TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

BACHELORARBEIT

IM STUDIENGANG TECHNOMATHEMATIK

Zur Analysis viskoelastischer Fluide vom Oldroyd-Typ

André Eikmeier

betreut von Prof. Dr. Etienne Emmrich

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung versichert an Eides statt:

Berlin, den

(André Eikmeier)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir die eindeutige Lösbarkeit eines Differentialgleichungssystems, das die Bewegung viskoelastischer Fluide vom Oldroyd-Typ beschreibt. Doch was sind eigentlich viskoelastische Fluide? Grob gesagt sind es Stoffe, die sowohl die viskosen[1] Eigenschaften einer Flüssigkeit oder eines Gases als auch die elastischen Eigenschaften eines Festkörpers aufweisen. Beispiele für solche Stoffe sind Teige oder Kunststoffschmelzen. An dem Beispiel des Teigs wollen wir die obige Beschreibung eines viskoelastischen Fluids nochmal verdeutlichen. Einerseits lässt sich Teig irreversibel verformen, das heißt, der Teig kehrt nicht ohne äußere Einwirkungen in seinen Ausgangszustand zurück, nachdem wir ihn verformt haben. Das ist beispielsweise der Fall, wenn wir den Teig kneten. Diese irreversible Verformung kennzeichnet den viskosen Anteil. Andererseits können auch reversible Verformungen beim Teig beobachtet werden, das sind Verformungen, die ohne äußere Einwirkungen wieder in den Ausgangszustand zurückkehren. Sie treten auf, wenn wir für kurze Zeit eine sehr starke Kraft auf den Teig ausüben, also beispielsweise den Teig mit einem Stampfer bearbeiten.

Viskoelastische Fluide finden unter anderem Anwendung in Salben oder Cremes als Trägerstoffe, damit die Salben auch bei geöffneter Tube nicht herausfließen, sich aber dennoch leicht auftragen lassen. Außerdem werden viskoelastische Fluide heutzutage häufig zur Herstellung von Matratzen oder Kissen verwendet. Eine weitere Anwendung sind sogenannte „Compliant Walls“. Diese werden genutzt, um Instabilitäten in Strömungen zu dämpfen, da sie sich an die Strömung anpassen können, aber trotzdem eine feste Wand bilden. Sie werden unter anderem in der Schifffahrt eingesetzt, um den Treibstoffverbrauch zu verringern [DLC94].

Es gibt nicht nur eine Art von viskoelastischen Fluiden, sondern viele verschiedene Modelle, bei denen sich das Verhältnis zwischen dem viskosen Anteil und dem elastischen Anteil unterscheidet. Wir werden in dieser Arbeit hauptsächlich das sogenannte Oldroyd-Modell untersuchen, das wir allerdings erst später einführen wollen.

Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in die Mathematik, die benötigt wird, um das auftretende Differentialgleichungssystem zu untersuchen. Dabei werden wir vor allem einige Ergebnisse zum Bochner-Integral vorstellen. Danach folgt eine Einführung in die Strömungsmechanik und eine formale Herleitung einiger physikalischer Gleichungen, die wir betrachten werden. Bevor wir dann zu den Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen kommen, die den Hauptteil der Arbeit bilden, veranschaulichen wir kurz eine wichtige Eigenschaft von viskoelastischen Fluiden.

Im Hauptteil werden wir zunächst einige Eigenschaften der auftretenden Operatoren untersuchen. Anschließend wenden wir uns kurz dem Jeffreys-Modell zu, einer Vereinfachung des Oldroyd-Modells, für das wir die globale Existenz einfacher als für das Oldroyd-Modell erhalten. In der Anwendung ist das allgemeinere Oldroyd-Modell aber deutlich relevanter, daher werden wir uns auf dieses Modell

[1]Die Viskosität beschreibt die Zähflüssigkeit eines Materials. Öl ist beispielsweise viskoser als Wasser und Wasser wiederum viskoser als Luft.

konzentrieren, obwohl es mathematisch schwieriger zu behandeln ist. Wir untersuchen die lokale und globale Existenz regulärer Lösungen des Oldroyd-Modells und stellen einige weitere Ergebnisse kurz vor. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Übersicht über die bisherigen Ergebnisse für das Oldroyd-Modell darzustellen, daher werden wir häufig nicht den vollständigen Beweis, sondern nur die Beweisskizze angeben.

2 Mathematische Grundlagen

Es sei $T > 0$, $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banachraum mit dem Dualraum X^* und Ω eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Sofern nicht anders behauptet, ist Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, also insbesondere offen. Mit $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, bezeichnen wir die üblichen Lebesgue-Räume mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p}$, mit $W^{k,p}(\Omega)$, $k = -1, 0, 1, \dots$, die üblichen Sobolew-Räume mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ und mit $H^k(\Omega)$ die Räume $W^{k,2}(\Omega)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{H^k}$. Mit $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen, deren p-te Potenz auf jeder kompakten Teilmenge von Ω integrierbar ist. Außerdem bezeichne $H^1_0(\Omega)$ den Raum der Funktionen $u \in H^1(\Omega)$, für die $\gamma_n u = 0$ gilt. Dabei ist γ_n der Spuroperator in Normalenrichtung. Für glatte u gilt $\gamma_n u = (u \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega}$ mit dem äußeren Normalenvektor $\vec{n}$ an $\partial\Omega$. Den Dualraum von $H^1_0(\Omega)$ bezeichnen wir wie üblich mit $H^{-1}(\Omega)$. Die ausführlichen Definitionen der oben genannten Räume können in [Bre11, Kapitel 4, 9] nachgelesen werden.

Weiterhin bezeichnen wir mit $C([0,T];X)$ bzw. $C^n([0,T];X)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, den üblichen Raum der auf $(0,T)$ stetigen bzw. n-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X, wobei in 0 jeweils der rechtsseitige und in T der linksseitige Grenzwert der Funktion sowie ihrer Ableitungen existieren. Mit $C_c(0,T;X)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in $(0,T)$, mit $C_b(\mathbb{R}^+_0;X)$ den Raum der auf $\mathbb{R}^+_0 := [0,\infty)$ stetigen und beschränkten Funktionen und mit $C_w([0,T];X)$ den Raum aller demistetigen Funktionen, das heißt, $(u(t_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert schwach in X gegen $u(t) \in X$, falls $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$ gegen $t \in [0,T]$ konvergiert. Weiterhin benötigen wir die Räume $L^p(0,T;X)$ bzw. $W^{k,p}(0,T;X)$ von Bochner-integrierbaren Funktionen. Eine Einführung in das Bochner-Integral ist in [Emm04, Kapitel 7, 8] zu finden. Die Funktionen in diesen Räumen sind sogenannte abstrakte Funktionen, die $[0,T]$ auf X abbilden. Die Ableitung einer abstrakten Funktion u bezeichnen wir mit $\frac{\partial u}{\partial t}$, um Verwechslungen mit der substantiellen Ableitung[2] zu vermeiden.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir außerdem $|\cdot|$ bzw. $(\cdot,\cdot)$ für die Norm bzw. das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$ sowie $\|\cdot\|$ bzw. $(\!(\cdot,\cdot)\!)$ für die Norm bzw. das Skalarprodukt in $H^1_0(\Omega)$. Dabei gelten für $u, v \in H^1_0(\Omega)$ die Identitäten $\|u\| = |\nabla u|$ und $(\!(u,v)\!) = (\nabla u, \nabla v)$. Der Übersichtlichkeit halber vernachlässigen wir bei den Normen und Skalarprodukten, ob die betrachtete Funktion skalar-, vektor- oder tensorwertig ist, das heißt, wir schreiben beispielsweise $|\cdot|$ für die Norm der Räume $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^d$ und $L^2(\Omega)^{d\times d}$. Zusätzlich führen wir die solenoidalen

[2]Die substantielle Ableitung wird häufig in der Strömungsmechanik verwendet. Die genaue Definition wollen wir hier nicht angeben, die substantielle Ableitung wird aber oft mit $\frac{du}{dt}$ bezeichnet.

Räume $V = \{v \in H_0^1(\Omega)^d \mid \operatorname{div} v = 0\}$ versehen mit der H_0^1-Norm und $H = \{v \in L^2(\Omega)^d \mid \operatorname{div} v = 0,\ \gamma_n v = 0\}$ versehen mit der L^2-Norm ein. In der Definition von H ist $\operatorname{div} v = 0$ im distributionellen Sinne gemeint, also $\int_\Omega v \cdot \nabla\varphi \, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Mit γ_n bezeichnen wir wieder den Spuroperator in Normalenrichtung.

Wir wiederholen nun einige Ergebnisse zu Bochner-integrierbaren Funktionen, die wir in dieser Arbeit benötigen werden. Die Beweise werden wir in den meisten Fällen auslassen, sie können, falls nicht anders angegeben, in [Emm04, Kapitel 8] nachgelesen werden. Es seien weiterhin $T > 0$, X und Ω wie oben gegeben.

Lemma 2.1 *Sei $u \in W^{1,1}(0,T;X)$. Dann ist u fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion, die von $[0,T]$ in X abbildet.*

Bemerkung. Im Folgenden werden wir immer den absolut stetigen Repräsentanten von u meinen, wenn wir von $u \in W^{1,1}(0,T;X)$ sprechen.

Definition 2.2 (Gelfand-Dreier) *Sei V ein reeller, reflexiver, separabler Banachraum, V^* der zugehörige Dualraum und H ein reeller, separabler Hilbertraum. Weiterhin sei V stetig eingebettet und liege dicht in H. Dann bilden V, H und V^* einen Gelfand-Dreier.*

Bemerkung. Die oben definierten solenoidalen Räume V, H sowie der Dualraum V^* bilden einen solchen Gelfand-Dreier [Tem01, S. 168].

Definition 2.3 (Der Raum $\mathcal{W}(0,T)$) *Sei $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Gelfand-Dreier. Wir definieren*

$$\mathcal{W}(0,T) := \left\{ u \in L^2(0,T;V) \;\middle|\; \exists\, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V^*) \right\}.$$

Lemma 2.4 *Sei $u \in \mathcal{W}(0,T)$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = \left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t}, u(t) \right\rangle$$

für fast alle $t \in (0,T)$. Außerdem ist $t \mapsto |u(t)|^2$ absolut stetig als Funktion von $[0,T]$ in $\mathbb{R}_0^+$.

Bemerkung. Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die duale Paarung zwischen V und V^*. Wir werden dieselbe Notation aber auch für andere Räume verwenden, wenn klar ist, welche Räume gemeint sind.

Korollar 2.5 *Sei $u \in H^1(0,T;Y)$ mit $Y = L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^d$ oder $L^2(\Omega)^{d\times d}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, u(t) \right)$$

für fast alle $t \in (0,T)$.

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 2.4 mit $V = H = V^* = Y$. $\square$

Lemma 2.6 *Sei $u\colon [0,T] \to X$ absolut stetig. Dann ist auch $t \mapsto \|u(t)\|_X$ absolut stetig als Funktion von $[0,T]$ nach $\mathbb{R}_0^+$.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der absoluten Stetigkeit sowie der umgekehrten Dreiecksungleichung $\big|\|x\|_X - \|y\|_X\big| \le \|x - y\|_X$ für alle $x, y \in X$. $\square$

In Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt wollen wir nun die Begriffe Gradient und Divergenz auf Vektorfelder bzw. Tensorfelder erweitern. Dazu sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit $u = [u_i]$ und $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $v = [v_{ij}]$. Alle Komponenten von u und v seien partiell differenzierbar. Wir definieren

$$\nabla u(x) := \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}(\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i) \quad \text{sowie} \quad \operatorname{div} v(x) := \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial v_{ij}(x)}{\partial x_i}\,\vec{e}_j,$$

wobei $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^d$ den i-ten Einheitsvektor und $\otimes$ das dyadische Produkt zwischen zwei Spaltenvektoren, also $x \otimes y = xy^T$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$, bezeichnet. Wie wir sehen, ergibt ∇u eine Matrix, die in der i-ten Spalte den Gradienten des i-ten Eintrags von u enthält, und $\operatorname{div} v$ einen Vektor, der im i-ten Eintrag die Divergenz der i-ten Spalte von v enthält.

Schließlich wollen wir noch etwas vereinfachende Notation einführen. Zuerst betrachten wir einen in der Strömungsmechanik häufig auftretenden Term. Es seien u und v wie oben definiert und $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit $w = [w_i]$. Dann lautet der sogenannte konvektive Term $(w \cdot \nabla)u$ bzw. $(w \cdot \nabla)v$. Er ist definiert durch

$$(w \cdot \nabla)u := \sum_{i=1}^{d} w_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,\vec{e}_j \quad \text{bzw.} \quad (w \cdot \nabla)v := \sum_{i=1}^{d} w_i \frac{\partial v_{jk}}{\partial x_i}(\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k).$$

Außerdem führen wir den symmetrisierten Gradienten $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ und $W(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T)$ ein, in der Strömungsmechanik auch Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und Drehgeschwindigkeitstensor genannt. Die beiden Tensoren haben eine physikalische Bedeutung, wie die Namen schon vermuten lassen, diese werden wir hier jedoch nicht näher erläutern. Sie können in [Böh00, Kapitel 1.3.1] nachgelesen werden.

3 Grundlagen der Strömungsmechanik

Dieser Abschnitt orientiert sich an [SK07, Kapitel 1, 3, 4, 8], eine detaillierte Ausarbeitung der folgenden Themen kann dort gefunden werden. Der Abschnitt über das Oldroyd-Modell basiert zudem weitestgehend auf [Böh00, Kapitel 3.6]. Wir behandeln den gesamten Abschnitt mathematisch nur formal, es sollen nur die Ideen zur Herleitung der Gleichungen gezeigt werden.

3.1 Definition und Eigenschaften eines Fluids

In der Literatur findet man die Bezeichnung Fluid häufig als Oberbegriff für Flüssigkeiten und Gase. Diese Definition ist jedoch aus Gründen, die später noch erläutert werden, unzureichend für eine mathematische Untersuchung von Fluiden. Wir werden daher folgende Definition verwenden, wobei wir die auftretenden Begriffe erst im Nachhinein erläutern werden.

Definition 3.1 (Fluid) *Ein Fluid ist ein Modellmedium, mit dem vor allem die Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen beschrieben werden können. Es wird durch zwei Eigenschaften charakterisiert:*

- *Ein Fluid ist ein Kontinuum.*
- *Ein Fluid kann in Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen.*

Das Entscheidende an dieser Definition ist, dass ein Fluid nur ein Modell und kein realer Stoff ist. Gase und Flüssigkeiten können nur unter bestimmten Bedingungen als Fluid angesehen werden. Um diese Bedingungen zu verstehen, wollen wir zunächst die beiden Eigenschaften von Fluiden erläutern. Dazu beginnen wir mit der Kontinuumstheorie.

Ein Kontinuum besteht aus infinitesimal kleinen Teilchen, deren Abstand voneinander ebenfalls infinitesimal klein ist. Das bedeutet, wir können jedem Teilchen zu jedem Zeitpunkt einen Punkt des Raumes zuordnen. Daher sind Größen, die Eigenschaften der Teilchen beschreiben, zu jedem Zeitpunkt in jedem Punkt des Raumes definiert. Beispiele für solche Größen sind die Geschwindigkeit der Teilchen sowie die Dichte, sie werden im nächsten Abschnitt näher erläutert. Die Kontinuumstheorie ermöglicht uns die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf bestimmte physikalische Größen und damit erst die Aufstellung von Differentialgleichungen zur Beschreibung der Strömung des Fluids.

Natürlich sind die Voraussetzungen der Kontinuumstheorie für einen realen Stoff niemals erfüllt, da die einzelnen Teilchen des Stoffes, die Moleküle, immer eine endliche Ausdehnung und einen endlichen Abstand voneinander besitzen. Sie liefert aber unter der Bedingung, dass der durchschnittliche Abstand zwischen den Molekülen des Stoffes klein gegenüber dem untersuchten Strömungsbereich ist, eine gute Näherung. Der untersuchte Strömungsbereich kann beispielsweise der Bereich um einen Flugzeugtragflügel sein. Unter gewöhnlichen Voraussetzungen ist die Luft, die um den Tragflügel strömt, dicht genug, das heißt, die Kontinuumstheorie ist hier anwendbar. Erst am äußeren Rand der Atmosphäre wird die Luft so dünn, dass die Umströmung eines Flugkörpers nicht mehr mithilfe der Kontinuumstheorie modelliert werden kann.

Kommen wir nun zur zweiten charakteristischen Eigenschaft von Fluiden, der Schubspannungsfreiheit in Ruhe. Sie besagt, dass sich ein Fluid bei äußeren Kräften, die nicht senkrecht zur Oberfläche angreifen, verformt und daher die Kräfte bei einem ruhenden Fluid immer senkrecht zur Oberfläche angreifen müssen. So bedeckt

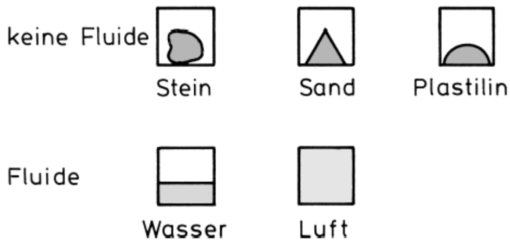

Abbildung 1: Schubspannungsfreiheit bei Fluiden in Ruhe [SK07, S. 9]

Wasser in einem Gefäß immer vollständig den Boden, da die einzige angreifende Kraft die Schwerkraft ist, siehe auch Abbildung 1.

3.2 Strömungsgrößen

Unser Ziel ist es, die Strömung eines viskoelastischen Fluids zu beschreiben. Dazu müssen wir mehrere physikalische Größen bestimmen. Die mit Abstand wichtigste Strömungsgröße ist das Geschwindigkeitsfeld u, das die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen angibt. Zusätzlich müssen wir aber auch den Druck, die Dichte und die Spannungen bestimmen. Daher wollen wir diese nun, neben ein paar weiteren Größen, kurz einführen.

Beginnen wir mit dem Druck $p \in \mathbb{R}$ und der Dichte $\rho \in \mathbb{R}$. Der Druck ist definiert als Kraft pro Fläche, wobei mit der Kraft immer die Kraft gemeint ist, die senkrecht zu der betrachteten Fläche angreift, wenn das Fluid in Ruhe ist. Die Dichte beschreibt die Masse pro Volumen. Falls die Dichte eines Fluids über den gesamten Bereich und für jede Zeit konstant bleibt, sprechen wir von einem inkompressiblen Fluid, ansonsten von einem kompressiblen Fluid. Im inkompressiblen Fall, auf den wir uns im Folgenden beschränken wollen, ist die Dichte also eine Materialkonstante.

Die äußeren Kräfte, die auf ein Fluid einwirken können, unterteilen wir in Volumen- und Oberflächenkräfte. Volumenkräfte greifen am gesamten Volumen an, wie beispielsweise die Schwerkraft oder magnetische Kräfte. Oberflächenkräfte greifen dahingegen nur an der Oberfläche an. Beispiele dafür sind Reibungskräfte und der Druck, der von außen auf das Fluid wirkt[3]. Weiterhin führen wir analog zur Massendichte ρ die Kraftdichte $f \in \mathbb{R}^d$ ein, die als Volumenkraft pro Volumen definiert ist. Während die Massendichte jedoch eine skalare Größe ist, ist die Kraftdichte vektoriell, da sie auch die Richtung der Volumenkraft angibt.

Nun betrachten wir den symmetrischen Spannungstensor $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, der eine Verallgemeinerung des Druckes auf Fluide in Bewegung darstellt. Er ist definiert als Oberflächenkraft pro Fläche. Dabei beschreiben die Diagonalelemente des Spannungstensors die Oberflächenkräfte senkrecht zur Oberfläche, während die übrigen

[3]Wir unterscheiden hier nicht zwischen Kräften im eigentlichen Sinn und spezifischen Kräften, das sind Größen, die beispielsweise die Einheit Kraft pro Fläche haben. Daher kann der Druck ebenfalls als Kraft betrachtet werden.

Elemente die Oberflächenkräfte parallel zur Oberfläche, die sogenannten Schubspannungen, beschreiben. Aufgrund des Zusammenhangs zum Druck wird der Spannungstensor oft in den Druck und die Reibungsspannungen $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ aufgeteilt, also $\Sigma = -p \cdot I_d + \sigma$, wobei I_d die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{d\times d}$ bezeichne. Damit ist wegen der Symmetrie von Σ auch σ symmetrisch. Bei Fluiden in Ruhe vereinfacht sich der Spannungstensor zu $\Sigma = -p \cdot I_d$, da keine Reibung auftreten kann. Die Aufteilung des Spannungstensors in Druck und Reibungsspannungen ist also konsistent mit der Definition des Druckes.

Alle bisher genannten Größen sind Eigenschaften der Teilchen und zu jeder Zeit definiert. Nach der Kontinuumstheorie kann man die Teilchen mit den Punkten des Gebiets, das wir im Folgenden mit Ω bezeichnen wollen, identifizieren. Daher sind diese Größen in jedem Punkt und zu jeder Zeit definiert. Physikalische Strömungsgrößen mit diesen Eigenschaften nennt man auch Feldgrößen. Im Folgenden meinen wir mit einer bestimmten Feldgröße v immer die Funktion $v\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{K}$, $(x,t) \mapsto v(x,t)$, wobei $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{R}^{d\times d}$ steht.

Als letzte Größe wollen wir noch den Impuls einführen. Er ist definiert als Masse mal Geschwindigkeit. Der Grund, warum wir ihn hier einführen, ist seine essentielle Bedeutung in der Strömungsmechanik, die wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

3.3 Bilanzgleichungen

Zur Berechnung der gesuchten Strömungsgrößen Geschwindigkeit, Druck und Reibungsspannungen[4] benötigen wir Gleichungen, die diese Strömungsgrößen in Bezug zueinander setzen. Dazu betrachten wir neben einer weiteren Gleichung, zu der wir später noch kommen werden, Bilanzgleichungen. Unter Bilanzgleichungen versteht man allgemein Gleichungen, die die zeitliche Änderung einer bestimmten physikalischen Größe durch eine weitere physikalische Größe ausdrücken. In der Strömungsmechanik betrachtet man dabei meistens die Masse, den Impuls, den Drehimpuls oder die Energie. Der Vorteil der Bilanzgleichungen für diese Größen ist ihre universelle Anwendbarkeit.

Wir wollen uns im Folgenden auf die Massen- und die Impulsbilanz konzentrieren, da die übrigen beiden für die Beschreibung der Strömung eines inkompressiblen Fluids keine zusätzlichen Informationen liefern. Dazu betrachten wir zunächst die Formulierung für ein raumfestes Volumen, das heißt ein festes Gebiet $V \subset \Omega$, und leiten daraus die differentielle Formulierung der Bilanzgleichungen her.

3.3.1 Massenbilanz

Bei der Massenbilanz betrachten wir die zeitliche Änderung der Masse in einem raumfesten Volumen V. Anschaulich ist klar, dass sich die Masse in diesem Volumen nur durch Zufluss oder Abfluss an Masse über die Oberfläche A des Volumens ändert, da Masse weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Die Masse im Volumen

[4] Die Dichte wird in unserem Fall immer vorgegeben, da wir nur den inkompressiblen Fall untersuchen, für den die Dichte eine Materialkonstante ist.

V kann dargestellt werden als das Integral über die Dichte, also $\int_V \rho\ dx$, während der Massenstrom über die Oberfläche A durch $-\int_A \rho u \cdot \vec{n}\ d\mathcal{O}$ dargestellt wird. Das Minuszeichen benötigt man, da bei Zufluss von Masse die Vektoren u und $\vec{n}$ antiparallel sind und damit das Skalarprodukt einen negativen Wert liefert. Insgesamt lautet die Massenbilanz

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\ dx = -\int_A \rho u \cdot \vec{n}\ d\mathcal{O}. \tag{3.1}$$

Nun wollen wir noch, zumindest formal, die differentielle Formulierung der Massenbilanz herleiten, um statt einer Integrodifferentialgleichung wie in (3.1) eine reine Differentialgleichung untersuchen zu können. Dazu vertauschen wir auf der linken Seite von (3.1) formal Differentiation und Integration und wenden auf der rechten Seite den Satz von Gauß an. Damit ergibt sich

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dx = -\int_V \operatorname{div}(\rho u)\ dx.$$

Da diese Gleichung für ein beliebiges raumfestes Volumen $V \subset \Omega$ gilt, erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Dies ist die allgemeine differentielle Form der Massenbilanz, für die nur die Voraussetzungen der Kontinuumstheorie erfüllt sein müssen. Sie vereinfacht sich für inkompressible Fluide wegen $\rho = const$ zu

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{3.2}$$

Im Folgenden werden wir immer von der Kontinuitätsgleichung statt der Massenbilanz sprechen, da dies die gewöhnlichere Bezeichnung in der Strömungsmechanik ist. Außerdem werden wir damit immer die Form (3.2) für inkompressible Fluide meinen.

3.3.2 Impulsbilanz

Für die Impulsbilanz betrachten wir wieder ein raumfestes Volumen V mit der Oberfläche A und dem äußeren Normalenvektor $\vec{n}$. Der Impuls im Volumen ändert sich einerseits durch Zufluss und Abfluss von Impuls über die Oberfläche[5] und andererseits durch von außen angreifende Kräfte. Da Impuls, wie Masse, weder erzeugt noch vernichtet werden kann, gibt es keine weiteren Möglichkeiten, wie sich der Impuls ändern kann. In Formeln erhalten wir für den Impuls im Volumen $\int_V \rho u\ dx$ und für den Impulsstrom über die Oberfläche $-\int_A \rho u(u \cdot \vec{n})\ d\mathcal{O}$. Die Volumenkräfte werden durch $\int_V f\ dx$ und die Oberflächenkräfte durch $\int_A \Sigma \cdot \vec{n}\ d\mathcal{O}$ dargestellt. Insgesamt lautet die Impulsbilanz

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho u\ dx = -\int_A \rho u(u \cdot \vec{n})\ d\mathcal{O} + \int_V f\ dx + \int_A \Sigma \cdot \vec{n}\ d\mathcal{O}.$$

[5] Der Impuls wird dabei von den Teilchen der Strömung gewissermaßen transportiert.

Bei der, wiederum formalen, Herleitung der differentiellen Form der Impulsbilanz gehen wir analog zur Massenbilanz vor, wir vertauschen also auf der linken Seite Integration und Differentiation und wenden auf der rechten Seite zweimal den Satz von Gauß an, um die Oberflächenintegrale in Volumenintegrale zu überführen. Mithilfe der Identität $\rho u(u \cdot \vec{n}) = (\rho u \otimes u)\vec{n}$ erhalten wir

$$\int_V \frac{\partial \rho u}{\partial t}\ dx = -\int_V \operatorname{div}(\rho u \otimes u)\ dx + \int_V f\ dx + \int_V \operatorname{div}\Sigma\ dx \tag{3.3}$$

und folglich

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div}\Sigma + f,$$

da (3.3) wiederum für ein beliebiges raumfestes Volumen V gilt. Dies ist die allgemeine differentielle Form der Impulsbilanz, die für spezielle Fluide meistens weiter vereinfacht werden kann. Für inkompressible Fluide ergibt sich zunächst

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u)\right) = \operatorname{div}\sigma - \nabla p + f,$$

wobei wir $\rho = const$ und $\Sigma = -p \cdot I_d + \sigma$ verwendet haben. Diese Gleichung wollen wir noch in eine üblichere Form umschreiben. Dazu betrachten wir den Term $\operatorname{div}(u \otimes u)$. Formal gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(u \otimes u) &= \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u_i \partial u_j}{\partial x_i}\,\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i u) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) u + \sum_{i=1}^{d} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= \operatorname{div}(u)\, u + (u \cdot \nabla)\, u.
\end{aligned}$$

Wenden wir nun noch die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} u = 0$ an, so ergibt sich für die Impulsbilanz für inkompressible Fluide

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) = \operatorname{div}\sigma - \nabla p + f. \tag{3.4}$$

Die Impulsbilanz wird in der Strömungsmechanik für gewöhnlich als Bewegungsgleichung bezeichnet, deshalb werden wir im Folgenden ebenfalls diesen Begriff verwenden.

3.4 Rheologische Stoffgleichungen

Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung reichen im Allgemeinen nicht aus, um die gesuchten Größen bestimmen zu können. Daher benötigen wir eine weitere Gleichung, die sogenannte Stoffgleichung. Diese gibt an, wie die Reibungsspannungen σ von der Geschwindigkeit abhängen. Erst durch die Stoffgleichungen werden die Fluide in verschiedene Modelle unterteilt, abgesehen von der Einteilung in kompressible und inkompressible Fluide. Die Stoffgleichungen, die wir in diesem Abschnitt vorstellen wollen, beruhen auf der Phänomenologischen Rheologie oder Makrorheologie, das heißt, die Stoffgleichungen werden durch makroskopische Untersuchungen ohne Beachtung der mikroskopischen Stoffstruktur hergeleitet[6].

Wir wollen hier neben dem Oldroyd-Modell kurz das Newtonsche Modell einführen, da es am häufigsten verwendet wird. Unter geeigneten Bedingungen können viele im Alltag vorkommende Flüssigkeiten und Gase wie Wasser, Luft und Öl durch dieses Modell beschrieben werden. Bei newtonschen Fluiden gilt zudem die sehr einfache Stoffgleichung $\sigma = 2\mu D(u)$, wobei wir an die Notation $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ erinnern. Die Konstante $\mu > 0$ bezeichnet die Viskosität. Diese beschreibt die Zähigkeit des Fluids, das bedeutet, je größer die Viskosität, desto mehr Kraft muss man aufbringen, um das Fluid zu verformen.

Das Einsetzen der Stoffgleichung in die kompressible Form der Bewegungsgleichung liefert die sogenannte Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = 2\mu \operatorname{div} D(u) - \nabla p + f.$$

Im inkompressiblen Fall erhalten wir zunächst mithilfe der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} u = 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{div} D(u) &= \operatorname{div} \nabla u + \operatorname{div} (\nabla u)^T = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \vec{e}_j + \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \vec{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{div} u)\, \vec{e}_j = \Delta u + 0 \\ &= \Delta u, \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^d$ wieder den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Mit dieser Identität erhalten wir die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung

$$-\mu\, \Delta u + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) + \nabla p = f,$$

die wir im Folgenden nur noch mit Navier-Stokes-Gleichung bezeichnen werden, da wir den kompressiblen Fall nicht untersuchen. Für das Navier-Stokes-Problem gibt es im Vergleich zum Oldroyd-Modell bereits weitreichende Ergebnisse zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Auf diese werden wir später noch einmal kurz eingehen.

3.4.1 Oldroyd-Modell

Bei nichtnewtonschen Fluiden sind die Stoffgleichungen nichtlinear und für gewöhnlich komplexer, so dass oft keine explizite Formel für σ in Abhängigkeit von u angegeben werden kann. Dies ist auch beim Oldroyd-Modell der Fall. Doch bevor

[6] Mehr zu den verschiedenen Zugängen zur Rheologie kann in [Gie94, Kapitel 1.2] nachgelesen werden.

wir zu dessen Stoffgleichung kommen, wollen wir zunächst die sogenannte Oldroyd-Ableitung definieren.

Definition 3.2 (Oldroyd-Ableitung) *Seien* $u \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^d$ *und* $\tau \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^{d \times d}$ *bezüglich der Zeit und aller Raumkomponenten schwach differenzierbar, wobei* u *das Geschwindigkeitsfeld der Strömung und* τ *eine beliebige tensorwertige Feldgröße bezeichne. Sei ferner* $a \in [-1, 1]$ *ein vorgegebener Parameter. Dann bezeichnet*

$$\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\tau + \tau W(u) - W(u)\tau - a(D(u)\tau + \tau D(u))$$

die sogenannte Oldroyd-Ableitung.

Hierbei ist es zwar aus mathematischen Gründen irrelevant zu fordern, dass u das Geschwindigkeitsfeld und τ eine Feldgröße ist. Da aber die Oldroyd-Ableitung einen physikalischen Ursprung und in diesem Fall auch eine physikalische Bedeutung hat[7], haben wir diese Begriffe mit in die Definition aufgenommen.

Mithilfe der Oldroyd-Ableitung können wir nun die Stoffgleichungen für ein vierparametriges Modell formulieren, das als Spezialfall das Oldroyd-Modell enthält:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} D(u) + \tau, \\ \tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} &= 2\eta(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}) D(u) \end{aligned} \tag{3.6}$$

mit $a \in [-1, 1]$, $\eta > 0$ und $0 \leq \lambda_2 < \lambda_1$. Die Reibungsspannungen σ werden dabei in einen rein viskosen, newtonschen Anteil $2\eta\frac{\lambda_2}{\lambda_1}D(u)$ und einen rein elastischen Anteil τ aufgeteilt. Dieser ist durch eine differentielle Stoffgleichung gegeben und aufgrund der Symmetrie von σ und $D(u)$ ebenfalls symmetrisch. Der Stoffparameter η bezeichnet die sogenannte Nullviskosität, λ_1 die Relaxationszeit und λ_2 die Retardationszeit. Diese drei Parameter wollen wir kurz erläutern.

Die Viskosität eines viskoelastischen Fluids ist keine Materialkonstante. Sie ist abhängig vom Geschwindigkeitsgradienten $D(u)$ an der Stelle $x \in \Omega$ und von der Zeit t. Die Nullviskosität bezeichnet hier den Grenzwert der Viskosität für $D(u)$ gegen Null und t gegen Unendlich bei konstanter Temperatur.

Die Relaxationszeit gibt bei einer elastischen Verformung an, nach welcher Zeit die Spannung nur noch das $\frac{1}{e}$-fache der anfänglichen Spannung bei einer konstanten Verformung beträgt, während die Retardationszeit angibt, nach welcher Zeit die Verformung nur noch das $\frac{1}{e}$-fache der anfänglichen Verformung bei einer konstanten Spannung beträgt [Ehr99, S. 20].

Im Grenzfall $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, wobei wir hier $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ als Eins definieren, erhalten wir offensichtlich nach (3.6) das Newtonsche Modell, so dass in diesem Fall die Viskosität η der Viskosität μ in der Stoffgleichung für dieses Modell entspricht.

Die Herleitung der Stoffgleichungen wollen wir hier aufgrund der Komplexität nicht vorstellen, sie kann beispielsweise in [Gie94, S. 184-187] nachgelesen werden. Doch kommen wir nun zum eigentlichen Oldroyd-Modell.

[7] Genaueres zu diesem Thema kann in [Böh00, Kapitel 1.3.5] nachgelesen werden.

Wir erhalten das sogenannte Oldroyd-B-Modell, falls in (3.6) die Retardationszeit λ_2 positiv und der Parameter a in der Oldroyd-Ableitung 1 ist. Das sogenannte Oldroyd-A-Modell erhalten wir, falls die Retardationszeit positiv ist und $a = -1$ gilt. Diese beiden Modelle werden wir in dieser Arbeit hauptsächlich betrachten. Außerdem werden wir kurz das Jeffreys-Modell untersuchen, das man erhält, wenn die Retardationszeit positiv und a gleich Null ist.

Wenn wir die erste Stoffgleichung in (3.6) in die Bewegungsgleichung (3.4) einsetzen und die Oldroyd-Ableitung ausschreiben, so erhalten wir für diese Modelle insgesamt das System

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) - \eta\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Delta u + \nabla p = \operatorname{div}\tau + f,\\
&\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_1}\tau + (u \cdot \nabla)\tau + \tau W(u) - W(u)\tau\\
&\qquad\qquad - a(D(u)\tau + \tau D(u)) = \frac{2\eta}{\lambda_1}(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})D(u),\\
&\operatorname{div} u = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

in $\Omega \times (0, T)$, wobei wir die Identität $2 \operatorname{div} D(u) = \Delta u$, siehe Gleichung (3.5), angewendet haben. Dieses System kann durch Einführen der Reynoldszahl Re und der Weissenbergzahl We entdimensionalisiert werden [FCGO02, S. 557]. Dabei beschreibt die Reynoldszahl das Verhältnis zwischen den Trägheits- und den Zähigkeitskräften. Das bedeutet, die Reynoldszahl gibt an, wie stark die Viskosität die Strömung beeinflusst. Bei großer Reynoldszahl spielt die Viskosität beispielsweise kaum eine Rolle. Die Weissenbergzahl gibt die Elastizität des Materials an. Je größer sie ist, desto stärker ist der Einfluss der Elastizität auf das Verhalten des Fluids. Das entdimensionalisierte System lautet

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) - (1-\omega)\Delta u + \nabla p = \operatorname{div}\tau + f,\\
&\tau + \mathrm{We}\,\frac{\mathcal{D}_a\tau}{\mathcal{D}t} = 2\omega D(u),\\
&\operatorname{div} u = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

in $\Omega \times (0, T)$, wobei wir $\omega := 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ definieren. Bevor wir zu den Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für dieses System kommen, wollen wir uns eine wichtige Eigenschaft von viskoelastischen Fluiden veranschaulichen.

4 Gedächtniseinfluss bei viskoelastischen Fluiden

Viskoelastische Fluide werden oft auch Fluide mit Gedächtnis genannt. Dies liegt daran, dass der momentane Spannungszustand bei diesen Fluiden nicht nur von der momentanen Geschwindigkeit abhängt, sondern von den Geschwindigkeiten zu allen vorherigen Zeitpunkten. Anhand eines vereinfachten Modells wollen wir uns diesen Gedächtniseinfluss klar machen. Wir folgen dabei [FCGO02, S. 554 f.].

Wir betrachten wieder das Oldroyd-Modell, also die Stoffgleichungen (3.6). Nehmen wir nun an, dass ρ konstant ist und sowohl die Geschwindigkeit u als auch die Reibungsspannungen σ klein sind, können wir die quadratischen Terme in der Bewegungsgleichung und den Stoffgleichungen vernachlässigen und wir erhalten aus (3.7) das System

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \eta\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Delta u + \nabla p = \operatorname{div}\tau + f,\\
&\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_1}\tau = \frac{2\eta}{\lambda_1}\omega D(u),\\
&\operatorname{div} u = 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

in $\Omega \times (0,T)$. Die zweite Gleichung können wir auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{t/\lambda_1}\tau\right) = \frac{2\eta}{\lambda_1}\omega\, e^{t/\lambda_1} D(u).$$

Wenn wir nun zusätzlich annehmen, dass ein Anfangswert τ_0 für τ gegeben ist, also $\tau(x,0) = \tau_0(x)$ in Ω, erhalten wir durch Integration von 0 bis t auf beiden Seiten

$$\tau(x,t) = e^{-t/\lambda_1}\tau_0(x) + \frac{2\eta}{\lambda_1}\omega \int_0^t e^{-(t-s)/\lambda_1}[D(u)](x,s)ds$$

für fast alle $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Wie wir an dieser Gleichung erkennen können, hängt τ zum Zeitpunkt t nicht nur von dem Geschwindigkeitsgradienten $D(u)$ zum Zeitpunkt t ab, sondern auch von allen vorherigen Geschwindigkeitsgradienten. Eine ähnliche Darstellung für τ kann auch ohne die Voraussetzungen an u und σ hergeleitet werden, siehe dazu [FCGO02, S. 555].

Die obige Gleichung können wir nun in die Bewegungsgleichung, also in die erste Gleichung in (4.1) einsetzen. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\eta}{\lambda_1}\left(\lambda_2\Delta u(x,t) - \omega\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda_1}\Delta u(x,s)\; ds\right)&\\
+ \nabla p(x,t) = e^{-t/\lambda_1}\operatorname{div}\tau_0(x) + f(x,t)&
\end{aligned}$$

für fast alle $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, wobei wir wieder die Identität $2\operatorname{div} D(u) = \Delta u$, siehe Gleichung (3.5), benutzt haben. Der mathematische Vorteil dieser Darstellung ist, dass wir nur noch eine Differentialgleichung für u lösen müssen.

5 Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

In diesem Abschnitt geht es um einige Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das Oldroyd-B- bzw. Oldroyd-A-Modell. Vorher wollen wir uns aber kurz dem Jeffreys-Modell zuwenden, für das die Existenz einer schwachen globalen Lösung mit weniger Voraussetzungen als für das Oldroyd-Modell gezeigt werden kann. Wir betrachten also im Folgenden immer das System (3.8) mit $a \in \{-1,0,1\}$. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mindestens ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Wir betrachten in der gesamten Arbeit nur die Fälle $d = 2$ sowie $d = 3$, da sie die in der Anwendung wichtigsten Fälle sind. Die vorgegebenen Anfangswerte für u und τ bezeichnen wir mit u_0 bzw. τ_0, das heißt, wir fordern $u(x,0) = u_0(x)$ und $\tau(x,0) = \tau_0(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Im Raum beschränken wir uns auf homogene Dirichlet-Randbedingungen.

Bevor wir aber zu den Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen kommen, wollen wir uns zuerst mit einigen Eigenschaften der auftretenden Operatoren beschäftigen. Dazu beschreiben wir unsere physikalischen Größen durch abstrakte Funktionen, wir definieren also

$$\tilde{v}\colon [0,T] \to X, \quad [\tilde{v}(t)](x) := v(x,t)$$

für fast alle $x \in \Omega$, wobei X ein reeller Banachraum ist und v für eine beliebige physikalische Größe steht. Die Tilde werden wir im Folgenden nicht mehr mitführen.

Nun schreiben wir die schwache Formulierung des Problems (3.8) auf, wobei wir im Folgenden $u(t)$ und $\tau(t)$ durch u und τ abkürzen: Zu gegebenem f finde u, τ und p, so dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot \varphi \, dx\right) + (1-\omega) \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx& \\
+ \int_\Omega \nabla p \cdot \varphi \, dx = - \int_\Omega D(\varphi) : \tau \, dx + \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx&, \\
\int_\Omega \tau : \psi \, dx + \mathrm{We} \int_\Omega \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D} t} : \psi \, dx = 2\omega \int_\Omega D(u) : \psi \, dx.&
\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)^d$ mit $\operatorname{div} \varphi = 0$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)^{d\times d}$ und für fast alle $t \in (0,T)$ gilt. Dabei bezeichnet $:$ das Matrix-Skalarprodukt $A : B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$ für alle A, $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Aufgrund der Divergenzfreiheit der Testfunktionen φ verschwindet der Druck in der schwachen Formulierung, denn es gilt

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} (p \cdot \vec{n}) \, \varphi \, d\mathcal{O} - \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \, dx = 0,$$

wobei $\vec{n}$ wieder den äußeren Normalenvektor an $\partial\Omega$ bezeichnet. Der Randterm verschwindet aufgrund der Kompaktheit des Trägers von φ. Wie der Druck wieder eingeführt werden kann, ist in [Tem01, Kapitel 1.1.4] zu finden.

Mithilfe der Skalarprodukte in $L^2(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ können wir die Gleichungen in der schwachen Formulierung auch kürzer schreiben als

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\right) + ((u \cdot \nabla) u, \varphi)\right) + (1-\omega) \, (\!(u, \varphi)\!) = -(D(\varphi), \tau), \\
&(\tau, \psi) + \mathrm{We}\left(\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D} t}, \psi\right) = 2\omega \, (D(u), \psi).
\end{aligned}$$

Nun definieren wir $b\colon L^\alpha(\Omega)^d \times W^{1,\beta}(\Omega)^d \times L^\gamma(\Omega)^d \to \mathbb{R}$, $b(u,v,w) = ((u \cdot \nabla) v, w)$ bzw. $\tilde{b}\colon L^\alpha(\Omega)^d \times W^{1,\beta}(\Omega)^{d\times d} \times L^\gamma(\Omega)^{d\times d} \to \mathbb{R}$, $\tilde{b}(u,v,w) = ((u \cdot \nabla) v, w)$, wobei $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$ gilt. Dabei können α, β und γ auch den Wert Unendlich annehmen. In diesem Fall interpretieren wir $\frac{1}{\infty}$ als Null.

Die folgenden Lemmata werden wir nur für b formulieren, sie gelten jedoch auch für $\tilde{b}$. Die Beweise verlaufen analog. Die folgende Aussage ist ein Nebenprodukt aus dem Beweis von [CF88, Proposition 6.1].

Lemma 5.1 *Die oben definierte Form b ist wohldefiniert, trilinear und beschränkt, es existiert also eine von u, v und w unabhängige positive Konstante C, so dass*

$$|b(u, v, w)| \leq C\|u\|_{L^\alpha}\|\nabla v\|_{L^\beta}\|w\|_{L^\gamma}$$

für alle $u \in L^\alpha(\Omega)^d$, $v \in W^{1,\beta}(\Omega)^d$ *und* $w \in L^\gamma(\Omega)^d$ *gilt.*

Beweis. Die Trilinearität ist offensichtlich, die Wohldefiniertheit und Beschränktheit folgen unter Beachtung der Identitäten

$$b(u, v, w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \; dx,$$
$$\tilde{b}(u, v, w) = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{d} u_i \frac{\partial v_{jk}}{\partial x_i} w_{jk} \; dx$$

unmittelbar aus der Hölderschen Ungleichung. □

In den meisten Fällen werden wir jedoch nicht die obige Abschätzung verwenden, sondern einige andere, die mehr Regularität von u und v benötigen. Die Aussage ist in [GS90a, S. 853] zu finden, den Beweis führen wir selbst.

Lemma 5.2 *Seien* u, $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ *hinreichend glatt, so dass die rechten Seiten der folgenden Abschätzungen existieren, sowie* $w \in L^2(\Omega)^d$. *Dann existiert eine von u, v und w unabhängige positive Konstante C, so dass*

$$|b(u, v, w)| \leq C|u|\,\|v\|_{H^3}|w|,$$
$$|b(u, v, w)| \leq C\|u\|\|v\|_{H^2}|w|,$$

für alle $u, w \in L^2(\Omega)^d$, $v \in H^3(\Omega)^d$ *bzw.* $u \in H^1_0(\Omega)^d$, $v \in H^2(\Omega)^d$, $w \in L^2(\Omega)^d$ *gilt.*

Beweis. Um die erste Ungleichung zu beweisen, verwenden wir die in Lemma 5.1 gezeigte Ungleichung mit $\alpha = \gamma = 2$, $\beta = \infty$, wir erhalten also

$$|b(u, v, w)| \leq C|u|\,\|\nabla v\|_{L^\infty}|w|,$$

falls $u, w \in L^2(\Omega)^d$, $\nabla v \in L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ gilt. Dabei verwenden wir C hier und im Rest des Beweises als generische Konstante. Mit der stetigen Einbettung von $H^2(\Omega)^{d\times d}$ in $L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ für $d = 2, 3$ folgt nun die gewünschte Abschätzung, falls $v \in H^3(\Omega)^d$ und damit $\nabla v \in H^2(\Omega)^{d\times d}$ gilt.

Für die zweite Abschätzung verwenden wir ebenfalls die Ungleichung aus Lemma 5.1 mit $\alpha = \beta = 4$, $\gamma = 2$, also

$$|b(u, v, w)| \leq C\|u\|_{L^4}\|\nabla v\|_{L^4}|w|$$

für $u \in L^4(\Omega)^d$, $\nabla v \in L^4(\Omega)^{d\times d}$, $w \in L^2(\Omega)^d$. Mit der stetigen Einbettung von $H^1_0(\Omega)^d$ bzw. $H^1(\Omega)^d$ in $L^4(\Omega)^d$ erhalten wir für $u \in H^1_0(\Omega)^d$ und $v \in H^2(\Omega)^d$ wiederum die gewünschte Abschätzung. □

Korollar 5.3 *Der via $B(u,v)\colon L^2(\Omega)^d \to \mathbb{R}$, $(B(u,v))(w) := b(u,v,w)$, definierte Operator ist für festes $u \in L^\alpha(\Omega)^d$ und $v \in W^{1,\beta}(\Omega)^d$ mit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$ wohldefiniert, linear und stetig in $L^2(\Omega)^d$. Mit der Konstanten C aus Lemma 5.2 gilt*

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &\le C|u|\,\|v\|_{H^3}, \\
|B(u,v)| &\le C\|u\|\|v\|_{H^2}
\end{aligned}
$$

für alle $u \in L^2(\Omega)^d$, $v \in H^3(\Omega)^d$ bzw. $u \in H_0^1(\Omega)^d$, $v \in H^2(\Omega)^d$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit, Linearität und Stetigkeit von B folgen direkt aus Lemma 5.1. Also gilt $B(u,v) \in (L^2(\Omega)^d)^*$. Aus dem letzten Lemma erhalten wir für hinreichend glatte u und v die Abschätzungen $(B(u,v))(w) \le C|u|\,\|v\|_{H^3}|w|$ und $(B(u,v))(w) \le C\|u\|\|v\|_{H^2}|w|$ für alle $w \in L^2(\Omega)^d$. Damit gelten die Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
\|B(u,v)\|_{(L^2(\Omega)^d)^*} &\le C|u|\,\|v\|_{H^3}, \\
\|B(u,v)\|_{(L^2(\Omega)^d)^*} &\le C\|u\|\|v\|_{H^2}
\end{aligned}
$$

für $u \in L^2(\Omega)^d$ und $v \in H^3(\Omega)^d$ bzw. $u \in H_0^1(\Omega)^d$ und $v \in H^2(\Omega)^d$. Mit $(L^2(\Omega)^d)^* \cong L^2(\Omega)^d$ folgen daraus aber sofort die gewünschten Abschätzungen, da $|B(u,v)| = \|B(u,v)\|_{(L^2(\Omega)^d)^*}$ gilt. □

Dieselbe Aussage gilt auch für den via $\tilde{B}(u,v)\colon L^2(\Omega)^{d\times d} \to \mathbb{R}$, $(\tilde{B}(u,v))(w) := \tilde{b}(u,v,w)$, definierten Operator.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von b ist die Schiefsymmetrie im zweiten und dritten Argument, die unter anderem in [Tem01, S. 109] zu finden ist.

Lemma 5.4 (Schiefsymmetrie) *Seien $u \in V$, $v,w \in H^1(\Omega)^d$. Dann ist b im zweiten und dritten Argument schiefsymmetrisch, es gilt also*

$$
b(u,v,w) = -b(u,w,v).
$$

Beweis. Zunächst ist b wohldefiniert für $u \in V$, $v,w \in H^1(\Omega)^d$. Dies folgt mit Lemma 5.1 aus der kompakten Einbettung von V bzw. $H^1(\Omega)^d$ in $L^4(\Omega)^d$ für $d = 2,3$, wenn wir $\alpha = \gamma = 4$, $\beta = 2$ wählen. Um die Schiefsymmetrie zu beweisen, beschränken wir uns vorerst auf Funktionen $u \in \mathcal{V} := \{u \in C_c^\infty(\Omega)^d \mid \operatorname{div} u = 0\}$, $v,w \in H^1(\Omega)^d$. Dann folgt nach der Definition von b mit partieller Integration

$$
\begin{aligned}
b(u,v,w) &= ((u\cdot\nabla)v, w) \\
&= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} u_i w_j (v\cdot\vec{n}) \, d\mathcal{O} - \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega v_j \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i w_j)\, dx,
\end{aligned}
$$

wobei die unteren Indizes die jeweiligen Komponenten des Vektors bezeichnen. $\vec{n}$ ist wieder der äußere Normalenvektor an $\partial\Omega$. Da $u|_{\partial\Omega} = 0$ gilt, verschwindet die erste

Summe und wir erhalten

$$b(u,v,w) = -\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} w_j \, dx - \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega v_j u_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx.$$

Auch hier verschwindet die erste Summe, da $\operatorname{div} u = 0$ gilt. Damit ergibt sich

$$b(u,v,w) = -\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega v_j u_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx = -b(u,w,v),$$

zunächst nur für $u \in \mathcal{V}$. Da aber $\mathcal{V}$ dicht in V bezüglich der $H_0^1(\Omega)^d$-Norm liegt [Tem01, S. 4], existiert für jedes $u \in V$ eine Folge von Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, so dass u_n stark gegen u in $H_0^1(\Omega)^d$ und damit in $L^4(\Omega)^d$ konvergiert. Mit der in Lemma 5.1 gezeigten Abschätzung für b folgt

$$|b(u_n,v,w) - b(u,v,w)| = |b(u_n - u, v, w)| \leq C\|u_n - u\|_{L^4}\|v\|\|w\|_{L^4} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für $v, w \in H^1(\Omega)^d$ und damit

$$b(u,v,w) = \lim_{n\to\infty} b(u_n,v,w) = -\lim_{n\to\infty} b(u_n,w,v) = -b(u,w,v).$$

Die Behauptung gilt also auch für $u \in V$, $v, w \in H^1(\Omega)^d$. □

Korollar 5.5 *Unter den Voraussetzungen des Lemmas 5.4 gilt*

$$b(u,v,v) = 0.$$

Neben den Eigenschaften von b bzw. $\tilde{b}$ benötigen wir noch die eines weiteren Operators. Wir definieren $g\colon L^2(\Omega)^{d\times d} \times H^1(\Omega)^d \to L^1(\Omega)^{d\times d}$, $g(\tau,u) := \tau W(u) - W(u)\tau - a(D(u)\tau + \tau D(u))$, wobei $a \in [-1,1]$ gilt. Dieser Operator g erfüllt ebenfalls einige Ungleichungen. Die Aussage des folgenden Lemmas ist in [GS90a, S. 853] zu finden, den Beweis führen wir wieder selbst.

Lemma 5.6 *Der oben definierte Operator g ist wohldefiniert und bilinear. Seien weiterhin $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ hinreichend glatt, so dass die rechten Seiten der folgenden Abschätzungen existieren. Dann bildet g nach $L^2(\Omega)^{d\times d}$ ab und es existiert eine von u und τ unabhängige positive Konstante C, so dass*

$$|g(\tau,u)| \leq C|\tau|\,\|u\|_{H^3},$$
$$|g(\tau,u)| \leq C\|\tau\|_{H^2}\|u\|,$$

für alle $u \in H^3(\Omega)^d$, $\tau \in L^2(\Omega)^{d\times d}$ bzw. $u \in H_0^1(\Omega)^d, \tau \in H^2(\Omega)^{d\times d}$ gilt.

Beweis. Nach Definition von g gilt

$$g(\tau,u) = \tau W(u) - W(u)\tau - a(D(u)\tau + \tau D(u)). \tag{5.1}$$

Wenn wir $W(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T)$ und $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$ ausschreiben, erkennen wir, dass die einzigen zu untersuchenden Terme $\tau\nabla u$ und $\nabla u\,\tau$ sind. Daher folgt die Wohldefiniertheit von g unmittelbar aus der Hölderschen Ungleichung für $\|\tau\nabla u\|_{L^1}$ und $\|\nabla u\,\tau\|_{L^1}$, falls $\tau \in L^2(\Omega)^{d\times d}$ und $u \in H^1(\Omega)^d$ gilt. Da g eine Linearkombination aus bilinearen Operatoren ist, folgt auch die Bilinearität.

Die beiden Abschätzungen für g zeigen wir nur für den Term $|\tau\nabla u|$, der Beweis der Abschätzungen für den anderen Term verläuft analog. Aus den Abschätzungen erhalten wir auch sofort die Eigenschaft, dass g für $u \in H^3(\Omega)^d$ und $\tau \in L^2(\Omega)^{d\times d}$ bzw. $u \in H_0^1(\Omega)^d$ und $\tau \in H^2(\Omega)^{d\times d}$ nach $L^2(\Omega)^{d\times d}$ abbildet.

Um die erste Abschätzung zu erhalten, betrachten wir

$$|\tau\nabla u|^2 = \int_\Omega |\tau(x)\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \|\nabla u\|_{L^\infty}^2 \int_\Omega |\tau(x)|^2 \, dx = \|\nabla u\|_{L^\infty}^2 |\tau|^2$$

für $\nabla u \in L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ und $\tau \in L^2(\Omega)^{d\times d}$. Wie im Beweis von Lemma 5.2 folgt aufgrund der stetigen Einbettung von $H^2(\Omega)^{d\times d}$ in $L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ für $d = 2, 3$ die Ungleichung $\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^3}$, falls $u \in H^3(\Omega)^d$ gilt, und damit die erste Abschätzung für g. Die Konstante C ist wieder als generische Konstante zu verstehen.

Für die zweite Abschätzung betrachten wir

$$|\tau\nabla u|^2 = \int_\Omega |\tau(x)\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \|\tau\|_{L^\infty}^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \|\tau\|_{L^\infty}^2 \|u\|^2$$

mit $u \in H_0^1(\Omega)^d$ und $\tau \in L^\infty(\Omega)^{d\times d}$. Wie oben folgt $\|\tau\|_{L^\infty} \leq C\|\tau\|_{H^2}$, falls $\tau \in H^2(\Omega)^{d\times d}$ gilt, womit wir auch die zweite Abschätzung erhalten. □

Damit haben wir die notwendigen Eigenschaften zusammen, um die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu formulieren und zu beweisen.

5.1 Globale Existenz für das Jeffreys-Modell

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt basieren auf [LM00]. Wir vernachlässigen der Einfachheit halber die Kraftdichte f, da sich unter geeigneten Voraussetzungen an f nichts an den Aussagen ändert. Für das Jeffreys-Modell ist, wie schon erwähnt, der Parameter a in der Oldroyd-Ableitung gleich Null. Damit erhalten wir aus (3.7) nach den Substitutionen $p := \frac{p}{\rho}$ und $\tau := \frac{\tau}{\rho}$ das System

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = \operatorname{div}\tau && \text{in } \Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial \tau}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\tau + \tau\cdot W(u) - W(u)\cdot\tau + \alpha\tau = \beta D(u) && \text{in } \Omega\times(0,T),\\
&\operatorname{div} u = 0 && \text{in } \Omega\times(0,T),\\
&u(0) = u_0, \quad \tau(0) = \tau_0 && \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Dabei sind α, β und ν von ρ, η, λ_1 und λ_2 abhängige positive Konstanten. Der Vorteil des Jeffreys-Modells liegt darin, dass in der Oldroyd-Ableitung der Term

$D(u)\tau + \tau D(u)$ verschwindet. Damit lässt sich eine Energiegleichung im zweidimensionalen Fall bzw. -ungleichung im dreidimensionalen Fall herleiten, die einen globalen Existenzsatz ohne weitere Voraussetzungen ermöglicht. Die Energiegleichung bzw. -ungleichung wird formal in [LM00] hergeleitet, wir stellen einen Beweis für reguläre Lösungen vor.

Satz 5.7 *Sei* $T > 0$, $(u, \tau) \in H^1(0, T; V) \times H^1(0, T; H^2(\Omega)^{d\times d})$ *eine Lösung des Systems* (5.2). *Dann gilt die Energiegleichung*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + |\tau|^2\right) + \nu\|u\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\tau|^2 = 0$$

für fast alle $t \in (0, T)$.

Beweis. Die Bewegungsgleichung, also die erste Gleichung in (5.2), testen wir mit u, die Stoffgleichung, also die zweite Gleichung in (5.2), mit τ. Alle auftretenden Terme sind aufgrund der Regularität von u und τ wohldefiniert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) + b(u,u,u) + \nu\|u\|^2 &= -\int_\Omega D(u) : \tau \; dx,\\ \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, \tau\right) + \tilde{b}(u,\tau,\tau) + \int_\Omega \Big((\tau W(u)) : \tau - (W(u)\tau) : \tau\Big)\; dx & \\ + \alpha|\tau|^2 &= \beta \int_\Omega D(u) : \tau \; dx.\end{aligned} \tag{5.3}$$

für fast alle $t \in (0, T)$. Dabei verschwinden aufgrund von Korollar 5.5 die Terme $b(u, u, u)$ und $\tilde{b}(u, \tau, \tau)$. Nun betrachten wir noch den Term $(\tau W(u)) : \tau - (W(u)\tau) : \tau$, wobei wir aus Gründen der Übersichtlichkeit statt $W(u)$ nur W schreiben. Mit zwei Indexvertauschungen folgt zunächst

$$\begin{aligned}(\tau W) : \tau - (W\tau) : \tau &= \sum_{i,j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} \tau_{ik}W_{kj}\right)\tau_{ij} - \sum_{i,j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} W_{ik}\tau_{kj}\right)\tau_{ij}\\ &= \sum_{i,j,k=1}^{d} \tau_{ij}W_{jk}\tau_{ik} - \sum_{i,j,k=1}^{d} W_{jk}\tau_{ki}\tau_{ji}.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit der Symmetrie von τ die Gleichung

$$(\tau W) : \tau - (W\tau) : \tau = \sum_{i,j,k=1}^{d} \tau_{ij}W_{jk}\tau_{ik} - \sum_{i,j,k=1}^{d} W_{jk}\tau_{ik}\tau_{ij} = 0.$$

Es ergibt sich also für die beiden in (5.3) auftretenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) + \nu\|u\|^2 &= -\int_\Omega D(u) : \tau \; dx,\\ \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, \tau\right) + \alpha|\tau|^2 &= \beta\int_\Omega D(u) : \tau \; dx.\end{aligned}$$

Division der zweiten Gleichung durch β und Summation der beiden Gleichungen liefert

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) + \nu\|u\|^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, \tau\right) + \frac{\alpha}{\beta}|\tau|^2 = 0.$$

Da $(u,\tau) \in H^1(0,T;V) \times H^1(0,T;H^2(\Omega)^{d\times d})$ gilt, können wir Lemma 2.5 auf die Terme $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)$ und $\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, \tau\right)$ anwenden und erhalten

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + |\tau|^2\right) + \nu\|u\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\tau|^2 = 0$$

für fast alle $t \in (0,T)$. Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. $\square$

Die oben hergeleitete Energiegleichung ist essentiell für den Beweis des Satzes über die globale Existenz schwacher Lösungen, durch sie erhält man unter anderem A-priori-Abschätzungen für die beim Galerkin-Verfahren auftretenden diskretisierten Lösungen. Unter gewissen Annahmen zur Konvergenz der diskretisierten Lösungen gegen eine Lösung des Systems (5.2) können daraus auch A-priori-Abschätzungen für diese Lösung hergeleitet werden.

Betrachten wir nun wieder das Oldroyd-Modell statt des Jeffreys-Modells, so ist der Parameter a in der Oldroyd-Ableitung nicht 0, sondern 1 oder -1, und der Term $D(u)\tau + \tau D(u)$ in der Oldroyd-Ableitung verschwindet nicht mehr. Dadurch ist es uns nicht mehr möglich, wie schon oben erwähnt, Energieungleichungen für diese beiden Modelle herzuleiten. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir, wie im obigen Lemma, eine Folge (u_m, τ_m) von glatten Lösungen, die in einem gewissen Sinne konvergiert. Das Problem ist dann, dass der Term $D(u_m)\tau_m + \tau_m D(u_m)$ im Gegensatz zum recht ähnlich aussehenden Term $W(u_m)\tau_m - \tau_m W(u_m)$ nicht verschwindet, wenn wir mit der Lösung testen. Wir erhalten dann den Term

$$\int_\Omega (\tau_m D(u_m)) : \tau_m + (D(u_m)\tau_m) : \tau_m \; dx.$$

Wenn beispielsweise u_m und τ_m nur schwach in gewissen Räumen konvergieren, können wir diesen Term nicht auswerten und somit an dieser Stelle keine schwache Folgenunterhalbstetigkeit der Norm oder Ähnliches ausnutzen, um den Grenzübergang durchzuführen.

Kommen wir nun zum globalen Existenzsatz für das Jeffreys-Modell, der in [LM00] zu finden ist. Wir haben die Energieungleichung nur für homogene Dirichlet-Randbedingungen bewiesen, laut [LM00, S. 132] gilt die Ungleichung und damit der folgende Satz aber auch für andere Randbedingungen, beispielsweise für den Fall, dass alle Lösungen u, τ und p periodisch sind.

Satz 5.8 *Seien $u_0 \in L^2(\Omega)^d$ mit $div\, u_0 = 0$ im distributionellen Sinne, $\tau_0 \in L^2(\Omega)^{d\times d}$. Dann existiert eine globale Lösung des Systems* (5.2) *mit*

$$\begin{aligned}
&u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_0^+; H^1(\Omega)^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+; L^2(\Omega)^d),\\
&u \in C(\mathbb{R}_0^+; L^2(\Omega)^d) \text{ für } d = 2,\\
&u \in C_w(\mathbb{R}_0^+; L^2(\Omega)^d) \text{ für } d = 3,\\
&\tau \in C(\mathbb{R}_0^+; L^2(\Omega)^{d\times d}).
\end{aligned}$$

Die Eigenschaften des Druckes haben wir hier ausgelassen, sie können, ebenso wie der Beweis des Satzes und eine genauere Beschreibung der möglichen Randbedingungen in [LM00] nachgelesen werden.

5.2 Lokale Existenz und Eindeutigkeit einer regulären Lösung für das Oldroyd-Modell

Nun wollen wir uns einigen anderen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen widmen, die nicht auf das in der Praxis weniger relevante Jeffreys-Modell beschränkt sind. Daher können wir die Energieungleichungen aus dem letztem Abschnitt nicht mehr nutzen. Die Ergebnisse und die Beweise in den folgenden beiden Abschnitten basieren hauptsächlich auf [GS90a], sie sind aber ebenfalls in [FCGO02, Kapitel 2.14] zu finden. Ein paar Details sind von dort entnommen.

Wir betrachten wieder das System (3.8). Für die folgenden Sätze genügt es, $a \in [-1, 1]$ zu fordern. Damit gelten unsere Ergebnisse insbesondere für das Oldroyd-B- und das Oldroyd-A-Modell. Zur Vereinfachung der Notation benutzen wir im Folgenden den Raum $D(A) = V \cap H^2(\Omega)^d$, den Definitionsbereich des Stokes-Operators. Der erste Satz liefert uns die lokale Existenz einer regulären Lösung des Problems.

Satz 5.9 *Seien $\partial\Omega \in C^3$, $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+_0; H^1(\Omega)^d)$, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+_0; H^{-1}(\Omega)^d)$, $u_0 \in D(A)$ und $\tau_0 \in H^2(\Omega)^{d\times d}$. Dann existieren ein $T^* > 0$ und (u, τ, p) mit*

$$\begin{aligned}
&u \in L^2(0, T^*; H^3(\Omega)^d) \cap C([0, T^*]; D(A)),\\
&\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T^*; V) \cap C([0, T^*]; H),\\
&\tau \in C([0, T^*]; H^2(\Omega)^{d\times d}),\ \frac{\partial \tau}{\partial t} \in C([0, T^*]; H^1(\Omega)^{d\times d}),\\
&p \in L^2(0, T^*; H^2(\Omega)),
\end{aligned}$$

so dass u, p und τ das Problem (3.8) lösen.

Beweisskizze. Der Beweis wird mithilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes geführt. Dafür definieren wir für $T > 0$, $B_1 > 0$ und $B_2 > 0$ die Menge

$$\begin{aligned}
R_T = \Big\{(u, \tau) \mid\ & u \in C([0, T]; D(A)) \cap L^2(0, T; H^3(\Omega)^d),\\
&\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V), \tau \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^{d\times d}),\\
&\frac{\partial \tau}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^{d\times d}), u(0) = u_0, \tau(0) = \tau_0 \text{ in } \Omega,\\
&\|u\|^2_{L^\infty(0,T;D(A))\cap L^2(0,T;H^3(\Omega)^d)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)} \le B_1,\\
&\|\tau\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^{d\times d})} \le B_1, \left\|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)^{d\times d})} \le B_2 \Big\}.
\end{aligned}$$

Weiter definieren wir uns den Fixpunktoperator

$$\begin{aligned}&\phi\colon R_T \to C([0,T];V) \times C([0,T];H^1(\Omega)^d),\\&\phi(\tilde{u},\tilde{\tau}) = (u,\tau),\end{aligned}$$

wobei u und τ die eindeutigen Lösungen des folgenden Systems sind:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial t} - (1-\omega)\Delta u + \nabla p = -\mathrm{Re}\,(\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u} + \operatorname{div}\tilde{\tau} + f && \text{in } \Omega\times(0,T),\\&\tau + \mathrm{We}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\tilde{u}\cdot\nabla)\tau + g(\tau,\tilde{u})\right) = 2\omega D(\tilde{u}) && \text{in } \Omega\times(0,T),\\&\operatorname{div} u = 0 && \text{in } \Omega\times(0,T),\\&u(0) = u_0, \quad \tau(0) = \tau_0 && \text{in } \Omega.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Die erste Gleichung ist das Stokes-Problem mit der rechten Seite $-\mathrm{Re}\,(\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u}$ $+ \operatorname{div}\tilde{\tau} + f$. Der Vorteil davon ist, dass es bereits viele Ergebnisse für die Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Lösungen des Stokes-Problems gibt. Damit kann gezeigt werden, dass ϕ kompakt ist und für T hinreichend klein $\phi(R_T) \subset R_T$ gilt. R_T erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Schauderschen Fixpunktsatzes. Demnach existiert mindestens ein Fixpunkt von ϕ. Dieser ist offensichtlich eine Lösung unseres Problems.

Der ausführliche Beweis des Satzes 5.9 und der Eindeutigkeit der Lösung des Systems (5.4) lassen sich in [GS90a, Satz 2.4] nachlesen. Die Eigenschaft $\frac{\partial \tau}{\partial t} \in C([0,T^*];H^1(\Omega)^{d\times d})$ wird dort nicht angegeben, sie folgt aber sofort aus [GS90a, Lemma 2.3]. □

Zusammen mit dem obigen Satz erhalten wir aus dem folgenden Satz die lokale Existenz einer eindeutigen regulären Lösung. Fordern wir weniger Regularität für die Lösung, so gibt es eventuell mehrere Lösungen. Der Satz ist unter anderem in [GS90a, Satz 2.5] zu finden, wir stellen eine Ausarbeitung des dortigen Beweises vor.

Satz 5.10 *Sei $T > 0$. Dann hat das Problem (3.8) höchstens eine Lösung (u,τ,p) mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned}u &\in L^2(0,T;H^3(\Omega)^d) \cap C([0,T];D(A)),\\\frac{\partial u}{\partial t} &\in L^2(0,T^*;V) \cap C([0,T^*];H),\\\tau &\in C([0,T];H^2(\Omega)^{d\times d}),\ \frac{\partial \tau}{\partial t} \in C([0,T];H^1(\Omega)^{d\times d}).\end{aligned}$$

Der Druck p ist, bis auf eine Konstante, in $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir betrachten die Differenz von zwei Lösungen u_1, τ_1, p_1 und u_2, τ_2, p_2 mit den obigen Eigenschaften und definieren $u := u_1 - u_2$, $\tau := \tau_1 - \tau_2$ sowie $p := p_1 - p_2$.

Diese Differenz löst das Problem

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u_1 \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)u_2\right) - (1-\omega)\Delta u + \nabla p = \operatorname{div}\tau \quad \text{in } \Omega \times (0,T),\\
&\mathrm{We}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + (u_1 \cdot \nabla)\tau + (u \cdot \nabla)\tau_2 + g(\tau_1, u) + g(\tau, u_2)\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \tau = 2\omega D(u) \quad \text{in } \Omega \times (0,T),\\
&u(0) = 0, \quad \tau(0) = 0 \quad \text{in } \Omega,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

wie man durch leichtes Nachrechnen unter Verwendung der Bilinearität von $(u, v) \mapsto (u \cdot \nabla)v$ und g zeigt. Wir wollen nun erneut eine Energieungleichung herleiten. Dazu bilden wir zunächst das $L^2(\Omega)^d$-Skalarprodukt der ersten Gleichung mit u und das $L^2(\Omega)^{d\times d}$-Skalarprodukt der zweiten Gleichung mit $\frac{\tau}{2\omega}$. Alle auftretenden Terme sind wohldefiniert, da $u(t) \in H^3(\Omega)^d$, $\frac{\partial u(t)}{\partial t} \in V$, $\tau(t) \in H^2(\Omega)^{d\times d}$ und $\frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \in H^1(\Omega)^{d\times d}$ für fast alle $t \in (0,T)$ gilt. Der Druck verschwindet wieder aufgrund der Divergenzfreiheit von u. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) + b(u_1, u, u) + b(u, u_2, u)\right) + (1-\omega)(\!(u, u)\!) = -(D(u), \tau),\\
&\frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left(\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, \tau\right) + \tilde{b}(u_1, \tau, \tau) + \tilde{b}(u, \tau_2, \tau) + (g(\tau_1, u), \tau) + (g(\tau, u_2), \tau)\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2\omega}(\tau, \tau) = (D(u), \tau)
\end{aligned}
$$

für fast alle $t \in (0,T)$. Nach Korollar 5.5 verschwinden $b(u_1, u, u)$ und $\tilde{b}(u_1, \tau, \tau)$. Weiterhin gilt nach Lemma 2.5 die Identität $(\frac{\partial u}{\partial t}, u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2$, da $u \in C([0,T]; D(A))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T]; H)$ und damit $u \in H^1(0,T; L^2(\Omega)^d)$ gilt. Dieselbe Identität erhalten wir mit Lemma 2.5 für den Term $\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, \tau\right)$, da $\tau \in C([0,T]; H^2(\Omega)^{d\times d})$, $\frac{\partial \tau}{\partial t} \in C([0,T]; H^1(\Omega)^{d\times d})$ und damit $\tau \in H^1(0,T; L^2(\Omega)^{d\times d})$ gilt. Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + b(u, u_2, u)\right) + (1-\omega)\|u\|^2 = -(D(u), \tau),\\
&\frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tau|^2 + \tilde{b}(u, \tau_2, \tau) + (g(\tau_1, u), \tau) + (g(\tau, u_2), \tau)\right) + \frac{1}{2\omega}|\tau|^2 = (D(u), \tau).
\end{aligned}
$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}|u|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}|\tau|^2\right) + (1-\omega)\|u\|^2 + \frac{1}{2\omega}|\tau|^2\\
&= -\mathrm{Re}\, b(u, u_2, u) - \frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left(\tilde{b}(u, \tau_2, \tau) + (g(\tau_1, u) + g(\tau, u_2), \tau)\right).
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Wir wollen die rechte Seite dieser Gleichung abschätzen. Dazu formen wir zunächst den Term $\tilde{b}(u, \tau_2, \tau)$ um:

$$
\begin{aligned}
\tilde{b}(u, \tau_2, \tau) &= \tilde{b}(u, \tau_2, \tau_1) - \tilde{b}(u, \tau_2, \tau_2) = \tilde{b}(u, \tau_2, \tau_1) = -\tilde{b}(u, \tau_1, \tau_2)\\
&= \tilde{b}(u, \tau_1, \tau_1) - \tilde{b}(u, \tau_1, \tau_2) = \tilde{b}(u, \tau_1, \tau),
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder die Schiefsymmetrie von $\tilde{b}$ benutzt haben. Aus den Eigenschaften von b bzw. $\tilde{b}$ und g, siehe Lemma 5.2 und Lemma 5.6, erhalten wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&|b(u, u_2, u)| \leq C\|u_2\|_{H^3}|u|^2, \\
&|g(\tau, u_2)| \leq C\|u_2\|_{H^3}|\tau|, \\
&|\tilde{b}(u, \tau_1, \tau) + (g(\tau_1, u), \tau)| \leq C\|\tau_1\|_{H^2}\|u\|\,|\tau|,
\end{aligned}$$

mit einer von u und τ unabhängigen Konstanten $C > 0$. Auf die rechte Seite der letzten Abschätzung wenden wir die Ungleichung $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ [Emm04, Satz A.1.1] an, die einen Spezialfall der Youngschen Ungleichung darstellt, wobei wir ε durch $\frac{\varepsilon}{C}$ ersetzen. Dann gilt

$$|\tilde{b}(u, \tau_1, \tau) + (g(\tau_1, u), \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \frac{C^2}{2\varepsilon}\|\tau_1\|_{H^2}^2|\tau|^2.$$

Damit können wir die rechte Seite von (5.6) abschätzen und es folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}|u|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}|\tau|^2\right) + (1-\omega)\|u\|^2 + \frac{1}{2\omega}|\tau|^2 \\
\leq &C\,\mathrm{Re}\|u_2\|_{H^3}|u|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left(C\|u_2\|_{H^3}|\tau|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \frac{C^2}{2\varepsilon}\|\tau_1\|_{H^2}^2|\tau|^2\right).
\end{aligned}$$

Wir bringen den Term $\frac{\mathrm{We}}{2\omega}\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2$ auf die andere Seite und schätzen auf der rechten Seite weiter ab, indem wir den Term $\frac{C^2}{2\varepsilon}\mathrm{Re}\|\tau_1\|_{H^2}^2|u|^2$ dazu addieren. Wir erhalten die Energieungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}|u|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}|\tau|^2\right) + (1-\omega)\left(1 - \frac{\mathrm{We}}{4\omega(1-\omega)}\,\varepsilon\right)\|u\|^2 + \frac{1}{2\omega}|\tau|^2 \\
\leq &C\,\mathrm{Re}\|u_2\|_{H^3}|u|^2 + C\frac{\mathrm{We}}{2\omega}\|u_2\|_{H^3}|\tau|^2 + \frac{C^2}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{We}}{2\omega}\|\tau_1\|_{H^2}^2|\tau|^2 + \frac{C^2}{2\varepsilon}\,\mathrm{Re}\|\tau_1\|_{H^2}^2|u|^2 \\
= &\left(C\|u_2\|_{H^3} + \frac{C^2}{2\varepsilon}\|\tau_1\|_{H^2}^2\right)\left(\mathrm{Re}|u|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}|\tau|^2\right)
\end{aligned}$$

für fast alle $t \in (0, T)$. Da $u, u_2 \in L^2(0, T; H^3(\Omega)^d)$ und $\tau, \tau_1 \in C([0, T]; H^2(\Omega)^{d\times d})$ gilt, folgt

$$c_\varepsilon := 2\left(C\|u_2\|_{H^3} + \frac{C^2}{2\varepsilon}\|\tau_1\|_{H^2}^2\right) \in L^1(0, T)$$

sowie

$$-2(1-\omega)\left(1 - \frac{\mathrm{We}}{4\omega(1-\omega)}\,\varepsilon\right)\|u\|^2 - \frac{1}{\omega}|\tau|^2 \in L^1(0, T).$$

Außerdem gilt $\mathrm{Re}|u|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}|\tau|^2 \in W^{1,1}(0, T)$, da $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega)^d)$ und $\tau \in H^1(0, T; L^2(\Omega)^{d\times d})$ gilt, wie wir bereits gezeigt haben.

Damit können wir das Lemma von Gronwall [Emm04, Lemma 7.3.2] anwenden und erhalten mit $u(0) = 0$ und $\tau(0) = 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,|u(t)|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}\,|\tau(t)|^2 \\
\leq &\int_0^t \exp\left(\int_s^t c_\varepsilon(\xi)\,d\xi\right)\left(-2(1-\omega)\left(1 - \frac{\mathrm{We}}{4\omega(1-\omega)}\,\varepsilon\right)\|u(s)\|^2 - \frac{1}{\omega}|\tau(s)|^2\right)ds
\end{aligned}$$

für fast alle $t \in (0,T)$. Da die Weissenbergzahl We, ω und $1-\omega$ positiv sind, gilt für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein $-2(1-\omega)\left(1 - \frac{\mathrm{We}}{4\omega(1-\omega)}\varepsilon\right)\|u(s)\|^2 - \frac{1}{\omega}|\tau(s)|^2 \le 0$. Also folgt $u = 0$ und $\tau = 0$ und demnach $u_1 = u_2$ sowie $\tau_1 = \tau_2$ in $\Omega \times (0,T)$. Setzen wir $u = 0$ und $\tau = 0$ noch in die erste Gleichung in 5.5 ein, so erhalten wir $\nabla p = 0$ bzw. $\nabla p_1 = \nabla p_2$ in $\Omega \times (0,T)$. Damit ist der Druck bis auf eine Konstante ebenfalls eindeutig bestimmt. □

5.3 Globale Existenz und Eindeutigkeit einer regulären Lösung bei kleinen Daten für das Oldroyd-Modell

Wir betrachten weiterhin das Problem (3.8) und wollen die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt auf globale Existenz und Eindeutigkeit erweitern. Dazu benötigen wir eine A-priori-Abschätzung für die lokale Lösung aus Satz 5.9. Diese Abschätzung wollen wir hier jedoch nicht herleiten, da der Beweis sehr lang und technisch ist. Er kann in [GS90a, S. 859-861] nachgelesen werden. Am Ende erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}}\|u\|^2 + \mathrm{Re}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}^3}\frac{(1-\omega)^3}{3C_1\omega^2}\|\tau\|_{H^2}^2\right) \\
&\qquad + \frac{C_2(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}^2}\|u\|_{H^2}^2 + \frac{3}{8}(1-\omega)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|^2 + \frac{1-\omega}{48\,\mathrm{Re}^2}\|\tau\|_{H^2}^2 \\
&\le \frac{2}{1-\omega}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_{H^{-1}}^2 + \frac{31}{48}\frac{1-\omega}{\mathrm{Re}^2}\|f\|_{H^1}^2 + \frac{160C_3}{(1-\omega)^3}|f|^4 \\
&\qquad + C_4\left(\frac{\mathrm{Re}^2}{(1-\omega)^3}\left(\mathrm{Re}^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^4 + \frac{\mathrm{We}^2}{\omega^2}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|^4\right) + \frac{1}{(1-\omega)^3}\|\tau\|_{H^1}^4\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{We}^2}{\mathrm{Re}^2}\frac{(1-\omega)^3}{\omega^4}\|\tau\|_{H^2}^4 + \frac{\mathrm{Re}^2}{1-\omega}\|u\|^6 + \frac{\mathrm{Re}^8}{(1-\omega)^7}\|u\|^{12}\right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

für fast alle $t \in (0,T)$ mit positiven Konstanten $C_1, \ldots, C_4$, die nur von Ω, b, $\tilde{b}$ und g abhängen. Dabei ist zu beachten, dass die in [GS90a] verwendete Norm $|A\,\cdot\,|$ äquivalent zur $H^2(\Omega)^d$-Norm ist [GS90a, S. 852]. Die Wohldefiniertheit der auftretenden Ableitungen folgt aus der absoluten Stetigkeit von $\|u\|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|$, $\|\tau\|_{H^2}$ und $\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|$ in den entsprechenden Räumen, die wir im Beweis des nächsten Satzes zeigen werden.

Die A-priori-Abschätzung gilt allerdings nicht für beliebige $0 < \omega < 1$, sondern nur für alle $0 < \omega < \omega_0 < 1$, wobei ω_0 so gewählt ist, dass $3C_0(\frac{\omega}{1-\omega})^2 < \frac{1}{2}$ für alle $0 < \omega < \omega_0$ mit einer nur von Ω abhängigen positiven Konstanten C_0 gilt. Damit ist auch ω_0 nur von Ω abhängig. Die Bedingung bedeutet wegen $\omega = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, dass der Term $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ und damit der newtonsche Anteil $2\eta\frac{\lambda_1}{\lambda_2}D(u)$ der Reibungsspannungen σ hinreichend groß ist. Das betrachtete Fluid muss also einen gewissen Anteil an newtonscher Viskosität aufweisen [GS90a, S. 863].

Für den Beweis des Satzes für die globale Existenz und Eindeutigkeit benötigen wir außerdem noch ein Lemma, das wir zunächst beweisen wollen. Der Beweis stellt eine Ausarbeitung des Beweises von [GS90a, Lemma 3.1] dar.

Lemma 5.11 *Es sei $T > 0$ und $Y\colon [0,T) \to \mathbb{R}_0^+$ absolut stetig mit*

$$Y' + \gamma Y \leq \alpha(Y^2 + Y^3 + Y^6) + \beta \tag{5.8}$$

für fast alle $t \in (0,T)$ mit positiven Konstanten γ, α und β. Weiterhin existiere ein M mit $0 < M < M_0$, wobei M_0 die eindeutige positive Lösung von $M^5 + M^2 + M - \frac{\gamma}{2\alpha} = 0$ sei. Falls $Y(0) \leq M$ und $\beta \leq \frac{\gamma}{2}M$ gilt, so ist $Y(t)$ beschränkt durch M für alle $t \in [0,T)$.

Bemerkung. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^2 + x - c$ mit $c > 0$ besitzt genau eine positive Nullstelle x_0, da f stetig auf $\mathbb{R}$ sowie für $x > 0$ streng monoton wachsend ist und $f(0) = -c < 0$ gilt. Wir erhalten damit sofort, dass $f(x)$ negativ für alle $0 < x < x_0$ ist.

Beweis von Lemma 5.11. Wir nehmen an, die Aussage gilt nicht. Dann existiert ein $t \in [0,T)$ mit $Y(t) > M$. Mit $t^* := \inf\{t \in [0,T) \mid Y(t) > M\}$ folgt aus der absoluten Stetigkeit $Y(t^*) = M$. Falls Y im Punkt t^* differenzierbar ist, folgt außerdem $Y(t^*) \geq 0$. Dann gilt nach (5.8) die Ungleichung

$$0 \leq Y'(t^*) \leq -\gamma Y(t^*) + \alpha(Y^2(t^*) + Y^3(t^*) + Y^6(t^*)) + \beta.$$

Falls Y in t^* nicht differenzierbar ist, so existiert zumindest eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (t^*,T)$ mit $t_n \to t^*$ von Punkten, in denen Y differenzierbar ist. Damit ist $Y'(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Außerdem existiert nach Definition von t^* ein $n_0 > 0$, so dass $Y'(t_n) > 0$ für alle $n > n_0$ gilt, da dann alle t_n mit $n > n_0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung um t^* liegen. Aus (5.8) erhalten wir

$$0 < Y'(t_n) \leq -\gamma Y(t_n) + \alpha(Y^2(t_n) + Y^3(t_n) + Y^6(t_n)) + \beta$$

für alle $n > n_0$. Der Grenzübergang n gegen Unendlich liefert

$$0 \leq -\gamma Y(t^*) + \alpha(Y^2(t^*) + Y^3(t^*) + Y^6(t^*)) + \beta$$

aufgrund der Stetigkeit von Y. In beiden Fällen erhalten wir demnach mit $Y(t^*) = M$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\gamma M + \alpha(M^2 + M^3 + M^6) + \frac{\gamma}{2}M \\ &\leq \alpha M(-\frac{\gamma}{2\alpha} + M + M^2 + M^5). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Andererseits folgt mit der obigen Bemerkung nach Definition von M_0 die Ungleichung $-\frac{\gamma}{2\alpha} + M + M^2 + M^5 < 0$, da $0 < M < M_0$ gilt. Dies ergibt einen Widerspruch zu (5.9). Damit ist $Y(t)$ beschränkt durch M für alle $t \in [0,T)$. □

Der folgende Satz ist in [GS90a, Satz 3.3] zu finden. Wir werden ihn nicht vollständig beweisen, sondern nur für Teile des Beweises eine Beweisskizze angeben.

Satz 5.12 *Sei $\partial\Omega \in C^4$. Dann existiert ein von Ω abhängiges ω_0 mit $0 < \omega_0 < 1$ und der folgenden Eigenschaft: Falls $0 < \omega < \omega_0$ gilt und $u_0 \in D(A)$, $\tau_0 \in H^2(\Omega)^{d\times d}$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}_0^+; H^1(\Omega)^d)$ sowie $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}_0^+; H^{-1}(\Omega)^d)$ hinreichend klein in den zugehörigen Räumen sind, so hat das Problem (3.8) genau eine Lösung (u, τ, p), die für alle $t > 0$ existiert. Außerdem gilt für diese Lösung*

$$\begin{aligned} u &\in C_b(\mathbb{R}_0^+; D(A)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_0^+; H^3(\Omega)^d), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in C_b(\mathbb{R}_0^+; H) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_0^+; V), \\ \tau &\in C_b(\mathbb{R}_0^+; H^2(\Omega)^{d\times d}), \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &\in C_b(\mathbb{R}_0^+; H^1(\Omega)^{d\times d}), \\ p &\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_0^+; H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Beweisskizze. Wir zeigen nur die globale Existenz und Eindeutigkeit, der Beweis der weiteren Eigenschaften von u und τ kann in [GS90a, Satz 3.3] nachgelesen werden. Der Druck wird dort nicht betrachtet, seine Regularität folgt aber sofort aus [GS90a, Lemma 2.2], sobald man die Eigenschaften von u und τ gezeigt hat.

Aus Satz 5.9 folgt zunächst die Existenz einer lokalen Lösung (u, τ) des Systems (3.8). Wir betrachten die maximale Fortsetzung dieser Lösung, die bis zur Zeit $T^* > 0$ existiere, wobei wir $T^* = \infty$ zulassen. Für die maximal fortgesetzte Lösung gilt die A-priori-Abschätzung (5.7), falls wir ω_0 hinreichend klein wählen. Dies ist immer möglich, wie wir an der Definition von ω_0 zu Beginn dieses Abschnitts erkennen können. Wir definieren $Y\colon [0, T^*) \to \mathbb{R}$ durch

$$Y(t) := \frac{(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}} \|u(t)\|^2 + \mathrm{Re} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega} \left| \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}^3} \frac{(1-\omega)^3}{3C_1\omega^2} \|\tau(t)\|^2_{H^2}.$$

Für dieses Y werden wir die Voraussetzungen des obigen Lemmas 5.11 und damit die Beschränktheit von $\|u(t)\|$, $\left|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right|$, $\|\tau(t)\|_{H^2}$ sowie $\left|\frac{\partial \tau(t)}{\partial t}\right|$ für alle $t \in [0, T^*)$ zeigen. Somit kommt es zu keinem Blow-up der Lösung. In [FCGO02, S. 591] wird behauptet, dass dann mit einem Fortsetzungsargument $T^* = \infty$ und damit die globale Existenz folgt. Dieses Fortsetzungsargument ist jedoch sehr aufwendig, daher werden wir es hier auslassen.

Wir beginnen mit der absoluten Stetigkeit von Y. Es sei $0 < T < T^*$ beliebig. Da nach dem lokalen Existenzsatz $u \in C([0, T]; D(A))$ und $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V)$ gilt, folgt $u \in W^{1,1}(0, T; V)$. Nach Lemma 2.1 ist u absolut stetig mit Werten in V. Weiterhin folgt mit Lemma 2.6, dass $t \mapsto \|u(t)\|$ und damit $t \mapsto \|u(t)\|^2$ absolut stetig als Funktion von $[0, T]$ nach $\mathbb{R}_0^+$ ist. In [FCGO02, S. 586] wird gezeigt, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, T; V^*)$ gilt, da u ein Stokes-Problem mit genügend regulärer rechter Seite löst, wie wir im Beweis der lokalen Existenz gesehen haben. Zusammen mit $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V)$ folgt $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{W}(0, T)$, also nach Lemma 2.4 die absolute Stetigkeit von $t \mapsto \left|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right|^2$ als Funktion von $[0, T]$ nach $\mathbb{R}_0^+$. In [FCGO02, S. 590] wird behauptet, dass $t \mapsto \|\tau\|^2_{H^2}$ und $t \mapsto \left|\frac{\partial \tau(t)}{\partial t}\right|^2$ absolut stetig als Funktionen von $[0, T]$ nach $\mathbb{R}_0^+$

sind[8]. Falls τ als Funktion auf $[0,T]$ mit Werten in $H^2(\Omega)^{d\times d}$ absolut stetig ist, so folgt daraus auch die absolute Stetigkeit von $\frac{\partial\tau}{\partial t}$ als Funktion auf $[0,T]$ mit Werten in $L^2(\Omega)^{d\times d}$. Um dies zu beweisen, stellen wir die Stoffgleichung in (3.8) nach $\frac{\partial\tau}{\partial t}$ um. Dies ergibt nach Einsetzen der Oldroyd-Ableitung

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = -(u\cdot\nabla)\tau - g(\tau,u) + \frac{1}{\mathrm{We}}\left(-\tau + 2\omega D(u)\right). \tag{5.10}$$

Da u absolut stetig mit Werten in V und τ absolut stetig mit Werten in $H^2(\Omega)^{d\times d}$ ist, ist der Term $\frac{1}{\mathrm{We}}(-\tau+2\omega D(u))$ absolut stetig mit Werten in $L^2(\Omega)^{d\times d}$. Seien nun $t_1, t_2 \in [0,T]$ beliebig. Wir betrachten zunächst den Term $(u\cdot\nabla)\tau$. Mit den in Korollar 5.3 bewiesenen Eigenschaften von $\tilde{B}$ gilt

$$\begin{aligned}
&|(u(t_2)\cdot\nabla)\tau(t_2) - (u(t_1)\cdot\nabla)\tau(t_1)| \\
=&|(u(t_2)\cdot\nabla)\tau(t_2) - (u(t_1)\cdot\nabla)\tau(t_2) + (u(t_1)\cdot\nabla)\tau(t_2) - (u(t_1)\cdot\nabla)\tau(t_1)| \\
\leq&|((u(t_2)-u(t_1))\cdot\nabla)\tau(t_2)| + |(u(t_1)\cdot\nabla)(\tau(t_2)-\tau(t_1))| \\
\leq&C\|u(t_2)-u(t_1)\|\,\|\tau(t_2)\|_{H^2} + C\|u(t_1)\|\,\|\tau(t_2)-\tau(t_1)\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Aus der absoluten Stetigkeit von u und τ folgt

$$\begin{aligned}
&|(u(t_2)\cdot\nabla)\tau(t_2) - (u(t_1)\cdot\nabla)\tau(t_1)| \\
\leq&C\|u(t_2)-u(t_1)\|\max_{t\in[0,T]}\|\tau(t)\|_{H^2} + C\|\tau(t_2)-\tau(t_1)\|_{H^2}\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\| \\
\leq&C(\|u(t_2)-u(t_1)\| + \|\tau(t_2)-\tau(t_1)\|_{H^2}),
\end{aligned}$$

wobei wir C hier als generische Konstante verwenden. Aus der letzten Ungleichung erhalten wir die absolute Stetigkeit von $(u\cdot\nabla)\tau$ mit Werten in $L^2(\Omega)^{d\times d}$, da u und τ absolut stetig in den entsprechenden Räumen sind. Den noch nicht untersuchten Term $g(\tau,u)$ in (5.10) können wir aufgrund der in Lemma 5.6 gezeigten Abschätzung $|g(\tau,u)| \leq C\|\tau\|_{H^2}\|u\|$ und der Bilinearität von g völlig analog wie $(u\cdot\nabla)\tau$ behandeln. Damit ist auch dieser Term absolut stetig mit Werten in $L^2(\Omega)^{d\times d}$ und wir erhalten mit (5.10) dieselbe Aussage für $\frac{\partial\tau}{\partial t}$.

Wir erhalten also die absolute Stetigkeit der benötigten Terme auf $[0,T]$ für jedes $0 < T < T^*$. Damit folgt aber auch die absolute Stetigkeit von Y auf $[0,T^*)$.

---

[8] Im Beweis von [GS90a, Lemma 2.3] wird für τ die Integraldarstellung

$$\tau(x,t) = \tau_0(X_c(x,0;t)) + \int_0^t \left(\frac{1}{\mathrm{We}}(2D(u)-\tau) - g(\tau,u)\right)(X_c(x,s;t),s)\,ds$$

für fast alle $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$ angegeben, wobei x_c die Lösung des Problems

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X_c(x,t;s) &= u(X_c(x,t;s),t) \quad \text{in } \Omega\times(0,T), \\
X_c(x,s;s) &= x \quad \text{in } \Omega
\end{aligned}$$

ist. Zeigt man nun, dass der Term unter dem Integral in der obigen Darstellung für τ in $L^1(0,T;H^2(\Omega)^{d\times d})$ liegt, so erhält man sogar die absolute Stetigkeit von τ als Funktion auf $[0,T]$ mit Werten in $H^2(\Omega)^{d\times d}$ aus Lemma 2.1, da bereits $\tau \in C([0,T];H^2(\Omega)^{d\times d})$ nach dem lokalen Existenzsatz (Satz 5.9) gilt.

Nun werden wir zeigen, dass Y die Ungleichung (5.8) erfüllt. Zunächst folgen aufgrund der stetigen Einbettung von V in H sowie der Definition der Normen von $H^2(\Omega)^d$ und V die Abschätzungen $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \le c \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|$ mit einer von Ω abhängigen positiven Konstanten c sowie $\|u\| \le \|u\|_{H^2}$. Nach der Definition von Y erhalten wir mit diesen beiden Abschätzungen

$$\gamma Y \le \frac{C_2(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}^2}\|u\|_{H^2}^2 + \frac{3}{8}(1-\omega)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|^2 + \frac{1-\omega}{48\,\mathrm{Re}^2}\|\tau\|_{H^2}^2$$

mit der Konstanten C_2 aus der A-priori-Abschätzung (5.7) und einer von Ω, ω, Re und We abhängigen positiven Konstanten γ. Es folgt

$$\begin{aligned} Y' + \gamma Y \le \frac{d}{dt}&\left(\frac{(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}}\|u\|^2 + \mathrm{Re}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}^3}\frac{(1-\omega)^3}{3C_1\omega^2}\|\tau\|_{H^2}^2\right) \\ &+ \frac{C_2(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}^2}\|u\|_{H^2}^2 + \frac{3}{8}(1-\omega)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|^2 + \frac{1-\omega}{48\,\mathrm{Re}^2}\|\tau\|_{H^2}^2 \end{aligned}$$

für fast alle $t \in (0,T)$. Weiterhin erhalten wir wieder aufgrund der Definition der Normen von $H^2(\Omega)^{d\times d}$ und $H^1(\Omega)^{d\times d}$ die Abschätzung $\|\tau\|_{H^1} \le \|\tau\|_{H^2}$ und damit wieder nach Definition von Y die Ungleichung

$$\begin{aligned} C_4\Bigg(\frac{\mathrm{Re}^2}{(1-\omega)^3}&\left(\mathrm{Re}^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^4 + \frac{\mathrm{We}^2}{\omega^2}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|^4\right) \\ &+\frac{1}{(1-\omega)^3}\|\tau\|_{H^1}^4 + \frac{\mathrm{We}^2}{\mathrm{Re}^2}\frac{(1-\omega)^3}{\omega^4}\|\tau\|_{H^2}^4\Bigg) \le \alpha Y^2 \end{aligned}$$

mit der Konstanten C_4 aus der A-priori-Abschätzung (5.7) und einem von Ω, ω, Re und We abhängigen α. Wenn wir α hinreichend groß wählen, gelten ebenso die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Re}^2}{1-\omega}\|u\|^6 &\le \alpha Y^3, \\ \frac{\mathrm{Re}^8}{(1-\omega)^7}\|u\|^{12} &\le \alpha Y^6. \end{aligned}$$

Schließlich folgt mit

$$\begin{aligned} \beta = \frac{2}{1-\omega}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_0^+;H^{-1}(\Omega)^d)}^2 &+ \frac{31}{48}\frac{1-\omega}{\mathrm{Re}^2}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_0^+;H^1(\Omega)^d)}^2 \\ &+ \frac{160C_3}{(1-\omega)^3}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_0^+;L^2(\Omega)^d)}^4 \end{aligned}$$

und den obigen Abschätzungen sowie der A-priori-Abschätzung (5.7) die Ungleichung

$$Y' + \gamma Y \le \alpha(Y^2 + Y^3 + Y^6) + \beta$$

für fast alle $t \in (0,T)$. Da Y offensichtlich nichtnegativ ist, bleibt also nur noch zu zeigen, dass $Y(0) \le M$ sowie $\beta \le \frac{\gamma}{2}M$ für ein $0 < M < M_0$ gilt, wobei M_0 die eindeutige positive Lösung von $M^5 + M^2 + M - \frac{\gamma}{2\alpha} = 0$ ist. Die zweite Ungleichung folgt sofort, wenn wir f in $L^\infty(\mathbb{R}_0^+; H^1(\Omega)^d)$ und $\frac{\partial f}{\partial t}$ in $L^\infty(\mathbb{R}_0^+; H^{-1}(\Omega)^d)$ hinreichend klein wählen. Um die erste Ungleichung zu erhalten, führen wir die sogenannte Leray-Projektion P, die Orthogonalprojektion von $L^2(\Omega)^d$ auf H, ein[9]. Diese Projektion wenden wir auf die Bewegungsgleichung, also die erste Gleichung in (3.8) an. Damit erhalten wir

$$\mathrm{Re}\left(P\,\frac{\partial u}{\partial t} + P\,(u\cdot\nabla)\,u\right) - (1-\omega)P\,\Delta u + P\,\nabla p = P\,(\operatorname{div}\tau + f)\,. \tag{5.11}$$

Da $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T]; H)$ gilt, ergibt sich $P\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Außerdem verschwindet der Term $P\,\nabla p$, da das orthogonale Komplement $H^\perp$ von H durch

$$H^\perp = \left\{u \in L^2(\Omega)^d \;\middle|\; \exists\, q \in H^1(\Omega) : u = \nabla q\right\}$$

gegeben ist. Der Beweis dieser Darstellung von $H^\perp$ ist in [Tem01, Satz 1.4] zu finden. Insgesamt erhalten wir aus (5.11) für die Bewegungsgleichung

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + P\,(u\cdot\nabla)\,u\right) - (1-\omega)P\,\Delta u = P\,(\operatorname{div}\tau + f)\,.$$

Diese Gleichung stellen wir nach $\frac{\partial u}{\partial t}$ um, die zweite Gleichung in (3.8) nach $\frac{\partial \tau}{\partial t}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -P\,(u\cdot\nabla)\,u + \frac{1}{\mathrm{Re}}P\,((1-\omega)\Delta u + \operatorname{div}\tau + f)\,,\\
\frac{\partial \tau}{\partial t} &= -(u\cdot\nabla)\tau - (\tau W(u) - W(u)\tau)\\
&\qquad\qquad + a(D(u)\tau + \tau D(u)) + \frac{1}{\mathrm{We}}\,(-\tau + 2\omega D(u))
\end{aligned}$$

in $\Omega \times (0, T^*)$. Da alle Terme auf $[0, T^*)$ stetig sind, können wir $t = 0$ einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(0) &= -P\,(u_0\cdot\nabla)\,u_0 + \frac{1}{\mathrm{Re}}P\,((1-\omega)\Delta u_0 + \operatorname{div}\tau_0 + f(0))\,,\\
\frac{\partial \tau}{\partial t}(0) &= -(u_0\cdot\nabla)\tau_0 - g(\tau_0, u_0) + \frac{1}{\mathrm{We}}\,(-\tau_0 + 2\omega D(u_0))\,,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei wir an die Definition von $g(\tau, u) = \tau W(u) - W(u)\tau - a(D(u)\tau + \tau D(u))$ erinnern. Nun können wir auch die Abschätzung $Y(0) \le M$ für hinreichend kleine Daten zeigen. Es gilt

$$Y(0) = \frac{(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}}\|u(0)\|^2 + \mathrm{Re}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}(0)\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}^3}\frac{(1-\omega)^3}{3C_1\omega^2}\|\tau(0)\|_{H^2}^2.$$

Mit $u(0) = u_0$ und $\tau(0) = \tau_0$ können wir den ersten und den vierten Term jeweils durch $\frac{M}{4}$ abschätzen, falls wir u_0 in V und τ_0 in $H^2(\Omega)^{d\times d}$ hinreichend klein wählen. Für $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right|$ erhalten wir aus (5.12) die Abschätzung

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right| \le |P\,(u_0\cdot\nabla)\,u_0| + \frac{1}{\mathrm{Re}}|P\,((1-\omega)\Delta u_0 + \operatorname{div}\tau_0 + f(0))\,|.$$

[9] Diese existiert nach [Bre11, S. 132-134], da $L^2(\Omega)^d$ ein Hilbertraum und H ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)^d$ ist. Diese Aussage ist wiederum in [Tem01, S. 4] zu finden.

Da P eine Orthogonalprojektion von $L^2(\Omega)^d$ auf H ist, gilt $|Pv| \le |v|$ für alle $v \in L^2(\Omega)^d$. Damit ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right| &\le |(u_0\cdot\nabla)\,u_0| + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left((1-\omega)|\Delta u_0| + |\operatorname{div}\tau_0| + |f(0)|\right)\\ &\le |(u_0\cdot\nabla)\,u_0| + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big((1-\omega)\|u_0\|_{H^2} + \|\tau_0\|_{H^1} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_0^+;L^2(\Omega)^d)}\Big).\end{aligned}$$

Die letzten drei Terme sind wieder hinreichend klein, falls u_0, τ_0 und f hinreichend klein in den jeweiligen Räumen gewählt werden. Es bleibt also noch der erste Term $|(u_0\cdot\nabla)\,u_0|$ zu untersuchen. Da $|(u_0\cdot\nabla)\,u_0| = B(u_0,u_0)$ mit dem im Korollar 5.3 definierten Operator $B(u,v)$ gilt, folgt aus diesem Korollar $|(u_0\cdot\nabla)\,u_0| \le C\|u_0\|\|u_0\|_{H^2}$. Wir erhalten insgesamt die Abschätzung

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right| \le C\|u_0\|\|u_0\|_{H^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big((1-\omega)\|u_0\|_{H^2} + \|\tau_0\|_{H^1} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_0^+;L^2(\Omega)^d)}\Big).$$

Also gilt auch $\mathrm{Re}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right|^2 \le \frac{M}{4}$, falls u_0, τ_0 und f hinreichend klein in den jeweiligen Räumen sind.

Abschließend müssen wir noch $\frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}(0)\right|^2 \le \frac{M}{4}$ zeigen. Dazu betrachten wir die zweite Gleichung in (5.12) und schätzen wie eben ab. Auf den Term $g(\tau_0,u_0)$ wenden wir Lemma 5.6 an und erhalten $g(\tau_0,u_0) \le C\|\tau_0\|_{H^2}\|u_0\|$. Die übrigen Terme können analog zu oben abgeschätzt werden, so dass auch die letzte Ungleichung folgt. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}Y(0) &= \frac{(1-\omega)^2}{192\,\mathrm{Re}}\|u(0)\|^2 + \mathrm{Re}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{2\omega}\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}(0)\right|^2 + \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}^3}\frac{(1-\omega)^3}{3C_1\omega^2}\|\tau(0)\|_{H^2}^2.\\ &\le \frac{M}{4} + \frac{M}{4} + \frac{M}{4} + \frac{M}{4}\\ &= M.\end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 5.11 erfüllt und wir erhalten wie oben erwähnt die globale Existenz.

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch zeigen, dass die globale Lösung eindeutig ist. Dies folgt aber sofort aus Satz 5.10, da dieser für beliebige $T > 0$ gilt. □

5.4 Weitere Aussagen zum Oldroyd-Modell

Natürlich gibt es neben den bisher gezeigten Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von regulären Lösungen einige weitere Aussagen, einerseits zur Existenz und Eindeutigkeit von weniger regulären Lösungen, andererseits zur Stabilität von Lösungen. Wir wollen hier kurz ein paar davon vorstellen.

Neben den Aussagen aus den letzten beiden Abschnitten sind in [FCGO02] einige Ergebnisse zur Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität von starken Lösungen für das Oldroyd-Modell zu finden. Es werden lokale sowie globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gezeigt, die je nach Regularität der Daten u_0, τ_0 und f selber eine gewisse Regularität besitzen. Dabei muss für die globale Existenz und Eindeutigkeit wie im letzten Abschnitt vorausgesetzt werden, dass die Daten hinreichend klein in den jeweiligen Räumen sind.

In [Re90] werden ebenfalls lokale Existenz und Eindeutigkeit von regulären Lösungen behandelt, allerdings für ein allgemeineres Modell, das das Oldroyd-Modell als Spezialfall enthält. Außerdem ist die Regularität der Lösungen dort aufgrund von stärkeren Voraussetzungen an die Daten höher als bei den Ergebnissen aus den letzten beiden Abschnitten.

Eines der aktuellsten Ergebnisse stammt aus [LLZ05]. Dort wird unter anderem die globale Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen unter der Voraussetzung von kleinen Daten bewiesen. Außerdem wird dort vorausgesetzt, dass Ω ein periodischer Quader oder der gesamte Raum ist.

Abgesehen von den Aussagen zu den bisher betrachteten allgemeinen Strömungen gibt es noch Ergebnisse für einige Spezialfälle wie stationäre Strömungen[10], Scherströmungen[11] oder Instabilitäten, die in der Strömung auftreten können. Letztere werden beispielsweise in [Re00] untersucht. Dabei werden Methoden, die bestimmen, wann Instabilitäten auftreten, für ein etwas allgemeineres Modell als das Oldroyd-Modell präsentiert. Ein Ergebnis zur Existenz und Eindeutigkeit des stationären Problems kann dort ebenfalls nachgelesen werden. Scherströmungen werden zum Beispiel in [GS90b] untersucht, wobei globale Existenz und Eindeutigkeit ohne weitere Bedingungen an die Daten gezeigt werden können.

6 Fazit und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die lokale Existenz und Eindeutigkeit regulärer Lösungen sowie die globale Existenz und Eindeutigkeit regulärer Lösungen bei kleinen Daten für viskoelastische Fluide vom Oldroyd-Typ gezeigt. Dabei ist anzumerken, dass die globale Existenz schwacher Lösungen ohne Voraussetzungen an die Daten bisher nur in Spezialfällen wie dem Jeffreys-Modell gezeigt werden konnte, sowohl im zweidimensionalen Fall als auch im dreidimensionalen Fall. Für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen hingegen gibt es diese in beiden Fällen [Tem01, Kapitel 3.3]. Es gibt also weiterhin offene Fragen, die untersucht werden können.

Eine andere Möglichkeit, sich weiter mit der Strömungsberechnung von viskoelastischen Fluiden, insbesondere des Oldroyd-Typs, zu beschäftigen, bietet die Numerik. Die Forschung in diesem Bereich ist ein sehr aktuelles Thema, siehe beispielsweise [BB10] oder [BL12], in denen es unter anderem um die Approximation von Lösungen mittels der Finite-Elemente-Methode geht.

[10] Das bedeutet, dass die Strömung unabhängig von der Zeit ist. Damit verschwinden in den betrachteten Gleichungen alle zeitlichen Ableitungen.

[11] Scherströmungen sind spezielle Strömungen, die entstehen, wenn sich ein Fluid zwischen zwei Flächen befindet, die parallel zueinander verschoben werden. Dabei wirken nur Scherkräfte, also Kräfte parallel zur Oberfläche, auf das Fluid ein [Böh00, S. 55 f.].

Literaturverzeichnis

[BB10] Barrett, J. W., Boyaval, S., Existence and approximation of a (regularized) Oldroyd-B model, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, Vol. 21 (2011), No. 9, 1783–1837.

[BL12] Le Bris, C., Lelièvre, T., Micro-macro models for viscoelastic fluids: modelling, mathematics and numerics, Science China Mathematics, Vol. 55 (2012), No. 2, 353–384.

[Böh00] Böhme, G., Strömungsmechanik nichtnewtonscher Fluide, Teubner, Stuttgart 2000.

[Bre11] Brezis, H., Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London 2011.

[CF88] Constantin, P., Foias, C., Navier-Stokes equations, University of Chicago Press, Chicago London 1988.

[DLC94] Dixon, A. E., Lucey, A. D., Carpenter, P. W., Optimization of viscoelastic compliant walls for transition delay, AIAA Journal, Vol. 32 (1994), No. 2, 256–267.

[Ehr99] Ehrenstein, G. W., Polymer-Werkstoffe: Struktur - Eigenschaften - Anwendung, Hanser, München Wien 1999.

[Emm04] Emmrich, E., Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen: Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende, Vieweg, Wiesbaden 2004.

[FCGO02] Fernández-Cara, E., Guillén, F., Ortega, R.R., Mathematical modeling and analysis of viscoelastic fluids of the Oldroyd kind. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L., Handbook of numerical analysis, Vol. VIII, Numerical methods for fluids (Part 2), Elsevier, Amsterdam 2002, 541–661.

[Gie94] Giesekus, H., Phänomenologische Rheologie: Eine Einführung, Springer, Berlin Heidelberg New York 1994.

[GS90a] Guillopé, C., Saut, J. C., Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 15 (1990), No. 9, 849–869.

[GS90b] Guillopé, C., Saut, J. C., Global existence and one-dimensional nonlinear stability of shearing motions of viscoelastic fluids of Oldroyd type, RAIRO, Modélisation mathématique et analyse numérique, Vol. 24 (1990), No. 3, 369–401.

[LLZ05] Lin, F.-H., Liu, C., Zhang, P., On hydrodynamics of viscoelastic fluids, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 58 (2005), No. 11, 1437–1471.

[LM00] Lions, P. L., Masmoudi, N., Global solutions for some Oldroyd models of non-Newtonian flows, Chin. Ann. of Math., Vol. 21B (2000), No. 2, 131–146.

[Re90] Renardy, M., Local existence of solutions of the Dirichlet initial-boundary value problem for incompressible hypoelastic materials, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 21 (1990), No. 6, 1369–1385.

[Re00] Renardy, M., Mathematical analysis of viscoelastic flows, SIAM, Philadelphia 2000.

[SK07] Schade, H., Kunz, E., Strömungslehre, de Gruyter, Berlin 2007.

[Tem01] Temam, R., Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis, American Mathematical Society, Amsterdam New York North-Holland 1977.