lemma.

**Lemma 3.2.7** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , eine Folge in  $L^p(\Omega)$ , die folgende zwei Eigenschaften erfüllt:*

i)  $\|u_m\|_{0,p} \leq C$ , wobei  $C$  eine von  $m$  unabhängige positive reelle Konstante ist und

ii)  $u_m \rightarrow u$  fast überall in  $\Omega$ .

Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{0,p}^p = \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{0,p}^p - \|u\|_{0,p}^p. \quad (3.11)$$

*Beweis.* Zunächst bemerken wir, dass  $u \in L^p(\Omega)$ , denn nach dem Lemma von FATOU gilt

$$\|u\|_{0,p}^p \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{0,p}^p \leq C.$$

Des Weiteren verwenden wir folgende Ungleichung: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $c = c(\varepsilon) > 0$ , sodass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\left| |a + b|^p - |a|^p - |b|^p \right| \leq \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon) |b|^p. \quad (3.12)$$

Die Ungleichung (3.12) folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{|s + t|^p - |s|^p - |t|^p}{|s|^p} = 0.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, aber fest gewählt. Mit (3.12) erhält man dann für  $a = u_m - u$  und  $b = u$

$$\left| |u_m|^p - |u_m - u|^p - |u|^p \right| \leq \varepsilon |u_m - u|^p + c(\varepsilon) |u|^p.$$

Somit ist

$$\nu_m := \left| |u_m|^p - |u_m - u|^p - |u|^p \right| - \varepsilon |u_m - u|^p \leq c(\varepsilon) |u|^p$$

fast überall durch eine integrierbare Majorante beschränkt und konvergiert fast überall gegen 0, da nach Voraussetzung  $u_m$  fast überall gegen  $u$  konvergiert und die Betragsfunktion stetig ist. Mit dem Satz von LEBESGUE folgt dann

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nu_m dx = 0. \quad (3.13)$$

Weiterhin folgt mit Hilfe von (3.12)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| |u_m|^p - |u_m - u|^p - |u|^p \right| dx &= \int_{\Omega} \nu_m dx + \varepsilon \int_{\Omega} |u_m - u|^p dx \\ &\leq o(1) + \varepsilon \int_{\Omega} (|u_m|^p + |u|^p) dx \\ &\leq o(1) + \varepsilon (C^p + \|u\|_{0,p}^p). \end{aligned}$$

Da  $u \in L^p(\Omega)$  und  $\varepsilon$  beliebig gewählt worden war, erhält man letztlich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| |u_m|^p - |u_m - u|^p - |u|^p \right| dx = \lim_{m \rightarrow \infty} (\|u_m - u\|_{0,p}^p - \|u_m\|_{0,p}^p + \|u\|_{0,p}^p) = 0,$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Die Existenz einer konvergenten Teilfolge einer PALAIS-SMALE-Folge zu einem Niveau  $c < \frac{1}{n} S^{n/2}$  folgt nun aus

**Lemma 3.2.8** *Unter den Voraussetzungen von Lemmas 3.2.5 genügt das Energiefunktional  $\Phi$  für alle  $c < \frac{1}{n} S^{n/2}$  einer  $(PS)_c$  Bedingung, falls*

- i)  $\lambda \in (0, \lambda_1)$  im Fall  $n \geq 4$  und
- ii)  $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$  und  $\Omega$  eine Kugel im Fall  $n = 3$

ist.

*Beweis.* Sei  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$  eine PALAIS-SMALE-Folge für  $\Phi$  zu einem Niveau  $c < \frac{1}{n} S^{n/2}$ . Nach Definition gilt

- i)  $\Phi(u_m) \rightarrow c$  in  $H_0^1(\Omega)$  und

ii)  $\Phi'(u_m) \rightarrow 0$  in  $H^{-1}(\Omega)$  für  $m \rightarrow \infty$ .

Analog zum subkritischen Fall, zeigt man dann die Beschränktheit der PALAIS-SMALE-Folge in  $H_0^1(\Omega)$  und erhält dadurch die schwache Konvergenz der Folge gegen ein  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Auch hier folgen (bis auf Teilfolgen) die Eigenschaften

- 1)  $\langle \Phi'(u_m), u_m \rangle \rightarrow 0$ ;
- 2)  $u_m \rightarrow u$  in  $L^q(\Omega)$  für alle  $q \in [1, 2^*)$ ;
- 3)  $u_m(x) \rightarrow u(x)$  fast überall in  $\Omega$  und es existiert für alle  $q \in [1, 2^*)$  ein  $v \in L^q(\Omega)$ , sodass  $|u_m(x)| \leq v(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

Es sei wieder angemerkt, dass die vorstehenden Eigenschaften sowohl für die Folge  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  als auch für  $\{u_m^+\}_{m \in \mathbb{N}}$  gelten. Mit Lemma 3.2.7 und den Eigenschaften 1) - 3) können wir nun die Konvergenz  $u_m \rightarrow u$  in  $H_0^1(\Omega)$  zeigen. Infolge von Eigenschaft ii) gilt für alle  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle \Phi'(u_m), \varphi \rangle = (u_m, \varphi) - \lambda \int_{\Omega} u_m^+(x) \varphi(x) dx - \int_{\Omega} |u_m^+(x)|^{2^*-2} u_m^+(x) \varphi(x) dx = o(1).$$

Da  $|u_m^+|^{2^*-2} u_m^+ \varphi$  wegen Eigenschaft 3) fast überall durch eine integrierbare Majorante  $|v|^{2^*-2} v \varphi \in L^1(\Omega)$  beschränkt ist und fast überall in  $\Omega$  gegen  $|u^+|^{2^*-2} u^+ \varphi$  konvergiert, folgt mit dem Satz von LEBESGUE

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_m^+(x)|^{2^*-2} u_m^+(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} |u^+(x)|^{2^*-2} u^+(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Zusammen mit der schwachen Konvergenz in  $H_0^1(\Omega)$  und in  $L^2(\Omega)$  folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \Phi'(u_m), \varphi \rangle = \langle \Phi'(u), \varphi \rangle = (u, \varphi) - \lambda \int_{\Omega} u^+(x) \varphi(x) dx - \int_{\Omega} |u^+(x)|^{2^*-2} u^+(x) \varphi(x) dx = 0$$

für alle  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Testet man darüber hinaus mit  $\varphi = u$  so gelangt man zur Gleichung

$$\langle \Phi'(u), u \rangle = \|u\|^2 - \lambda \|u^+\|_{0,2}^2 - \|u^+\|_{0,2^*}^{2^*} = 0. \quad (3.14)$$

Des Weiteren erhalten wir wegen  $u_m \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$  und  $u_m^+ \rightarrow u^+$  in  $L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u_m\|^2 &= \|u_m - u\|^2 - \|u\|^2 + 2(u_m, u) \\ &= \|u_m - u\|^2 + \|u\|^2 + o(1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

und

$$\begin{aligned} \|u_m^+\|_{0,2}^2 &= \|u_m^+ - u^+\|_{0,2}^2 - \|u^+\|_{0,2}^2 + 2(u_m^+, u^+)_{L^2} \\ &= \|u^+\|_{0,2}^2 + o(1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Wegen der Beschränktheit der Folge  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  in  $H_0^1(\Omega)$  folgt mit dem SOBOLEWSchen Einbettungssatz

$$\|u_m^+\|_{0,2^*}^2 \leq \frac{1}{S} \|u_m^+\|^2 \leq \frac{1}{S} \|u_m\|^2 \leq C,$$

was die Beschränktheit der Folge  $\{u_m^+\}_{m \in \mathbb{N}}$  in  $L^{2^*}(\Omega)$  zeigt. Aus der Eigenschaft 3) erhalten wir auch  $u_m^+(x) \rightarrow u^+(x)$  fast überall in  $\Omega$  und folglich mit Lemma 3.2.7

$$\|u_m^+\|_{0,2^*}^{2^*} = \|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + \|u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + o(1). \quad (3.17)$$

Ferner gilt wegen 1) und unter Ausnutzung von (3.14) - (3.17)

$$\begin{aligned} o(1) &= \|u_m\|^2 - \lambda \|u_m^+\|_{0,2}^2 - \|u_m^+\|_{0,2^*}^{2^*} \\ &= \|u_m - u\|^2 - \|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + \left( \|u\|^2 - \lambda \|u^+\|_{0,2}^2 - \|u^+\|_{0,2^*}^{2^*} \right) + o(1) \\ &= \|u_m - u\|^2 - \|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + o(1) \end{aligned}$$

und im Grenzübergang

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^{2^*} =: \alpha. \quad (3.18)$$

Wir wollen zeigen, dass auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m^+ - u^+\|^2 = \alpha$  gilt. Dies erhalten wir jedoch aus

- 4)  $\langle \Phi'(u_m), u_m^+ \rangle \rightarrow 0$  und  
 5)  $\|u_m^+\|^2 = \|u_m^+ - u^+\|^2 + \|u^+\|^2 + o(1)$ ,

wobei die Eigenschaft 4) aus ii) und der Beschränktheit der Folge  $\{u_m^+\}_{m \in \mathbb{N}}$  in  $H_0^1(\Omega)$  folgt und die Eigenschaft 5) wie (3.15) gezeigt wird. Beim Restlichen verfährt man genauso wie für (3.18).

Wir zeigen nun durch Widerspruch, dass  $\alpha = 0$  ist. Nehmen wir also an, dieses würde nicht so sein. Nach dem Einbettungssatz von SOBOLEW gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$

$$\|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^2 \leq \frac{1}{S} \|u_m^+ - u^+\|^2$$

und folglich auch

$$\alpha^{2/2^*} \leq \frac{1}{S} \alpha, \text{ d.h. } S^{n/2} \leq \alpha.$$

Wir nutzen ein weiteres Mal die Konvergenz  $\Phi(u_m) \rightarrow c$  aus und machen zugleich wieder Gebrauch von (3.14) – (3.17). Dann folgt

$$\begin{aligned} c &= \Phi(u_m) + o(1) \\ &= \frac{1}{2} \|u_m\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|u_m^+\|_{0,2}^2 - \frac{1}{2^*} \|u_m^+\|_{0,2^*}^{2^*} + o(1) \\ &= \left( \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|u^+\|_{0,2}^2 - \frac{1}{2^*} \|u^+\|_{0,2^*}^{2^*} \right) + \frac{1}{2} \|u_m - u\|^2 - \frac{1}{2^*} \|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + o(1) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \|u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + \frac{1}{2} \|u_m - u\|^2 - \frac{1}{2^*} \|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + o(1) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_m - u\|^2 - \frac{1}{2^*} \|u_m^+ - u^+\|_{0,2^*}^{2^*} + o(1) \end{aligned}$$

und nach Grenzwertbildung folgt schließlich

$$c \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \alpha = \frac{1}{n} \alpha \geq \frac{1}{n} S^{n/2},$$

was einen Widerspruch zu der Annahme  $c < \frac{1}{n} S^{n/2}$  darstellt.  $\square$

Fassen wir alle vorausgegangenen Resultate zusammen, so erhalten wir

**Satz 3.2.9** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand  $\partial\Omega$ . Dann besitzt das Randwertproblem (3.1) mindestens eine klassische Lösung, falls*

- i)  $\lambda \in (0, \lambda_1)$  im Fall  $n \geq 4$  und  
 ii)  $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$  und  $\Omega$  eine Kugel im Fall  $n = 3$

ist.

*Beweis.* Zunächst folgt mit Lemma 3.1.2 und Lemma 3.2.6 die Existenz einer PALAIS-SMALE-Folge zu einem Niveau  $c < \frac{1}{n} S^{n/2}$ . Für dieses  $c$  genügt das Funktional  $\Phi$  nach Lemma 3.2.8 der  $(PS)_c$ -Bedingung, sodass  $\Phi$  nach dem Mountain-Pass-Lemma einen nicht-trivialen kritischen Punkt  $u \in H_0^1(\Omega)$  besitzt. Da  $u$  damit eine schwache Lösung von (2.2) ist folgt mit Lemma 2.2.3, dass  $u$  eine klassische Lösung von (3.3) ist.  $\square$

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem Mountain-Pass-Lemma war es uns möglich, die Existenz von Lösungen einer ganz speziellen Klasse von semilinearen elliptischen Randwertproblemen nachzuweisen. Es ist leicht einzusehen, dass man diese Klasse von Randwertproblemen ohne viel Aufwand auf eine größere Klasse derselben verallgemeinern kann. Dabei muss lediglich sichergestellt werden, dass das zu der Differentialgleichung gehörende Energiefunktional die Mountain-Pass-Geometrie besitzt. Etwa kann das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

betrachtet werden, wobei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  wieder ein beschränktes Gebiet der Dimension  $n \geq 3$  sei und  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die folgenden Bedingungen erfüllen muss:

- i)*  $f$  genügt der CARATHÉODORY-Bedingung und es existiert ein  $a_1 \in L^{2n/(n+2)}(\Omega)$  und  $a_2 > 0$ , sodass

$$|f(x, u)| \leq a_1(x) + a_2|u|^p \quad \text{für alle } (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

wobei  $1 < p < (n+2)/(n-2)$  ist;

- ii)* Es gilt

$$\lim_{u^+ \rightarrow 0} f(x, u)/u =: \lambda > 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega;$$

- iii)* Es existiert ein  $r > 0$  und  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ , sodass

$$0 < F(x, u) \leq \theta u f(x, u) \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } u \geq r,$$

wobei  $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$  ist.

Genügt nun  $f$  den Bedingungen *i) – iii)* und gilt zusätzlich  $\lambda < \lambda_1$ ,<sup>8</sup> so existiert nach dem Mountain-Pass-Lemma mindestens eine Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  des Randwertproblems (4.1) (vgl. etwa AMBROSETTI und MALCHIODI [1; Abschnitt 8.2, S. 123 ff.]). Ist man ferner an positiven Lösungen interessiert, so ist die rechte Seite  $f(x, u)$  durch

$$\tilde{f}(x, u) := \begin{cases} f(x, u), & \text{falls } u \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.2)$$

zu ersetzen und man erhält bei hinreichender Glätte des Gebietes, mit dem starken Maximumprinzip, positive Lösungen. Es ist bemerkenswert, dass man mit einer analogen Vorgehensweise, auch die Existenz von negativen Lösungen nachweisen kann. Auch in diesem Fall ist die rechte Seite entsprechend zu ersetzen (vgl. etwa STRUWE [10; Theorem 6.2, S. 110 ff.]).

Für eine Verallgemeinerung im kritischen Fall verweisen wir auf BRÉZIS und NIRENBERG [5], in der einige weitere Existenzresultate für spezielle Klassen von semilinearen elliptischen Randwertproblemen im kritischen Fall vorgestellt werden.

---

<sup>8</sup>Dabei bezeichnet  $\lambda_1$  wieder den ersten Eigenwert des LAPLACE-Operators mit homogenen DIRICHLETSchen Randbedingungen, vgl. auch Abschnitt 2.2.

## 5 Literaturverzeichnis

- [1] A. AMBROSETTI und A. MALCHIODI: *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [2] H. ATTOUCH, G. BUTTAZZO und G. MICHAÏLLE: *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces*. SIAM, Philadelphia, 2006.
- [3] M. BADIALE und E. SERRA: *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Springer-Verlag, London, 2011.
- [4] H. BRÉZIS: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York–Dordrecht–Heidelberg–London, 2010.
- [5] H. BRÉZIS und L. NIRENBERG: *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*. Commun. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.
- [6] H. BRÉZIS und L. NIRENBERG: *Remarks on Finding Critical Points*. Commun. Pure Appl. Math. **44** (1991), 939-963.
- [7] M. DOBROWOLSKI: *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2010.
- [8] E. EMMRICH: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 2004.
- [9] J. KAZDAN und F. WARNER: *Remarks on Some Quasilinear Elliptic Equations*. Commun. Pure Appl. Math. **28** (1975), 567-597.
- [10] M. STRUWE: *Variational Methods*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2008.
- [11] E. ZEIDLER: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo, 1986.