Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Bachelorarbeit
im Studiengang Technomathematik

Konvexitätsbegriffe in der Elastizitätstheorie

Yannick Reichelt (326541)

betreut von Prof. Dr. Etienne Emmrich

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenständige Anfertigung versichert an Eides statt

Berlin, den

(Yannick Reichelt)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

> "The existence theorem for energy minimizers in 3D nonlinear elasticity that I proved while at Brown and which was the first such result under physically realistic hypotheses on the material response. [...]"[1]

Dies ist die Antwort von John M. Ball, einem der Pioniere auf dem Gebiet der Lösung von Problemen der nichtlinearen Elastizitätstheorie mit Hilfe variationeller Methoden, auf die Frage, auf welches seiner Resultate er am stolzesten sei.
John M. Ball hat die Entwicklung rund um die Lösung von Minimierungsaufgaben von Energiefunktionalen, mit der Motivation diese in der Elastizitätstheorie anzuwenden, maßgeblich mitbestimmt und den wichtigen Begriff der Polykonvexität eingeführt.
In seinem wissenschaftlichen Artikel [3] geht er dabei von den Definitionen der grundlegenden Begriffe bis hin zu einigen Existenzbeweisen in der nichtlinearen Elastizitätstheorie. Dieser Artikel bildet den Ausgangspunkt dieser Arbeit.
Zunächst werden im zweiten Kapitel einige Grundlagen im Umgang mit der Kontinuumsmechanik gelegt. Die Massenbilanz und die Impulsbilanz in Eulerscher und Lagrangescher Sichtweise werden hergeleitet und auf hyperelastische Materialien spezialisiert. Dabei wird aufgezeigt, warum der Umgang mit solchen Materialien im Hinblick auf die Minimierung von Energiefunktionalen von besonderem Interesse ist.
Im dritten Kapitel werden dann die mathematischen Grundlagen zur Existenz von Minima von Energiefunktionalen dargelegt. Zudem wird ein Bogen zur Kontinuumsmechanik hyperelastischer Materialien geschlagen und bewiesen, dass die Auseinandersetzung mit anderen Konvexitätsbegriffen als dem der Konvexität aus physikalischen Gründen unausweichlich ist.
Daraufhin werden im vierten und wichtigsten Kapitel dieser Arbeit die Definitionen und der Zusammenhang der Begriffe der Konvexität, Quasikonvexität, Polykonvexität und der Rang-1-Konvexität untereinander und zum Begriff der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit dargelegt. Der skalare Fall ist dabei von weitaus geringerem Interesse als der vektorielle.
Im letzten Kapitel werden weiterführende Überlegungen zum Lösen von Differentialgleichungen getätigt. Zuerst wird dabei auf das Problem der Minimierung von Integralgleichungen über nichtquasikonvexen Funktionen eingegangen und danach auf Operatordifferentialgleichungen, die sich nicht als Aufgaben der Minimierung schreiben lassen, und deshalb mit anderen als den hier besprochenen Mitteln gelöst werden müssen.

[1] aus *Newsletter of the European Mathematical Society*, März 2009, Issue 71

2 Einführung in die Kontinuumsmechanik

Eine gute mathematische Einführung in die Kontinuumsmechanik liefert Ciarlet [6] sowie Marsden und Hughes [12]. Die Einführung von Müller und Ferber [15] ist mathematisch weniger ausführlich, dafür jedoch sehr anschaulich.
Die Kontinuumsmechanik befasst sich ganz allgemein mit der Bewegung und Verformung von kontinuierlich ausgedehnten Körpern. Genauer bedeutet dies Starrkörperbewegung und volumenverändernde Verformungen von Körpern, die man nicht mehr als Punktmasse oder Starrkörper betrachten kann, sondern als Kontinuum. Der Begriff Kontinuum ist dabei in dem Sinne zu verstehen, als dass man sich den Körper aus N Punktmassen mit einem gewissen Abstand zueinander vorstellt und dann einen Grenzprozess von N gegen Unendlich laufen lässt, wobei die Abstände zwischen den Punktmassen gegen Null streben. Diese allgemein beschriebenen Kontinua genügen einigen Naturgesetzen, den so genannten Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, namentlich unter anderem der Massenbilanz und der Impulsbilanz.

2.1 Grundlagen

Bevor an dieser Stelle allerdings die Massenbilanz und die Impulsbilanz hergeleitet werden, geht es erst einmal darum, einige grundlegende Begriffe einzuführen.
Man unterscheidet in der Kontinuumsmechanik generell zwei Sichtweisen, die Eulersche und die Lagrangesche. Bei der Eulerschen Sichtweise wird jeder Punkt $x(y,t)$ des Körpers mit Hilfe eines körperunabhängigen Koordinatensystems untersucht. Dabei beschreibt $x(y,t)$ das Teilchen x, welches sich zum Zeitpunkt t an der Stelle y des Raumes befindet. Bei der Lagrangeschen Sichtweise legt man zunächst eine Ausgangs- bzw. Referenzkonfiguration des Körpers fest, meist einen spannungsfreien Zustand, und verfolgt die einzelnen Teilchen x des Körpers ausgehend von der Referenzkonfiguration. Mit $y(x,t)$ bezeichnet man die Position des Teilchens x des Körpers, die sich durch Deformation bis zum Zeitpunkt t ergeben hat.
Man verwendet also als Bezeichnung für die Deformation $y(\cdot,\cdot)$. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass die Variable für die Eulersche Sichtweise y ist und für die Lagrangesche Sichtweise x.
Die Eulersche Sichtweise findet ihre Anwendung zumeist in der Strömungsmechanik, da man dort zum Beispiel die Geschwindigkeit einer Strömung messen möchte, selbige jedoch an einer festgelegten Stelle nicht von dem Teilchen abhängt, das sich zu einem gegebenen Zeitpunkt an dieser Stelle befindet. Die Lagrangesche Sichtweise verwendet man hauptsächlich in der Elastizitätstheorie, da man dort, wie zum Beispiel bei der Biegung von Balken, daran interessiert ist, wohin sich ein fester Punkt des Körpers im Laufe der Zeit bewegt.
Aus Gründen der besseren Verständlichkeit werden die Massenbilanz und die Impulsbi-

lanz zunächst jedoch in Eulerscher Fassung hergeleitet und dann in Lagrangesche Fassung umgeschrieben.
Dazu betrachtet man eine hinreichend reguläre, offene, wegzusammenhängende Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Der Abschluss dieser Menge $\overline{\Omega}$ soll den betrachteten Körper[2] vor der Deformation $y(\cdot,\cdot)$ darstellen. Der verformte Körper zu einem Zeitpunkt t wird dann mit $y(\overline{\Omega}, t)$ und Teilgebiete $W \subseteq \overline{\Omega}$ des Körpers im verformten Zustand zum Zeitpunkt t mit $y(W,t)$ bezeichnet.
Eine Deformation $y : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist eine Funktion, die genügend glatt[3], für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ injektiv im Innern $\overline{\Omega}^\circ = \Omega$ des Körpers ist, also möglicherweise nicht injektiv auf dem Rand $\partial\overline{\Omega}$ des Körpers, und die Orientierung beibehält.
Aus physikalischer Sicht ist diese Definition sinnvoll, da die Injektivität der Funktion auf dem Rand des Körpers aufgrund von Selbstkontakt verloren gehen kann.
Dass die Deformation die Orientierung beibehält, bedeutet, dass für die Fréchet-Ableitung von $y(\cdot,\cdot)$ nach der Variablen x, die in der Kontinuumsmechanik als Deformationsgradient und mit $\nabla_x y$ bezeichnet wird, $\det \nabla_x y(x,t) > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt[4].
Daraus folgt für die lokale Volumenänderung des Körpers, dass das Volumen nicht auf Null zusammengedrückt werden, also $\det \nabla_x y(x,t) \neq 0$, und keine negativen Volumina, $\det \nabla_x y(x,t) \nless 0$, entstehen können. Dazu später mehr.
Als mathematisches Hilfsmittel benötigt man noch die so genannte Cofaktormatrix $\operatorname{cof} F$ zu einer gegebenen Matrix $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $(\operatorname{cof} F)|_{i,j} := (-1)^{i+j} \det F'_{i,j}$ mit der Matrix $F'_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, die aus der Matrix F durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Mit der Cramerschen Regel gilt dann für invertierbare Matrizen $\operatorname{cof} F = (\det F)F^{-T}$.

2.2 Massenbilanz und Impulsbilanz in Eulerscher Schreibweise

2.2.1 Massenbilanz

Die Massenbilanz leitet sich aus der Tatsache her, dass in einem geschlossenen System, also einem System, in dem keine Teilchen verschwinden oder austreten können, keine Masse verloren geht. Dies bedeutet, die zeitliche Änderung der Gesamtmasse m ist gleich Null, also in globaler Schreibweise

$$\frac{d}{dt}m(t) = 0.$$

[2]In der Mathematik benötigt man in vielen Sätzen offene Mengen, deshalb spricht man im Folgenden oft vom Körper Ω, obwohl das nicht ganz korrekt ist, wenn man es ganz genau nimmt.
[3]Genügend glatt bedeutet hier, dass $y(\cdot,\cdot)$ in den nachfolgenden Sätzen und Definitionen im klassischen Sinne so glatt ist, dass alle aufgeführten Ausdrücke Sinn ergeben, außer es wird in einzelnen Sätzen anders ausgeschrieben.
[4]Daraus folgt insbesondere die Invertierbarkeit der Matrix $\nabla_x y(x,t)$ an jeder Stelle $x \in \overline{\Omega}$ und für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$.

Mit $v(y,t)$ wird im Folgenden die Geschwindigkeit des Teilchens y des Körpers $\overline{\Omega}$ zum Zeitpunkt t bezeichnet.
Für eine hinreichend glatte Dichtefunktion $\rho : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also eine Funktion, die jedem Teilchen y des Körpers $\overline{\Omega}$ zur Zeit t eine Massendichte zuordnet, erhält man mit dem Reynoldschen Transportsatz

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{y(\Omega,t)} \rho(y,t)dy = \int\limits_{y(\Omega,t)} \frac{\partial}{\partial t}\rho(y,t) + (v(y,t) \cdot \nabla_y)\rho(y,t) + (\nabla_y \cdot v(y,t))\rho(y,t))dy$$

unter Beachtung, dass man diesen auf beliebig kleine Teilvolumina $y(W,t)$, $W \subseteq \Omega$, anwenden kann und aufgrund der Stetigkeit des Integranden, die Massenbilanz in lokaler Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(y,t) + (v(y,t) \cdot \nabla_y)\rho(y,t) + (\nabla_y \cdot v(y,t))\rho(y,t) = 0$$

beziehungsweise mit der Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(y,t) + \nabla_y \cdot (\rho(y,t)v(y,t)) = 0.$$

2.2.2 Impulsbilanz

Um die zweite Grundgleichung herzuleiten, erinnert man sich an das zweite Newtonsche Gesetz „Masse mal Beschleunigung ist gleich Kraft“: $m \cdot a = F$. Dies kann man über die Definition des Impulses als „Masse mal Geschwindigkeit“, $p := m \cdot v$, umformen in die Impulsgleichung $\frac{d}{dt}p(t) = F$, die zeitliche Änderung des (Gesamt-)Impulses p ist demnach gegeben durch die Summe F der auf den Körper wirkenden Kräfte.
Der Übergang zur lokalen Impulsbilanz ist nun etwas aufwändiger. Zunächst stellt man fest, dass sich die Kräfte F in Volumenkräfte, zum Beispiel die Gravitation oder magnetische Kräfte, und in Oberflächenkräfte, zum Beispiel Druckkräfte, aufteilen lassen. Die Volumenkräfte erfasst man durch Volumenkraftdichten $b(y,t)$, das heißt Kraft pro Volumen, und die Oberflächenkräfte durch den so genannten Spannungsvektor $t(y,t;n)$, das heißt Kraft pro Flächenelement. Dabei hängt der Spannungsvektor neben dem betrachteten Oberflächenteilchen y des Körpers $\overline{\Omega}$ zur Zeit t ebenfalls von dem an dieser Stelle nach außen gerichteten Einheitsnormalenvektor n ab.
Nun schreibt sich die Impulsbilanz in globaler Schreibweise, wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{y(\Omega,t)} \rho(y,t)v(y,t)dy = \oint\limits_{y(\partial\Omega,t)} t(y,t;n)d\sigma + \int\limits_{y(\Omega,t)} \rho(y,t)b(y,t)dy.$$

Mit der Cauchyschen Hypothese und dem daraus resultierenden Cauchyschen Tetraederargument erhält man den Zusammenhang $t(y,t;n) = T(y,t)n$ mit dem symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor T; der Spannungsvektor hängt also linear von n ab. Wendet man nun noch den Gaußschen Satz auf $\oint_{y(\partial\Omega,t)} T(y,t)nd\sigma$ an und berücksichtigt die gleichen Überlegungen wie bei der Herleitung der lokalen Massenbilanz, ergibt sich die lokale Impulsbilanz zu

$$\rho(y,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}v(y,t)+(v(y,t)\cdot\nabla_y)v(y,t)\right)=\nabla_y\cdot T(y,t)+\rho(y,t)b(y,t).$$

2.3 Massenbilanz und Impulsbilanz in Lagrangescher Schreibweise

An dieser Stelle werden die Massenbilanz und Impulsbilanz in der Schreibweise hergeleitet, wie sie im Folgenden benötigt werden.

2.3.1 Massenbilanz

Die lokale Massenbilanz in Lagrangescher Schreibweise stellt sich als die Existenz einer Funktion ρ_0 dar. Die lokale Massenbilanz in Eulerscher Fassung ist nämlich äquivalent zur Existenz einer Funktion $\rho_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $\rho_0(x) := \det \nabla_x y(x,t)\rho(y(x,t),t)$, die unabhängig von t ist.
Dies sieht man ein, indem man den Term auf der rechten Seite partiell nach t ableitet und feststellt, dass die Ableitung verschwindet.

2.3.2 Impulsbilanz

Zur Herleitung der Impulsbilanz in Lagrangescher Form definiert man sich zunächst den Piola-Kirchhoff-Tensor $S(x,t) := T(y(x,t),t)\operatorname{cof}\nabla_x y(x,t)$ und erhält als weiteren Zusammenhang zum Cauchyschen Spannungstensor T

$$\nabla_x\cdot S(x,t)=\det\nabla_x y(x,t)(\nabla_{y(x,t)}\cdot T(y(x,t),t)).$$

Multipliziert man nun die Impulsbilanz in Eulerscher Schreibweise auf beiden Seiten mit $\det\nabla_x y(x,t)\neq 0$, so ergibt sich

$$\rho_0(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)+(v(x,t)\cdot\nabla_x)v(x,t)\right)=\nabla_x\cdot S(x,t)+\rho_0(x,t)b_0(x,t).$$

2.4 Elastische und hyperelastische Materialien

Aus Gründen der Übersichtlichkeit vermeidet man im Folgenden die Notation $y(\cdot,\cdot)$ für die Deformation und verwendet nun einfach die Bezeichnung y, da dies nicht mehr zur Verwechslung mit der Eulervariable y führen kann.
Die Elastizitätstheorie befasst sich, wie der Name schon sagt, mit elastischen Materialien. Dies sind Materialien, für die eine glatte Funktion $\tilde{S} : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{3\times 3}_{+}\to\mathbb{R}^{3\times 3}$ existiert, sodass der Piola-Kirchhoff-Tensor S die Gestalt $S(x,t)=\tilde{S}(x,\nabla_x y(x,t))$ hat. Man bezeichnet mit $\mathbb{R}^{3\times 3}_{+}$ die Menge der (3×3)-Matrizen mit positiver Determinante.

In dieser Arbeit wird es hauptsächlich um statische Deformationen hyperelastischer Materialien gehen, die als unabhängig von der Zeit angesehen werden können, da diese eine variationelle Formulierung der Grundgleichungen zulassen.
Ein Material wird hyperelastisch genannt, wenn es eine glatte Funktion $W : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{+} \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial}{\partial F} W(x,F) = \tilde{S}(x,F)$ gibt. Die Funktion W kann also als Potential der Funktion $\tilde{S}$ betrachtet werden und wird als Energiedichtefunktion bezeichnet.
Aufgrund der Annahme der Statik und der Unabhängigkeit von der Zeit vereinfacht sich die Impulsbilanz für hyperelastische Materialien demnach zu

$$-\nabla_x \cdot \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) = \rho_0(x) b_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Legt man nun noch Randebedingungen $y(x) = y_0(x)$ auf $\Gamma_D \subseteq \partial\Omega$ und $\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n = g(x, \nabla y(x))$ auf $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ fest, so ergibt sich folgendes zu lösendes nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen mit Randbedingungen:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\nabla_x \cdot \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) & = & \rho_0(x) b_0(x), & x \in \Omega, \\ y(x) & = & y_0(x), & x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n & = & g(x, \nabla y(x)), & x \in \Gamma_N \end{array}}\,.$$

Da die erste, wesentliche Randbedingung nur den Lösungsraum für y einschränkt, wird diese vernachlässigt. Die zweite, natürliche Randbedingung geht in die schwache Formulierung ein.
Man nehme zusätzlich an, dass die auf den Körper wirkenden Kräfte so genannte konservative Kräfte sind, das heißt Kräfte, die ein Potential B und G besitzen. Es gilt dann mit Hilfe der Gâteaux-Ableitung $\int_\Omega \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) dx = \langle B'(y), \theta \rangle$ und $\int_{\Gamma_N} g(x, \nabla y(x)) \cdot \theta(x) dx = \langle G'(y), \theta \rangle$ und somit folgender

Satz 2.1 (kritische Punkte des Energiefunktionals)
Sei ein hyperelastisches Material gegeben, auf das konservative Kräfte wirken. Dann erfüllt jede schwache Lösung y des partiellen Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcll} -\nabla_x \cdot \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) & = & \rho_0(x) b_0(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n & = & g(x, \nabla y(x)), & x \in \Gamma_N \end{array}$$

die Gleichung

$$\langle I'(y), \theta \rangle = 0$$

und umgekehrt, wobei $\theta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ glatte Funktionen bezeichnen, die auf Γ_D verschwinden. Das Funktional I ist für glatte Funktionen $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ definiert als

$$I(w) := \int_\Omega W(x, \nabla w(x)) dx - (B(w) + G(w)).$$

Man bezeichnet I dabei als die Gesamtenergie.
Als schwache Lösung bezeichnet man eine Lösung der variationellen Formulierung der Differentialgleichung, die im folgenden Lemma 2.2 beschrieben ist.

Bevor der Beweis des Satzes aufgeführt wird, zunächst das angekündigte Lemma und dessen Beweis.

Lemma 2.2 (variationelle Formulierung)
Für ein hyperelastisches Material unter dem Einfluss von konservativen Kräften ist die variationelle Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\nabla_x \cdot \tfrac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) &= \rho_0(x) b_0(x), \quad && x \in \Omega, \\ \tfrac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n &= g(x, \nabla y(x)), \quad && x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx = \int_\Omega \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) dx + \oint_{\Gamma_N} g(x, \nabla y(x)) \cdot \theta(x) d\sigma$$

für alle glatten Funktionen $\theta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, die auf Γ_D verschwinden.
Der Doppelpunkt bezeichnet dabei das Frobeniusprodukt $F_0 : F_1 := \operatorname{tr}(F_0^T F_1)$ zwischen zwei Matrizen F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wobei tr *die so genannte Spur einer Matrix ist, also die Summe der Diagonalelemente.*

Beweis: Sei y zunächst Lösung des Randwertproblems. Aus einer Folgerung der Greenschen Formel

$$\int_\Omega (\nabla_x \cdot \tilde{S}(x, \nabla y(x))) \cdot \theta(x) dx = -\int_\Omega \tilde{S}(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx + \oint_{\partial\Omega} \tilde{S}(x, \nabla y(x)) n \cdot \theta(x) d\sigma,$$

die die partielle Integration im Mehrdimensionalen behandelt, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\nabla_x \cdot \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) + \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \right) \cdot \theta(x) dx \\ = & \int_\Omega \left(-\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) + \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) \right) dx \\ & + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n \cdot \theta(x) d\sigma \\ = & \int_\Omega \left(-\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) + \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) \right) dx \\ & + \oint_{\Gamma_D} \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n \cdot \theta(x) d\sigma + \oint_{\Gamma_N} \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n \cdot \theta(x) d\sigma \\ = & \int_\Omega \left(-\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) + \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) \right) dx \end{aligned}$$

$$+\oint_{\Gamma_N} \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n \cdot \theta(x) d\sigma, \tag{1}$$

wobei sich die letzte Gleichheit wegen $\theta(x) = 0$ für alle $x \in \Gamma_D$ ergibt.
Aus der Gültigkeit des Randwertproblems folgt nun

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx = \int_\Omega \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) dx + \oint_{\Gamma_N} g(x, \nabla y(x)) \cdot \theta(x) d\sigma.$$

Umgekehrt folgt aus der variationellen Formulierung und der obigen Greenschen Formel, wobei man vorerst mit Funktionen θ mit $\theta(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ testet,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(-\nabla_x \cdot \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) \right) \cdot \theta(x) dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx \\
&= \int_\Omega \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) dx.
\end{aligned}$$

Dies ist nun äquivalent zu

$$\int_\Omega \left(\nabla_x \cdot \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) + \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \right) \cdot \theta(x) dx = 0.$$

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt damit die Impulsbilanz für fast alle $x \in \Omega$.
Aus der Gültigkeit der variationellen Formulierung, (1) und der eben bewiesenen Gültigkeit der Impulsbilanz folgt dann für solche θ mit $\theta(x) = 0$ auf Γ_D

$$\oint_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n - g(x, \nabla y(x)) \right) \cdot \theta(x) d\sigma = 0$$

und wie eben aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) n = g(x, \nabla y(x)) \quad \text{f. f. a. } x \in \Gamma_N. \qquad \blacksquare$$

Beweis des Satzes 2.1: Um die Gâteaux-Ableitung von I zu berechnen, fängt man mit der Gâteaux-Ableitung von $\tilde{W} : y \mapsto \int_\Omega W(x, \nabla y(x)) dx$ an der Stelle y in Richtung θ an. Es gilt mit dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(y + \vartheta\theta) - \tilde{W}(y) &= \int_\Omega \left(W(x, \nabla y(x) + \vartheta\nabla\theta(x)) - W(x, \nabla y(x)) \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\vartheta \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) + o(|\vartheta\nabla\theta(x)|) \right) dx
\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \vartheta \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx + \int_\Omega o(|\vartheta \nabla\theta(x)|) dx,$$

wobei das erste Integral im letzten Ausdruck wohldefiniert ist, wenn $\theta \mapsto \int_\Omega \tilde{S}(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx$ stetig ist. Gilt zusätzlich $\int_\Omega o(|\vartheta\nabla\theta(x)|)dx = o(\|\vartheta\theta\|)$, so erhält man nach Teilen durch ϑ und dem Grenzprozess $\vartheta \to 0$

$$\langle \tilde{W}'(y), \theta \rangle = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx.$$

Demnach gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle I'(y), \theta \rangle &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) dx - \langle B'(y) + G'(y), \theta \rangle \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) - \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) \right) dx \\
&\quad - \oint_{\Gamma_N} g(x, \nabla y(x)) \cdot \theta(x) d\sigma.
\end{aligned}$$

Somit gilt $0 = \langle I'(y), \theta \rangle$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial F} W(x, \nabla y(x)) : \nabla\theta(x) - \rho_0(x) b_0(x, y(x)) \cdot \theta(x) \right) dx \\
&\quad - \oint_{\Gamma_N} g(x, \nabla y(x)) \cdot \theta(x) d\sigma.
\end{aligned}$$

Letzteres ist aber die variationelle Formulierung des obigen Systems partieller Differentialgleichungen und damit folgt die Behauptung aus Lemma 2.2. ■

Somit wurde gezeigt, dass man eine Lösung der Impulsbilanz mit gewissen Randbedingungen dadurch finden kann, dass man kritische Punkte von dem Energiefunktional I findet. Schränkt man diese kritischen Punkte nun auf Minima ein, so gelangt man zur Aufgabe des Berechnens von Minima von Energiefunktionalen, worum es in dieser Arbeit vornehmlich gehen soll.
Im weiteren Verlauf bezeichne $I(y) := \int_\Omega f(x, y(x), \nabla y(x)) dx$ das zu minimierende Energiefunktional. Wie eben gezeigt gilt für hyperelastische Materialien $f(x, y(x), \nabla y(x)) = W(x, \nabla y(x)) + \Psi(x, y(x))$, wobei W die Energiedichtefunktion ist und Ψ eine Funktion, die den Einfluss der Volumen- und Oberflächenkräfte beinhaltet.

3 Minimierung von Energiefunktionalen

3.1 Grundlegende Überlegungen

Im Folgenden wird allgemeinere Theorie behandelt als für den $\mathbb{R}^3$, sodass nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen sowie $y : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, n, $m \in \mathbb{N}$, vorausgesetzt wird.
Sei $I : V \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben, wobei ein $w_0 \in V$ exisitert, sodass $I(w_0) < \infty$ gilt, und bezeichne $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Es wird die Aufgabe

$$\text{(P)} \qquad \min_{w \in V} I(w) = \min_{w \in V} \int\limits_{\Omega} f(x, w(x), \nabla w(x)) dx$$

mit $V := y_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) := \{w \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) : w(x) = y_0(x) \ \forall x \in \partial\Omega\}$, $p > 1$, betrachtet, wobei die Randbedingung im Vergleich zum vorigen Kapitel zu $w = y_0$ auf $\partial\Omega$ vereinfacht wurde und $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ den nachstehenden Sobolewraum bezeichne.

Definition und Satz 3.1 (Sobolewraum)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) := \{w \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) : \exists D^\alpha w \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

Sobolewraum, wobei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ einen Multiindex und $D^\alpha w$ die schwache partielle Ableitung von w der Ordnung α bezeichnet.
Mit der Norm

$$\begin{cases} \|w\|_{k,p} := \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha w\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & 1 < p < \infty, \\ \|w\|_{k,\infty} := \max\limits_{|\alpha| \leq k} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \Omega} |D^\alpha w(x)| \end{cases}$$

wird $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ zum Banachraum.
Weiter definiert man für $k = 1$

$$W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) := \{w \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) : \ w|_{\partial\Omega} = 0 \textit{ im Sinne der Spur}\}.$$

3.1.1 Koerzitivitätsbedingung

Betrachtet man die Exponentialfunktion, so gilt

$$\begin{cases} \exp(x) \to \infty & \text{für } x \to \infty, \\ \exp(x) \to 0 & \text{für } x \to -\infty. \end{cases}$$

Zudem ist exp streng monoton wachsend und besitzt somit in $\mathbb{R}$ kein Minimum. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll, Funktionen zu untersuchen, die schwach koerzitiv sind.

Definition 3.2 (schwache Koerzitivität)
Sei X ein reflexiver Banachraum. Eine Funktion $I : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt schwach koerzitiv, wenn $I(w) \to \infty$ für $\|w\|_X \to \infty$ gilt.

Nun möchte man jedoch keine Koerzitivität von I fordern, sondern eine Koerzitivitätsbedingung an den Integranden f stellen. Es gibt viele solcher Bedingungen, in dieser Arbeit wird aber folgende benötigt:
Es gelte für die Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x, w, F) \geq \alpha \|F\|^p - \beta \qquad \forall x \in \Omega, \forall w \in \mathbb{R}^m, \forall F \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{2}$$

mit Konstanten $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$.

3.1.2 Schwache Folgenunterhalbstetigkeit

Wählt man $m := \inf_{w \in V} I(w)$, so existiert eine Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $I(y_k) \to m$, $k \to \infty$. Die Frage ist nun, wann die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tatsächlich gegen ein Minimum y von I konvergiert. Um dies zu beantworten, benötigt man eine gewisse Kompaktheitseigenschaft. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß könnte man zumindest sicherstellen, dass eine konvergente Teilfolge existiert, sofern der Ausgangsraum endlichdimensional ist. Der Raum $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, um den es im Wesentlichen geht, ist jedoch unendlichdimensional. Man kann aber zeigen, dass die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wenigstens beschränkt ist (vgl. [9, S. 444]). Nach dem Satz von Eberlein-Šmulian existiert dann immerhin eine schwach konvergente Teilfolge, da $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv ist.

Definition 3.3 (schwache Konvergenz, schwach*-Konvergenz)
Sei X ein Banachraum.

i) Eine Folge $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiert schwach gegen $w \in X$, in Zeichen $w_k \rightharpoonup w$ in X, wenn für alle $f \in X^*$ des Dualraums $\lim_{k \to \infty} \langle f, w_k - w \rangle = 0$ gilt.

ii) Eine Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ konvergiert schwach gegen $f \in X^*$, in Zeichen $f_k \rightharpoonup^* f$ in X^*, wenn für alle $w \in X$ gilt $\lim_{k \to \infty} \langle f_k - f, w \rangle = 0$.*

Es bezeichnet dabei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die duale Paarung zwischen X^* und X.

Damit man nun sicherstellt, dass diese Teilfolge gegen das Infimum m konvergiert, definiert man den Begriff der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit.

Definition 3.4 (schwache Folgenunterhalbstetigkeit)
Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $I : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt schwach folgenunterhalbstetig, wenn die Funktion I die Bedingung $I(w) \leq \liminf_{k \to \infty} I(w_k)$ für alle $w_k \rightharpoonup w$ in X erfüllt.

3.2 Existenzsätze

Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, um einen allgemeinen Existenzsatz und einen speziellen Existenzsatz für die obige Minimierungsaufgabe (P) zu beweisen.
Es sollte, wie vorher schon erwähnt, angenommen werden, dass ein $w_0 \in X$ existiert, sodass $I(w_0) < \infty$ gilt, da der Fall $I(w) = \infty$ für alle $w \in X$ uninteressant ist.

Satz 3.5 (allgemeiner Existenzsatz)
Sei X ein reflexiver Banachraum, $I : X \to \overline{\mathbb{R}}$ schwach folgenunterhalbstetig und schwach koerzitiv. Dann existiert eine Lösung $y \in X$ der Minimierungsaufgabe

$$I(y) = \min_{w \in X} I(w).$$

Beweis: Sei $m := \inf_{w \in X} I(w) < \infty$. Dann exisitert eine Minimalfolge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$, das heißt $\lim_{k \to \infty} I(y_k) = m$.
Angenommen $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wäre nicht beschränkt. Dann existierte eine Teilfolge $\{y_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ von $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $\|y_{k_j}\|_X \to \infty$ für $j \to \infty$. Aus der schwachen Koerzitivität von I folgte dann für $\varepsilon > 0$

$$\infty > m + \varepsilon \geq I(y_{k_j}) \xrightarrow{j \to \infty} \infty,$$

was ein Widerspruch ist. Somit muss die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt sein.
Nach dem Satz von Eberlein–Šmulian existiert dann wegen der Reflexivität von X eine schwach konvergente Teilfolge $y_{k'} \rightharpoonup y$ in X. Aus der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von I folgt

$$m = \lim_{k' \to \infty} I(y_{k'}) = \liminf_{k' \to \infty} I(y_{k'}) \geq I(y) \geq m,$$

und somit die Behauptung. ∎

Nun folgt ein Satz, der die Frage der Existenz einer Lösung der oben gestellten Minimierungsfrage (P) beantwortet.

Satz 3.6 (spezieller Existenzsatz)
Sei $V := y_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $I : V \to \overline{\mathbb{R}} : w \mapsto \int_\Omega f(x, w(x), \nabla w(x))dx$ schwach folgenunterhalbstetig. Genüge weiter f der Koerzitivitätsbedingung (2). Dann existiert $y \in V$, sodass

$$I(y) = \min_{w \in V} I(w)$$

gilt.

Beweis: Sei $m := \inf_{w \in V} I(w) < \infty$. Dann existiert eine Minimalfolge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq V$.
Zu zeigen ist, dass $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ beschränkt ist. Es gilt mit der Koerzitivitätsbedingung

$$\infty > I(y_k) = \int_\Omega f(x, y_k(x), \nabla y_k(x))dx \geq \int_\Omega \alpha \|\nabla y_k(x)\|^p - \beta dx = \alpha \|\nabla y_k\|_{L^p}^p - \beta |\Omega|$$

und $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\nabla y_k\|_{L^p} < \infty$, da $\{I(y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und damit beschränkte Folge ist.
Wegen $y_k - y_0 \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ erhält man mit der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung und einer Konstanten $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$

$$\|y_k\|_{L^p} \leq \|y_k - y_0\|_{L^p} + \|y_0\|_{L^p} \leq \mathrm{C}\|\nabla y_k - \nabla y_0\|_{L^p} + \|y_0\|_{L^p} \leq \mathrm{C}(\|\nabla y_k\|_{L^p} + 1),$$

also ebenfalls $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\|_{L^p} < \infty$ und somit ist $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.
Da für $1 < p < \infty$ der Sobolewraum $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge $y_{k'} \rightharpoonup y$.
Zu zeigen bleibt $y \in V$, da dann wie oben aus der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von I die Behauptung folgt. Es ist $y_k - y_0 \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ und da $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \subseteq W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ein abgeschlossener Unterraum ist, also insbesondere auch konvex, folgt mit dem Satz von Mazur die Abgeschlossenheit von $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ bezüglich der Topologie, die durch die schwache Konvergenz induziert wird. Demnach gilt auch $y - y_0 \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, also $y \in V$. ■

Im restlichen Teil der Arbeit geht es darum, Bedingungen an die Funktion f zu finden, damit das Energiefunktional I schwach folgenunterhalbstetig ist, so wie das schon für die schwache Koerzitivität von I geschehen ist.
Eine hinreichende Bedingung für die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von I ist die Konvexität der Funktion $F \mapsto f(x,w,F)$.

Satz 3.7 (Konvexität impliziert schwache Folgenunterhalbstetigkeit)
Sei $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben und $F \mapsto f(x,w,F)$ konvex, das heißt

$$f(x,w,\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1) \leq \vartheta f(x,w,F_0) + (1-\vartheta) f(x,w,F_1)$$

für alle $x \in \Omega$, für alle $w \in \mathbb{R}^m$, für alle $F_0,\ F_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und für alle $\vartheta \in [0,1]$.
Dann ist I schwach folgenunterhalbstetig.

Beweis: Für den Beweis schaue man in [7, Theorem 3.4 in Kapitel 3] nach. ■

Im skalaren Fall, das bedeutet hier $n = 1$ oder $m = 1$, ist die Konvexität von f im dritten Argument auch notwendig für die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von I (siehe [7, Theorem 3.1 in Kapitel 3]). Im Mehrdimensionalen ist dies jedoch nicht der Fall. Wie später noch besprochen wird, gibt es dafür den Begriff der Quasikonvexität.
Es wird sich außerdem herausstellen, dass die Konvexitätsforderung an den Integranden f aus Sicht der Elastizitätstheorie nicht haltbar ist. Um diese Tatsache jedoch sauber beweisen zu können, muss man sich erst einmal mit der Deformation von Volumen-, Flächen- und Linienelementen des Körpers $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ befassen.

3.3 Volumenelemente, Flächenelemente und Linienelemente

In diesem Unterkapitel soll untersucht werden, wie die Volumen-, Flächen- und Linienelemente des Körpers im Ausgangszustand, also $W, A, l \subseteq \overline{\Omega}$, mit denen im deformierten Zustand, $y(W), y(A), y(l) \subseteq y(\overline{\Omega})$, zusammenhängen.

3.3.1 Deformation von Volumenelementen

Nach dem Transformationssatz folgt für $W \subseteq \overline{\Omega}$ wegen der Injektivitätseigenschaft der Deformation y im Innern des Körpers $\overline{\Omega}^\circ = \Omega$ und wegen $\det \nabla y(x) > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$

$$\operatorname{vol}(y(W)) = \int\limits_{y(W)} dy(x) = \int\limits_{W} |\det \nabla y(x)| dx = \int\limits_{W} \det \nabla y(x) dx.$$

Es spielt also die Determinante des Deformationsgradienten hierbei eine wichtige Rolle.

3.3.2 Deformation von Flächenelementen

Sei zunächst der Cauchysche Spannungstensor $T : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+^{3\times 3}$ gegeben. Führt man dann eine so genannte Piola-Transformation durch, so erhält man den Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $S(x) := T(y(x)) \operatorname{cof} \nabla y(x)$ für eine Deformation y. Nun stellt man durch Nachrechnen fest, zum Beispiel in [6, Theorem 1.7-1], dass

$$\nabla \cdot S(x) = (\det \nabla y(x)) \nabla_{y(x)} \cdot T(y(x)) \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Sei $W \subseteq \overline{\Omega}$. Mit dem Gaußschen Satz und dem Transformationssatz erhält man unter Berücksichtigung von $\det \nabla y(x) > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ und der daraus resultierenden lokalen Umkehrbarkeit von y

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\partial W} S(x) n d\sigma &= \int\limits_{W} \nabla \cdot S(x) dx = \int\limits_{W} \nabla_{y(x)} \cdot T(y(x)) \det \nabla y(x) dx \\ &= \int\limits_{y(W)} \nabla_{y(x)} \cdot T(y(x)) dy(x) = \oint\limits_{y(\partial W)} T(y(x)) n_y d\sigma_y. \end{aligned}$$

Setzt man schließlich $T \equiv \mathrm{I}_3$ als den Einheitstensor und damit $S(x) = \operatorname{cof} \nabla y(x)$, so folgt

$$\oint\limits_{\partial W} \operatorname{cof} \nabla y(x) n d\sigma = \oint\limits_{y(\partial W)} n_y d\sigma_y$$

und somit für die Flächenelemente $\operatorname{cof} \nabla y(x) n d\sigma = n_y d\sigma_y$. Wegen $|n_y| = 1$ erhält man mit $|\operatorname{cof} \nabla y(x) n| d\sigma = d\sigma_y$ für $A \subseteq \partial W$

$$\operatorname{area}(y(A)) = \oint\limits_{y(A)} d\sigma_y = \oint\limits_{A} |\operatorname{cof} \nabla y(x) n| d\sigma.$$

Demnach ist die Cofaktormatrix des Deformationsgradienten ein Maß für die Stärke der Deformation von Flächenelementen.

3.3.3 Deformation von Linienelementen

Um die Deformation von Linienelementen $l \subseteq \overline{\Omega}$ des Körpers zu untersuchen, benötigt man eine Parametrisierung von l durch eine Kurve. Sei also $\gamma : [0,1] \to \overline{\Omega}$ eine Kurve mit $\gamma([0,1]) = l$. Dann folgt für die Länge der Kurve im deformierten Zustand

$$\begin{aligned} \text{length}(y(l)) &= \text{length}(y \circ \gamma) = \int_0^1 \|\nabla(y \circ \gamma)(x)\|_{\mathbb{R}^3} dx \\ &= \int_0^1 \langle \nabla y(\gamma(x)) \nabla \gamma(x), \nabla y(\gamma(x)) \nabla \gamma(x) \rangle^{1/2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\nabla \gamma(x)^T \nabla y(\gamma(x))^T \nabla y(\gamma(x)) \nabla \gamma(x) \right)^{1/2} dx. \end{aligned}$$

Wichtig ist hierbei also der rechte Cauchy-Greensche Spannungstensor $C(z) := \nabla y(z)^T \nabla y(z)$ ausgewertet an der Stelle $z = \gamma(x)$.
Zusammenfassend stellt man fest, dass die Deformation von Volumenelementen von der Determinante des Deformationsgradienten, die Deformation von Flächenelementen von der Cofaktormatrix des Deformationsgradienten und die Deformation von Linienelementen im Wesentlichen vom Deformationsgradienten selbst abhängen.
Es lässt sich nun die mathematische Beschreibung der Deformation von Volumen-, Flächen- und Linienelementen gut in den Zusammenhang mit hyperelastischen Materialien bringen.
Es sei zunächst der Begriff der Bezugssysteminvarianz erläutert: Unter diesem Begriff versteht man die Unabhängigkeit einer phyikalischen Größe, wie der Massendichte, der Energiedichte und so weiter, von der Wahl der Perspektive auf das Material. Das heißt, die physikalische Größe sollte sich nicht in ihrer Größe und anderen charakterisierenden Eigenschaften verändern, nur weil sich der Blickwinkel auf den Körper ändert. Diesen Sachverhalt kann man mathematisch über Rotationen, also über orthogonale Matrizen mit positiver Determinante $Q \in SO(3)$, ausdrücken. Es bezeichnet dabei $SO(3)$ die spezielle orthogonale Gruppe der (3×3)-Matrizen.
Die Bezugssysteminvarianz schreibt sich für die Energiedichtefunktion W eines hyperelastischen Materials zu

$$W(x, QF) = W(x, F) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \forall F \in \mathbb{R}^{3\times3}_+, \forall Q \in SO(3).$$

Dieser physikalische Begriff ist von großer Bedeutung und wird in vielen Theorien als grundlegendes Axiom vorausgesetzt.
Weiter heißt das hyperelastische Material isotrop in $x \in \overline{\Omega}$, das bedeutet im Wesentlichen, dass es sich in allen Richtungen gleich verhält, wenn gilt

$$W(x, FQ) = W(x, F) \quad \forall F \in \mathbb{R}^{3\times3}_+, \forall Q \in SO(3).$$

Damit gelangt man zu einem interessanten

Beispiel 3.8 (Isotrope hyperelastische Materialien)
Die Energiedichtefunktion W eines hyperelastischen Materials ist genau dann bezugssysteminvariant und isotrop, wenn gilt

$$W(x,F) = W(x, (\det F)^2, \|\operatorname{cof} F\|^2, \|F\|^2).$$

Beweis: Der Beweis findet sich in [6, Theorem 4.4-1]. ■

Dies bedeutet, dass für isotrope hyperelastische Materialien unter Annahme der Gültigkeit der Bezugssysteminvarianz die Energiedichtefunktion nur von den Quadraten der Maße für die Deformation von Volumen-, Flächen- und Linienelementen abhängt.

3.4 Physikalische Annahmen – Materialverhalten bei grenzwertigen Dehnungen

Wenn man sich einen Körper Ω vorstellt und diesen Unendlich weit ausdehnt, erwartet man, dass seine innere Energie, die für hyperelastische Materialien durch $\int_\Omega W(x, y(x))dx$ gegeben ist, Unendlich groß wird. Selbiges hat man vor Augen, wenn man den Körper auf ein Volumen der Größe Null zusammenpressen möchte.
Diesen physikalischen Sachverhalt gilt es nun in mathematische Form zu bringen. Dazu erscheint es nach dem letzten Abschnitt sinnvoll folgende Annahmen zu treffen

$$\begin{cases} W(x,F) \to \infty, & \text{falls } \{\|F\| + \|\operatorname{cof} F\| + \det F\} \to \infty,\ F \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+, \\ W(x,F) \to \infty, & \text{falls } \det F \to 0^+,\ F \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+. \end{cases}$$

Der erste Ausdruck beinhaltet die unendliche Ausdehnung von Linien-, Flächen- und Volumenelementen des Körpers und der zweite das Zusammenpressen des Volumens des Körpers auf Null.
Indem man eine stärkere Forderung an die Funktion W stellt, erhält man aus der ersten Beziehung eine Koerzitivitätsbedingung an W:
Für Konstanten α, p, q, $r > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gelte

$$W(x,F) \geq \alpha\{\|F\|^p + \|\operatorname{cof} F\|^q + (\det F)^r\} + \beta \qquad \forall (x,F) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times 3}_+.$$

Zur Erinnerung: In Abschnitt 3.2 dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Konvexität des Integranden f der Gesamtenergie I im dritten Argument hinreichend für die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von I ist. Für hyperelastische Materialien unter dem Einfluss konservativer Kräfte gilt weiter

$$I(w) := \int_\Omega f(x, w(x)\nabla w(x))dx = \int_\Omega W(x, \nabla w(x))dx - (B(w) + G(w))$$

und somit begründet sich die Konvexität von f im dritten Argument auf die Konvexität der Energiedichtefunktion W im zweiten Argument.
Die Bedingung $W(x,F) \to \infty$, $\det F \to 0^+$, liefert nun die Begründung dafür, dass man sich in der Elastizitätstheorie mit anderen Konvexitätsbegriffen beschäftigen sollte.
Es folgt einer der zentralsten Sätze dieser Arbeit.

Satz 3.9 (Inkompatibilität von W mit der Forderung nach Konvexität)
Sei $x \in \overline{\Omega}$ so gewählt, dass $W(x,F) \to \infty$ für $\det F \to 0^+$, $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+$.
Dann kann

$$W(x,\cdot) : \mathbb{R}^{3\times 3}_+ \to \mathbb{R} : \; F \mapsto W(x,F)$$

nicht konvex sein.

Für den Beweis des Satzes wird ein Lemma benötigt. Es werden konvexe Funktionen betrachtet, die auf einer nichtkonvexen Menge definiert sind. Das Lemma behandelt die konvexe Fortsetzung von solchen Funktionen auf die konvexe Hülle des Definitionsbereichs.

Lemma 3.10 (konvexe Fortsetzung auf die konvexe Hülle)
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei außerdem $J : V \supseteq U \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist eine konvexe Fortsetzung $\overline{J} : \mathrm{co}(U) \to \overline{\mathbb{R}}$ von J gegeben durch

$$\overline{J}(w) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i J(w_i) \; : \; \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i w_i = w, \; \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i = 1, \; \vartheta_i \geq 0, \; N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beweis: Für den Beweis schaue man sich [6, Aufgabe 4.13] an. ■

Beweis des Satzes 3.9: Angenommen $F \mapsto W(x,F)$ wäre konvex. Die Menge $\mathbb{R}^{3\times 3}_+$ ist nicht konvex, denn es gilt

$$-\mathrm{I}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\det(\mathrm{diag}(-3,1,-1)) = \det(\mathrm{diag}(1,-3,-1)) = 3 > 0$ und $\det(-\mathrm{I}_3) = -1$, also $\mathrm{diag}(-3,1,-1)$, $\mathrm{diag}(1,-3,-1) \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+$, aber $-\mathrm{I}_3 \notin \mathbb{R}^{3\times 3}_+$. Es gilt jedoch $-\mathrm{I}_3 \in \mathrm{co}(\mathbb{R}^{3\times 3}_+)$. Wegen $F = 1/2(\vartheta \mathrm{I}_3 + 2F) + 1/2(-\vartheta \mathrm{I}_3) \in \mathrm{co}(\mathbb{R}^{3\times 3}_+)$ für $\vartheta \gg 0$ und für $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beliebig ist $\mathrm{co}(\mathbb{R}^{3\times 3}_+) = \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Demnach existieren $0 < \vartheta_0 < 1$ und Matrizen F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+$, sodass

$$(1-\vartheta_0)F_0 + \vartheta_0 F_1 \notin \mathbb{R}^{3\times 3}_+.$$

Wäre nun $\overline{W}(x,\cdot) : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe Fortsetzung von $F \mapsto W(x,F)$ und betrachtete man die Funktion ω gegeben durch

$$\omega : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}} : \omega(\vartheta) := \overline{W}(x, (1-\vartheta)F_0 + \vartheta F_1),$$

dann folgte aus der Konvexität von $\overline{W}$ im zweiten Argument

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq\vartheta\leq 1} \omega(\vartheta) &\leq \sup_{0\leq\vartheta\leq 1} \{(1-\vartheta)\overline{W}(x,F_0) + \vartheta\overline{W}(x,F_1)\} \\
&= \sup_{0\leq\vartheta\leq 1} \{(1-\vartheta)\omega(0) + \vartheta\omega(1)\} \\
&\leq \max\{\omega(0),\omega(1)\} \\
&= \max\{W(x,F_0), W(x,F_1)\} < \infty.
\end{aligned}$$

Andererseits gälte

$$\begin{cases} \det((1-\vartheta)F_0 + \vartheta F_1) > 0 & \forall\vartheta\in[0,\vartheta_0), \\ \det((1-\vartheta_0)F_0 + \vartheta_0 F_1) = 0 \end{cases}$$

wegen der Stetigkeit der Determinante. Dann aber folgte $\lim_{\vartheta\to\vartheta_0^-} \omega(\vartheta) = \infty$ aus der Forderung $W(x,F) \to \infty$ für $\det F \to 0^+$. Dies ist ein Widerspruch. ■

Somit ist bewiesen, dass zumindest solche mathematischen Modellierungsfunktionen hyperelastischer Materialien, die eine explizite Abhängigkeit von $\det\nabla y$ aufweisen und die obige physikalische Forderung erfüllen, keine konvexen Energiedichtefunktionen bezüglich der zweiten Variablen sein können. Um jedoch trotzdem hinreichende Bedingungen für die benötigte schwache Folgenunterhalbstetigkeit von I zu gewinnen, folgt nun eine Auseinandersetzung mit schwächeren Konvexitätsbegriffen.

4 Quasikonvexität, Polykonvexität und Rang-1-Konvexität

Wie schon am Ende von Kapitel 3.2 angesprochen, ist die Konvexität ein wichtiger Begriff im Umgang mit Funktionen, die schwach folgenunterhalbstetig sind, jedenfalls im skalaren Fall ($n = 1$ oder $m = 1$). Im vektoriellen Fall, also $n > 1$ und $m > 1$, nimmt der Begriff der Quasikonvexität diese Stellung ein.
In der Praxis ist dieser Begriff jedoch schwer handzuhaben, da man dabei keine punktweise Bedingung nachweisen muss, sondern eine Bedingung im Mittel in einer Umgebung. Deshalb hat man einen Konvexitätsbegriff eingeführt, der hinreichend für die Quasikonvexität, und einen, der notwendig dafür ist. So gelangt man zur Polykonvexität und zur Rang-1-Konvexität, die leichter nachzuweisen sind.

4.1 Definitionen

Nun folgen die Definitionen der angekündigten Konvexitätsbegriffe. Der Übersichtlichkeit halber werden Abhängigkeiten der Variablen $x \in \overline{\Omega}$ und $w \in \mathbb{R}^m$ unterdrückt, da man die Konvexitätsbegriffe für den dritten Eingang von f definiert.

Definition 4.1 (Quasikonvexität)
Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{m\times n}; \mathbb{R})$, das heißt messbar und lokal integrierbar. Dann heißt f quasikonvex, wenn

$$f(F) \leq \frac{1}{|D|} \int_D f(F + \nabla w(x))dx$$

für alle beschränkten, offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und für alle $w \in W_0^{1,p}(D; \mathbb{R}^m)$, $p \in (1, \infty]$, gilt.

Bemerkung 4.2

i) In der Definition von Quasikonvexität sollte die Funktion f nicht den Wert Unendlich annehmen, da dies Probleme mit der später gezeigten Äquivalenz zur schwachen Folgenunterhalbstetigkeit nach sich zöge.

ii) Im weiteren Verlauf wird man Funktionen $w \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^m)$ betrachten, wenn es nicht anders ausgeschrieben ist.

iii) Die Definition kann abgeschwächt werden, indem man obige Bedingung nur für eine beschränkte, offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ fordert.

Beweis von Bemerkung 4.2 iii): Die eine Richtung der Äquivalenz ist trivial.
Sei nun die Quasikonvexitätsbedingung erfüllt für ein $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

beschränkt. Wegen der Offenheit von D existieren $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$, sodass $y_0 + \varepsilon E \subseteq D$. Für die Funktion

$$\tilde{w}(y) := \begin{cases} \varepsilon w\left(\frac{y-y_0}{\varepsilon}\right) & \text{für } y \in y_0 + \varepsilon E \\ 0 & \text{für } y \in D \setminus (y_0 + \varepsilon E) \end{cases}$$

gilt $\tilde{w} \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbb{R}^m)$ wegen $w \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbb{R}^m)$. Dann folgt mit dem Transformationssatz und der Voraussetzung an D

$$\begin{aligned}
\int_E f(F + \nabla w(x))dx &= \varepsilon^{-n} \int_{y_0+\varepsilon E} f\left(F + \nabla w\left(\frac{y-y_0}{\varepsilon}\right)\right) dy \\
&= \varepsilon^{-n} \left(\int_D f(F + \nabla \tilde{w}(y))dy - f(F)|D \setminus (y_0 + \varepsilon E)| \right) \\
&\geq \varepsilon^{-n} (f(F)|D| - f(F)|D \setminus (y_0 + \varepsilon E)|) \\
&= \varepsilon^{-n} f(F)|y_0 + \varepsilon E| = f(F)|E|
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Um die Definition der Polykonvexität anzuführen, werden noch einige Hilfsnotationen benötigt.

Definition 4.3 ($\tau(n,m)$)
Mit τ bezeichnet man im Folgenden die Funktion

$$\tau : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \ (n,m) \mapsto \sum_{s=1}^{\min\{n,m\}} \binom{m}{s}\binom{n}{s}.$$

Definition 4.4 ($\operatorname{cof}_s F$)
Mit $\operatorname{cof}_s F$ wird die Matrix aller $(s \times s)$-Minoranten der Matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet. Dabei gilt

$$\operatorname{cof}_s F|_{i,j}{}^{5} := (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} F_{i_1,j_1} & \dots & F_{i_1,j_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{i_s,j_1} & \dots & F_{i_s,j_s} \end{pmatrix},$$

wobei sich kein Zeilen- und kein Spaltenindex wiederholen darf und diese aufsteigend sortiert sind, also $i_1 < \ldots < i_s$ und $j_1 < \ldots < j_s$. Es gilt $\operatorname{cof}_s F \in \mathbb{R}^{\binom{m}{s}\times\binom{n}{s}}$.

Definition 4.5 (Polykonvexität)
Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ polykonvex, wenn eine konvexe Funktion $g : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert, sodass der Zusammenhang

$$f(F) = g(T(F))$$

[5] Die Indizierung ist an dieser Stelle etwas ungenau. Man schaue sich für zusätzliche Informationen die Quelle [7, S. 187f.] an.

für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besteht. Die Funktion T ist dabei definiert als

$$T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{\tau(n,m)} : \; F \mapsto \Big(F, \operatorname{cof}_2 F, \ldots, \operatorname{cof}_{\min\{n,m\}} F\Big) .$$

Definition 4.6 (Rang-1-Konvexität)
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt Rang-1-konvex, wenn

$$f(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1) \leq \vartheta f(F_0) + (1-\vartheta)f(F_1)$$

für alle $\vartheta \in [0,1]$ und für alle F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rg}(F_0 - F_1) \leq 1$ erfüllt ist.

Bemerkung 4.7
Mit dem Tensorprodukt $a_0 \otimes a_1 := a_0 a_1^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ für (Spalten-)Vektoren $a_0 \in \mathbb{R}^m$ und $a_1 \in \mathbb{R}^n$ kann man die Rang-1-Konvexität schreiben als Konvexität der Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} : \; \tilde{f}(\vartheta) := f(F + \vartheta a_0 \otimes a_1)$$

für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, für alle $a_0 \in \mathbb{R}^m$ und für alle $a_1 \in \mathbb{R}^n$.

4.2 Beziehungen der Konvexitätsbegriffe untereinander

Im skalaren Fall sind all diese Konvexitätsbegriffe äquivalent und sogar äquivalent zur Konvexität. Dies sieht man mit dem folgenden Satz 4.8 und der Beliebigkeit von n, $m \in \mathbb{N}$ sowie der Tatsache, dass die Rang-1-Konvexität im skalaren Fall der Konvexität entspricht.
Für den vektoriellen Fall ist dies nicht mehr so und dazu dient der folgende

Satz 4.8 (Beziehungen der Konvexitätsbegriffe untereinander)
Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ gilt

$$f \text{ konvex } \Rightarrow f \text{ polykonvex } \Rightarrow f \text{ quasikonvex } \Rightarrow f \text{ Rang-1-konvex} .$$

Ist $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$, so gilt

$$f \text{ konvex } \Rightarrow f \text{ polykonvex } \Rightarrow f \text{ Rang-1-konvex} .$$

Für den Beweis des Satzes benötigt man jedoch ein Lemma, welches Eigenschaften der Funktion T statuiert.

Lemma 4.9 (Eigenschaften der Funktion T)
Sei die Funktion $T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ wie in der Definition 4.5 der Polykonvexität gegeben.

i) Die Funktion T erfüllt für alle beschränkten, offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und für alle $w \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbb{R}^m)$ die Gleichung

$$T(F) = \frac{1}{|D|}\int_D T(F + \nabla w(x))dx.$$

ii) Für die Funktion T gilt für alle F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rg}(F_0 - F_1) \leq 1$ und für alle $\vartheta \in [0,1]$

$$T(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1) = \vartheta T(F_0) + (1-\vartheta)T(F_1).$$

Beweis: Im Wesentlichen wird im Beweis der Zusammenhang

$$\operatorname{cof}_s F|_{i,j} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} F_{i_1,j_1} & \dots & F_{i_1,j_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{i_s,j_1} & \dots & F_{i_s,j_s} \end{pmatrix}$$

zwischen der Matrix aller $(s \times s)$-Minoranten und der Determinante ausgenutzt. Für eine genaue Ausführung siehe [7, Proposition 3.1 und Theorem 3.2 in Kapitel 4]. ■

Beweis von Satz 4.8: Sei zunächst $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$.

i) konvex ⇒ polykonvex: Wählt man $g\left(F_1, F_2, \dots, F_{\min\{n,m\}}\right) := f(F_1)$, so ist g konvex und $f(F) = g(T(F))$ für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

ii) polykonvex ⇒ quasikonvex: Mit Lemma 4.9 i) und der Jensenschen Ungleichung, die im Prinzip die Konvexität einer Funktion in Form von Integralen ausdrückt, erhält man für alle beschränkten, offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und für alle $w \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|D|}\int_D f(F + \nabla w(x))dx &= \frac{1}{|D|}\int_D g(T(F + \nabla w(x)))dx \\ &\geq g\left(\frac{1}{|D|}\int_D (T(F + \nabla w(x))dx\right) \\ &= g(T(F)) \\ &= f(F). \end{aligned}$$

iii) quasikonvex ⇒ Rang-1-konvex: Zunächst folgt ein etwas technischerer Teil. Sei $\vartheta \in [0,1]$, F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rg}(F_0 - F_1) \leq 1$, $\varepsilon > 0$. Der technische Teil umfasst nun den Beweis, dass es eine beschränkte, offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, disjunkte Mengen

D_1, $D_2 \subseteq D$ und $w \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbb{R}^m)$ gibt, sodass

$$\begin{cases} ||D_1| - \vartheta|D|| \leq \varepsilon, \\ ||D_2| - (1-\vartheta)|D|| \leq \varepsilon, \\ \nabla w(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)(F_0 - F_1) & \text{für } x \in D_1, \\ -\vartheta(F_0 - F_1) & \text{für } x \in D_2, \end{cases} \\ \|\nabla w\|_{L^\infty} \leq K := K(F_0, F_1). \end{cases}$$

Da $\operatorname{rg}(F_0 - F_1) \leq 1$ ist, existiert eine invertierbare Matrix $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, sodass

$$F_0 - F_1 = R \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

und $\alpha = (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n})^T$.
Sei dann $D := (0,1)^n$ der offene Einheitswürfel und $N \in \mathbb{N}$. Man teile jede Kante des Würfels D in gleich große Abschnitte der Länge 2^{-N} auf. Jeden dieser Abschnitte unterteilt man weiter in zwei Teilintervalle, eines der Länge $\vartheta 2^{-N}$ und das andere der Länge $(1-\vartheta)2^{-N}$. Die Vereinigung der ersten Teilintervalle bezeichnet man mit I_N und die der zweiten mit J_N. Somit gilt $|I_N| = \vartheta$ und $|J_N| = 1 - \vartheta$. Sei nun $\tilde{w}_N$ so gewählt, dass gilt $\tilde{w}_N : D_1^N \cup D_2^N \to \mathbb{R}$

$$\tilde{w}_N(0, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\nabla \tilde{w}_N(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)\alpha & \text{für } x \in D_1^N, \\ -\vartheta\alpha & \text{für } x \in D_2^N \end{cases}$$

mit Mengen $D_1^N := I_N \times (1/N, 1 - 1/N)^{n-1}$ und $D_2^N := J_N \times (1/N, 1 - 1/N)^{n-1}$.
An dieser Stelle sei bemerkt, dass $|D_1^N| = \vartheta(1 - 2/N)^{n-1}$ und $|D_2^N| = (1-\vartheta)(1 - 2/N)^{n-1}$ gelten, also $|D_1^N| \to \vartheta$ und $|D_2^N| = 1 - \vartheta$ für $N \to \infty$.
Aus dieser Konstruktion folgt ebenfalls $\tilde{w}_N(1, x_2, \dots, x_n) = 0$ und außerdem die Lipschitzstetigkeit von $\tilde{w}_N$ mit einer Konstanten $K := K(\alpha) \leq \|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$ sowie $|\tilde{w}_N(x)| \leq K/2^N$ aufgrund der „Zickzack"-Eigenschaft der Funktion.
Die Funktion $w_N : D_1^N \cup D_2^N \cup \partial D \to \mathbb{R}^m$ sei nun, wie folgt, definiert

$$w_N(x) := \begin{cases} \tilde{w}_N(x) & \text{für } x \in D_1^N \cup D_2^N, \\ 0 & \text{für } x \in \partial D. \end{cases}$$

Zu zeigen bleibt also nur noch die Lipschitzstetigkeit von w_N.
Für x, $\tilde{x} \in D_1^N \cup D_2^N$ oder x, $\tilde{x} \in \partial D$ folgt die Lipschitzstetigkeit aus der Lipschitzstetigkeit von $\tilde{w}_N$.
Für $x \in D_1^N \cup D_2^N$ und $\tilde{x} \in \partial D$ mit $\tilde{x}_1 = 0$ oder $\tilde{x}_1 = 1$ (ohne Beschränkung

der Allgemeinheit sei $\tilde{x}_1 = 1$) folgt wegen $w_N(\tilde{x}) = 0$ und $w_N(1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{w}_N(1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ wieder aus der Lipschitzstetigkeit von $\tilde{w}_N$

$$\begin{aligned} |w_N(x) - w_N(\tilde{x})| &= |w_N(x_1, \ldots, x_n) - w_N(1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)| \\ &= |\tilde{w}_N(x_1, \ldots, x_n) - \tilde{w}_N(1, x_2, \ldots, x_n)| \\ &\leq K|x_1 - 1| \\ &\leq K\|x - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Für $x \in D_1^N \cup D_2^N$ und $\tilde{x} \in \partial D$ mit $\tilde{x}_1 \neq 0$ und $\tilde{x}_1 \neq 1$ definiert man sich zunächst $z \in [x, \tilde{x}] \cap \partial \left(D_1^N \cup D_2^N\right)$, wobei $[x, \tilde{x}]$ die Verbindungsstrecke zwischen x und $\tilde{x}$ bezeichnet. Dann gilt nach Konstruktion $\|z - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \geq 1/N \geq 1/2^N$. Damit folgt die Lipschitzstetigkeit von w_N, denn es ist aufgrund der Konstruktion von z

$$\begin{aligned} |w_N(x) - w_N(\tilde{x})| &\leq |w_N(x) - w_N(z)| + |w_N(z) - w_N(\tilde{x})| \\ &\leq K\|x - z\|_{\mathbb{R}^n} + |w_N(z)| \\ &\leq K\|x - z\|_{\mathbb{R}^n} + \frac{K}{2^N} \\ &\leq K\left(\|x - z\|_{\mathbb{R}^n} + \|z - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}\right) \\ &= K\|x - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Das Lemma von MacShane sichert nun die Existenz einer Fortsetzung $\tilde{w} \in W_0^{1,\infty}(D)$ von w_N mit $\|\nabla \tilde{w}(x)\|_{L^\infty} \leq K$ mit K unabhängig von N.
Definiert man nun $w(x) := R\left(\tilde{w}(x), 0, \ldots, 0\right)^T \in \mathbb{R}^m$ für alle $x \in D$, so ist der technische Teil dieses Beweises abgeschlossen.
Nun folgt mit der Quasikonvexität von f

$$\begin{aligned} |D| f(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1) &\leq \int_D f(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1 + \nabla w(x))dx \\ &= \int_{D_1} f(F_0)dx + \int_{D_2} f(F_1)dx \\ &\quad + \int_{D \setminus (D_1 \cup D_2)} f(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1 + \nabla w(x))dx \\ &= |D_1| f(F_0) + |D_2| f(F_1) \\ &\quad + \int_{D \setminus (D_1 \cup D_2)} f(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1 + \nabla w(x))dx. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich dann mit den Eigenschaften der Mengen D_1 und D_2 und den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

$$|D| f(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1) \leq \vartheta |D| f(F_0) + (1-\vartheta)|D| f(F_1),$$

also die Rang-1-Konvexität von f.

Sei nun $f : \mathbb{R}^{m \times n} \to \overline{\mathbb{R}}$.

i) konvex $\Rightarrow$ polykonvex: Es ändert sich nichts zum vorigen Beweis.

ii) polykonvex $\Rightarrow$ Rang-1-konvex: Seien $\vartheta \in [0,1]$, F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rg}(F_0 - F_1) \leq 1$. Dann folgt mit der Polykonvexität von f und Lemma 4.9 ii)

$$\begin{aligned} f(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1) &= g(T(\vartheta F_0 + (1-\vartheta)F_1)) = g(\vartheta T(F_0) + (1-\vartheta)T(F_1)) \\ &\leq \vartheta g(T(F_0)) + (1-\vartheta)g(T(F_1)) \\ &= \vartheta f(F_0) + (1-\vartheta)f(F_1). \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen. ■

4.3 Gegenbeispiel für die umgekehrten Implikationen

In diesem Abschnitt wird dargelegt, dass die Implikationen des Satzes 4.8 echte Implikationen sind, das heißt, es gelten keine Äquivalenzen wie im skalaren Fall.
Der einzige Fall, der bis heute noch ungeklärt ist, beschäftigt sich mit der Äquivalenz der Begriffe der Quasikonvexität und der Rang-1-Konvexität. Dazu nun folgender

Satz 4.10 (Gegenbeispiel)
Sei $\vartheta \in \mathbb{R}$ und die Funktion

$$\begin{cases} f_\vartheta : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \\ f(F) := \|F\|^2 \left(\|F\|^2 - 2\vartheta \det F\right) \end{cases}$$

gegeben, wobei $\|F\|^2 := \sum_{i,j=1}^{2} F_{i,j}^2$ die Frobeniusnorm bezeichne. Dann gelten:

i) f_ϑ ist konvex genau dann, wenn $|\vartheta| \leq \frac{2}{3}\sqrt{2}$ gilt.

ii) f_ϑ ist polykonvex genau dann, wenn $|\vartheta| \leq 1$ gilt.

iii) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass f_ϑ quasikonvex ist genau dann, wenn $|\vartheta| \leq 1+\varepsilon$ gilt.

iv) f_ϑ ist Rang-1-konvex genau dann, wenn $|\vartheta| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ gilt.

Beweis: Der Beweis kann in [2] nachvollzogen werden. ■

Wichtig zu bemerken ist, dass bis jetzt noch nicht gezeigt werden konnte, ob $1+\varepsilon < 2/\sqrt{3}$ erfüllt ist und damit die Tatsache, dass die Rang-1-Konvexität nicht die Quasikonvexität impliziert.

4.4 Charakterisierungen der Konvexitätsbegriffe

Es werden nun äquivalente Formulierungen der eingeführten Konvexitätsbegriffe aufgezeigt. Dabei sind nur Äquivalenzen für die Polykonvexität und die Rang-1-Konvexität von Nöten, da es selten, wie vorher schon bemerkt wurde, zu einem direkten Nachweis der Quasikonvexität kommt.

Satz 4.11 (Charakterisierung – Polykonvexität)
Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ und existiere eine konvexe Funktion $c : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass $f(F) \geq c(T(F))$ für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt. Es sind äquivalent:

i) f ist polykonvex.

ii) Für alle $F_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vartheta_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i = 1$ und

$$T\left(\sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i F_i\right) = \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i T(F_i)$$

gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i f(F_i).$$

Man kann dabei g aus der Definition der Polykonvexität, wie folgt, wählen:

$$g(F) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i f(F_i) :\ F = \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i T(F_i)\right\}.$$

Beweis: Der Beweis findet sich in [7, Theorem 1.3 in Kapitel 4]. ■

Satz 4.12 (Charakterisierung – Rang-1-Konvexität)
Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann sind äquivalent:

i) f ist Rang-1-konvex.

ii) Es gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \vartheta_i F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i f(F_i),$$

wobei $(\vartheta_i, F_i)_{1\leq i\leq N}$ die folgende (H_N)-Eigenschaft erfüllen.
Für $N \in \mathbb{N}$ erfüllen $(\vartheta_i, F_i)_{1\leq i\leq N}$, $\vartheta_i > 0$ mit $\sum_{i=1}^{N} \vartheta_i = 1$ und $F_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die (H_N)-Eigenschaft, wenn

a) für $N = 2$ gilt $\operatorname{rg}(F_1 - F_2) \leq 1$ und *b) für $N > 2$ gilt $\mathrm{rg}(F_1 - F_2) \leq 1$ und wenn die Tupel $(\tilde{\vartheta}_i, \tilde{F}_i)_{1 \leq i \leq N-1}$ für*

$$\begin{cases} \tilde{\vartheta}_1 := \vartheta_1 + \vartheta_2 & \text{und } \tilde{F}_1 := \frac{\vartheta_1 F_1 + \vartheta_2 F_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \\ \tilde{\vartheta}_i := \vartheta_{i+1} & \text{und } \tilde{F}_i := F_{i+1} \text{ für } 2 \leq i \leq N-1 \end{cases}$$

die Eigenschaft (H_{N-1}) erfüllen.

Beweis: Der Beweis kann als Beweis in [7, Proposition 1.4 in Kapitel 4] nachvollzogen werden. ■

Als letztes soll eine Charakterisierung von quasiaffinen Funktionen gegeben werden. Dies sind Funktionen, bei denen sowohl f als auch $-f$ quasikonvex sind. Bei ihnen lässt sich ein guter Zusammenhang zur Elastizitätstheorie anführen.

Satz 4.13 (Charakterisierung – Quasiaffinität)
Für $f : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

i) f ist quasiaffin.

ii) f ist Rang-1-affin, das heißt, f und $-f$ sind Rang-1-konvex.

iii) f ist polyaffin, das heißt, f und $-f$ sind polykonvex.

iv) Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$, sodass für alle $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt

$$f(F) = f(0) + \langle \alpha, T(F) \rangle.$$

Beweis: Für den Beweis siehe [7, Theorem 1.5 in Kapitel 4]. ■

Insbesondere ist der Punkt *iv)* von Interesse, denn er besagt, dass die Funktion f im Falle der Quasiaffinität nur von den $(s \times s)$-Minoranten der Matrix F abhängt.
Für den Fall $\mathbb{R}^3$ ergeben sich als Minoranten alle Einträge von F, also im Prinzip F selber, die Cofaktormatrix $\operatorname{cof} F$, und die Determinante der Matrix $\det F$.
Wie im Abschnitt 3.3 gesehen, sind das aber genau die Maße für die Deformation von Linien-, Flächen- und Volumenelementen des Körpers $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Abhängigkeit der Funktion f von diesen Maßen ist aus physikalischer Sicht äußerst sinnvoll.

4.5 Schwache Folgenunterhalbstetigkeit

Im Folgenden betrachtet man wieder die Funktion f mit drei Eingängen.
In diesem Abschnitt wird nun eine der wichtigsten Beziehungen zwischen der Quasikonvexität und der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit hergestellt, welche man für die Existenz vom betrachteten Minimierungsproblem

$$\min_{w \in V} I(w) = \min_{w \in V} \int_{\Omega} f(x, w(x), \nabla w(x)) dx$$

mit $V := y_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ benötigt.
Es wird sich herausstellen, dass man die Quasikonvexität als äquivalent zur schwachen Folgenunterhalbstetigkeit ansehen kann.
Zunächst folgt die Notwendigkeit der Quasikonvexität.

Satz 4.14 (Schwache Folgenunterhalbstetigkeit impliziert Quasikonvexität)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle für alle $(x, w, F) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$ die Wachstumsbedingung

$$|f(x, w, F)| \leq a(x, \|w\|_{\mathbb{R}^m}, \|F\|)$$

mit einer in den Eingängen w und F monoton wachsenden Funktion a, die lokal integrierbar bezüglich x ist.
Ist dann I schwach*-folgenunterhalbstetig in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, dann ist $F \mapsto f(x^0, w_0, F)$ quasikonvex für alle $x^0 \in \Omega$ und $w_0 \in \mathbb{R}^m$.

Es sei bemerkt, dass die schwach*-Folgenunterhalbstetigkeit von I in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ eine schwächere Voraussetzung ist als die schwache Folgenunterhalbstetigkeit in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $1 < p < \infty$. Dies ist der Fall, da die schwache und die schwach*-Konvergenz wegen Reflexivität in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ zusammenfallen und weiter da aus $L^{p_1}(\Omega;\mathbb{R}^m) \subseteq L^{p_2}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ für $p_1 \geq p_2$ wegen der Beschränktheit von Ω die Tatsache $W^{1,p'}(\Omega;\mathbb{R}^m) \subseteq W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ für $1/p + 1/p' = 1$ folgt.
Demnach ist die Quasikonvexität von $f(x, w, \cdot)$ auch notwendig für die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von I in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $1 < p < \infty$.

Beweis des Satzes 4.14: Um auf das Mitziehen einer Konstanten zu verzichten, wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $0 \in \Omega$ gilt.
Sei dann D ein offener Würfel der Kantenlänge $\alpha > 0$, α hinreichend klein, und Eckpunkt $0 \in \Omega$, sodass gilt

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < x_i < \alpha, \ i = 1, \dots, n\} \subseteq \Omega.$$

Sei weiter $x^0 \in \Omega$ und $h \gg 0$ so gewählt, dass gilt

$$Q_h := x^0 + \frac{1}{h} D \subseteq \Omega.$$

Man setze $w \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbb{R}^m)$ periodisch auf $\mathbb{R}^n$ fort und definiere

$$w_{k,h}(x) := \begin{cases} \frac{1}{kh} w(kh(x - x^0)), & x \in Q_h, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_h. \end{cases}$$

Dann gilt nach [7, Theorem 1.5 in Kapitel 2], welches sich mit der schwachen beziehungsweise schwach*-Konvergenz von periodisch fortgesetzten Funktionen befasst, $w_{k,h} \rightharpoonup^* 0$,

$k \to \infty$, in $W_0^{1,\infty}(Q_h;\mathbb{R}^m)$. Für $w_0 \in \mathbb{R}^m$ erhält man die endgültig zu untersuchende Funktion $\tilde{w}(x) := w_0 + F(x - x^0)$ und die Funktionenfolge $w_k(x) := \tilde{w}(x) + w_{k,h}(x)$, wobei gilt $w_k \rightharpoonup^* \tilde{w}$ in $W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.
Man unterteile nun Q_h in gleich große disjunkte offene Würfel $Q_{h,j}^k$ der Kantenlänge α/kh und definiere x^j als die Ecke, die x^0 am nächsten liegt. Dann erhält man

$$Q_h = \bigcup_{j=0}^{k^n-1} Q_{h,j}^k = \bigcup_{j=0}^{k^n-1} \left(x^j + \frac{1}{kh}D\right),$$

wobei man die Seitenflächen der Würfel vernachlässigt.
Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
I(w_k) &= \int_{\Omega} f(x, w_k(x), \nabla w_k(x))dx \\
&= \int_{\Omega\setminus Q_h} f(x, \tilde{w}(x), \nabla \tilde{w}(x))dx + \int_{Q_h} f(x, w_k(x), \nabla w_k(x))dx \\
&= \int_{\Omega\setminus Q_h} f(x, \tilde{w}(x), \nabla \tilde{w}(x))dx + \sum_{j=0}^{k^n-1} \int_{Q_{h,j}^k} f(x, w_k(x), \nabla w_k(x))dx \\
&= \int_{\Omega\setminus Q_h} f(x, \tilde{w}(x), \nabla \tilde{w}(x))dx + \sum_{j=0}^{k^n-1} \int_{Q_{h,j}^k} f(x^j, \tilde{w}(x^j), \nabla w_k(x))dx \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k^n-1} \int_{Q_{h,j}^k} \Big(f(x, w_k(x), \nabla w_k(x)) - f(x^j, \tilde{w}(x^j), \nabla w_k(x))\Big)\, dx. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Nun untersucht man jeden der Summanden in der Darstellung (3) für sich, wenn man für festes h den Zähler k im Sinne des Limes Inferior gegen Unendlich streben lässt. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k^n-1} \int_{Q_{h,j}^k} \Big(f(x, w_k(x), \nabla w_k(x)) - f(x^j, \tilde{w}(x^j), \nabla w_k(x))\Big)\, dx = 0.$$

Dies sieht man folgendermaßen ein: Wegen der schwach*-Konvergenz von $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ist sowohl die Folge $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ als auch $\{\nabla w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ essentiell durch Konstanten M_0, $M_1 > 0$ beschränkt. Aufgrund der kompakten Einbettung in die stetigen Funktionen kann man dann, bis auf eine Teilfolge, annehmen, dass $w_k \to \tilde{w}$ in $C(\Omega;\mathbb{R}^m)$ gilt. Dann kann man aber f auf einer durch die Konstanten M_0 und M_1 definierten kompakten Menge einschränken und hat dann wegen Stetigkeit von f sogar gleichmäßige Stetigkeit und die Existenz vom Maximum auf dieser kompakten Menge, was für die Anwendung des Satzes von Lebesgue nötig ist. Nutzt man dann noch die gleichmäßige

Stetigkeit von $\tilde{w}$ auf $\overline{\Omega}$, zur Not mit Null fortgesetzt, und die Aufteilung

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k^n-1} \int\limits_{Q_{h,j}^k} \Big(f(x, w_k(x), \nabla w_k(x)) - f(x^j, \tilde{w}(x^j), \nabla w_k(x))\Big)\, dx \\
= &\sum_{j=0}^{k^n-1} \int\limits_{Q_{h,j}^k} (f(x, w_k(x), \nabla w_k(x)) - f(x, \tilde{w}(x), \nabla w_k(x)))\, dx \\
&+ \sum_{j=0}^{k^n-1} \int\limits_{Q_{h,j}^k} \Big(f(x, \tilde{w}(x), \nabla w_k(x)) - f(x^j, \tilde{w}(x^j), \nabla w_k(x))\Big)\, dx,
\end{aligned}$$

so folgt die Behauptung mit dem Satz von Lebesgue jeweils angewandt auf die letzten beiden Summanden.
Mit dem Transformationssatz und dem Variablenwechsel $z = kh(x - x^j)$ sowie aufgrund der Periodizität von w gilt weiter

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k^n-1} \int\limits_{Q_{h,j}^k} f(x^j, \tilde{w}(x^j), \nabla w_k(x))dx \\
= &\sum_{j=0}^{k^n-1} \int\limits_{x^j + \frac{1}{kh}D} f(x^j, w_0 + F(x^j - x^0), F + \nabla w(kh(x - x^0)))dx \\
= &\sum_{j=0}^{k^n-1} \frac{1}{(kh)^n} \int\limits_D f(x^j, w_0 + F(x^j - x^0), F + \nabla w(z + kh(x^j - x^0)))dz \\
= &\sum_{j=0}^{k^n-1} \frac{1}{(kh)^n} \int\limits_D f(x^j, w_0 + F(x^j - x^0), F + \nabla w(z))dz.
\end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals ergibt sich für den zweiten Summanden in (3) somit

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k^n-1} \int\limits_{Q_{h,j}^k} f(x^j, \tilde{w}(x^j), \nabla w_k(x))dx \\
= &\frac{1}{|D|} \int\limits_{Q_h} \int\limits_D f(x, w_0 + F(x - x^0), F + \nabla w(z))dzdx \\
= &\frac{1}{|D|} \int\limits_{Q_h} \int\limits_D f(x, \tilde{w}(x), F + \nabla w(z))dzdx.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt mit der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von I

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega f(x, \tilde{w}(x), \nabla \tilde{w}(x))dx &= I(\tilde{w}) \leq \liminf_{k\to\infty} I(w_k) \\
&= \int\limits_{\Omega \setminus Q_h} f(x, \tilde{w}(x), \nabla \tilde{w}(x))dx
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{|D|}\int\limits_{Q_h}\int\limits_{D} f(x,\tilde{w}(x),F+\nabla w(z))dzdx.$$

und damit nach Umstellen mit $f(x,\tilde{w}(x),\nabla\tilde{w}(x)) = f(x,w_0+F(x-x^0),F)$ und Anwenden der Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

$$\begin{aligned}
&|D|f(x^0,w_0,F)\\
=\ & \lim_{h\to\infty}\frac{|D|}{|Q_h|}\int\limits_{Q_h} f(x,w_0+F(x-x^0),F)dx\\
\leq\ & \lim_{h\to\infty}\frac{1}{|Q_h|}\int\limits_{Q_h}\int\limits_{D} f(x,w_0+F(x-x^0),F+\nabla w(z))dzdx\\
=\ & \int\limits_{D} f(x^0,w_0,F+\nabla w(z))dz.
\end{aligned}$$

Somit wurde die Eigenschaft der Quasikonvexität für eine spezielle beschränkte, offene Menge nachgewiesen und nach Bemerkung 4.2 iii) ist $F\mapsto f(x^0,w_0,F)$ quasikonvex für alle $x^0\in\Omega$ und für alle $w_0\in\mathbb{R}^m$. ∎

Nun folgt eine Aussage über eine mögliche Umkehrung des eben bewiesenen Satzes. Zunächst in einer einfacheren Version, nämlich in Form von

Lemma 4.15
Sei $f:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ quasikonvex und gelte für $1\leq p\leq\infty$

i) $p=1$*:*

$$|f(F)|\leq\alpha(1+\|F\|)\qquad\forall F\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

mit $\alpha\geq 0$,

ii) $1<p<\infty$*:*

$$-\alpha(1+\|F\|^q)\leq f(F)\leq\alpha(1+\|F\|^p)\qquad\forall F\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

mit $\alpha\geq 0$, $p>q\geq 1$,

iii) $p=\infty$*:*

$$|f(F)|\leq\eta(\|F\|)\qquad\forall F\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

mit einer stetigen, monoton wachsenden Funktion η.

Dann ist I schwach folgenunterhalbstetig[6] in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $1\leq p\leq\infty$, für alle offenen, beschränkten Mengen $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$.

[6]Für $p=\infty$ ist hier die schwach*-Folgenunterhalbstetigkeit gemeint.

Beweis: Dieses Lemmas findet sich in [7, Theorem 2.3 in Kapitel 4] und dort kann auch der Beweis nachgelesen werden. ■

Satz 4.16 (Quasikonvexität impliziert schwache Folgenunterhalbstetigkeit)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ stetig und gelten für $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}
0 \leq f(x,w,F) &\leq \alpha(1 + \|w\|_{\mathbb{R}^m}^p + \|F\|^p) \\
|f(x,w_0,F_0) - f(x,w_1,F_1)| &\leq \beta(1 + \|w_0\|_{\mathbb{R}^m}^{p-1} + \|w_1\|_{\mathbb{R}^m}^{p-1} + \|F_0\|^{p-1} + \|F_1\|^{p-1})\cdot \\
&\quad \cdot(\|w_0 - w_1\|_{\mathbb{R}^m} + \|F_0 - F_1\|) \\
|f(x_0,w,F) - f(x_1,w,F)| &\leq \eta(\|x_0 - x_1\|_{\mathbb{R}^n})(1 + \|w\|_{\mathbb{R}^m}^p + \|F\|^p)
\end{aligned}$$

für alle x, x_0, $x_1 \in \Omega$, für alle w, w_0, $w_1 \in \mathbb{R}^m$ und für alle F, F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit α, $\beta > 0$ und η eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $\eta(0) = 0$.
Wenn f quasikonvex im dritten Eingang ist, so ist I schwach folgenunterhalbstetig in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Beweis: Sei $w_k \rightharpoonup w$ in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$.
Aufgrund der Offenheit von Ω gibt es eine Approximation $\{D_l\}_l$ von Ω durch disjunkte offene Würfel der Kantenlänge $1/N$. Sei dann N so groß gewählt, dass $|\Omega \setminus D_N| \leq \varepsilon$, wobei man $D_N := \bigcup_l D_l$ setzt.
Weiter seien die Schwerpunkte $\tilde{x}_l$ und $\tilde{w}_l$, wie folgt, definiert:

$$\begin{cases}
\tilde{x}_l := \frac{1}{|D_l|} \int\limits_{D_l} x dx, \\
\tilde{w}_l := \frac{1}{|D_l|} \int\limits_{D_l} w(x) dx.
\end{cases}$$

Dann gilt die Rechnung

$$\begin{aligned}
I(w_k) - I(w) &= \int\limits_{\Omega\setminus D_N} \left(f(x,w_k(x),\nabla w_k(x)) - f(x,w(x),\nabla w(x))\right) dx \\
&\quad + \int\limits_{D_N} \left(f(x,w_k(x),\nabla w_k(x)) - f(x,w(x),\nabla w_k(x))\right) dx \\
&\quad + \int\limits_{D_N} \left(f(x,w(x),\nabla w_k(x)) - f(x,w(x),\nabla w(x))\right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega\setminus D_N} \left(f(x,w_k(x),\nabla w_k(x)) - f(x,w(x),\nabla w(x))\right) dx \\
&\quad + \int\limits_{D_N} \left(f(x,w_k(x),\nabla w_k(x)) - f(x,w(x),\nabla w_k(x))\right) dx \\
&\quad + \sum_l \int\limits_{D_l} \left(f(x,w(x),\nabla w_k(x)) - f(\tilde{x}_l,\tilde{w}_l,\nabla w_k(x))\right) dx
\end{aligned}$$

$$+\sum_l \int_{D_l} \left(f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w_k(x)) - f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w(x))\right) dx \qquad (4)$$
$$+\sum_l \int_{D_l} \left(f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w(x)) - f(x, w(x), \nabla w(x))\right) dx.$$

Nun geht es im Prinzip nur noch darum, die Summanden in der letzten Darstellung jeweils gegen $-\varepsilon$ nach unten abzuschätzen, wobei der Term (4) eine besondere Rolle spielt, da auf ihn das Lemma 4.15 angewendet werden kann.
Wegen $f \geq 0$ erhält man für N groß genug

$$\int_{\Omega\setminus D_N} (f(x, w_k(x), \nabla w_k(x)) - f(x, w(x), \nabla w(x)))dx \geq - \int_{\Omega\setminus D_N} f(x, w(x), \nabla w(x))dx \geq -\varepsilon.$$

Unter Verwendung der Voraussetzungen an f erhält man mit der Hölder-Ungleichung und dem Satz von Rellich, also wegen $w_k \rightharpoonup w$ in $W^{1,p}(D_N; \mathbb{R}^m)$ folgt $w_k \to w$ in $L^p(D_N; \mathbb{R}^m)$, für k groß genug

$$\begin{aligned}
&\int_{D_N} (f(x, w_k(x), \nabla w_k(x)) - f(x, w(x), \nabla w_k(x)))dx \\
\geq\ & -\beta \int_{D_N} (1 + \|w(x)\|_{\mathbb{R}^m}^{p-1} + \|w_k(x)\|_{\mathbb{R}^m}^{p-1} + 2\|\nabla w_k(x)\|^{p-1})\|w(x) - w_k(x)\|_{\mathbb{R}^m} dx \\
\geq\ & -\beta \left(|D_N|^{1/q} + \|w\|_{L^p}^{p/q} + \|w_k\|_{L^p}^{p/q} + 2\|\nabla w_k\|_{L^p}^{p/q}\right) \|w - w_k\|_{L^p} \geq -\varepsilon.
\end{aligned}$$

Weiter erhält man wieder mit den Voraussetzungen an die Funktion f, der Hölder-Ungleichung und der Konvergenz $\tilde{x}_l \to x$ in $\mathbb{R}^n$ sowie $\tilde{w}_l \to w$ in L^p, der Stetigkeit von η und dem Satz von Lebesgue für N groß genug

$$\begin{aligned}
& \sum_l \int_{D_l} (f(x, w(x), \nabla w_k(x)) - f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w_k(x)))dx \\
=\ & \sum_l \int_{D_l} (f(x, w(x), \nabla w_k(x)) - f(x, \tilde{w}_l, \nabla w_k(x)))dx \\
& +\sum_l \int_{D_l} (f(x, \tilde{w}_l, \nabla w_k(x)) - f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w_k(x)))dx \\
=\ & -\beta \sum_l \int_{D_l} (1 + \|w(x)\|_{\mathbb{R}^m}^{p-1} + \|\tilde{w}_l\|_{\mathbb{R}^m}^{p-1} + 2\|\nabla w_k(x)\|^{p-1})\|w(x) - \tilde{w}_l\|_{\mathbb{R}^m} dx \\
& -\sum_l \int_{D_l} \eta(\|x - \tilde{x}_l\|_{\mathbb{R}^n})(1 + \|\tilde{w}_l\|_{\mathbb{R}^m}^p + \|\nabla w_k(x)\|^p)dx \\
\geq\ & -\beta \left(|D_N|^{1/q}(1 + \|\tilde{w}_l\|_{\mathbb{R}^m}^{p/q}) + \|w\|_{L^p}^{p/q} + 2\|\nabla w_k\|_{L^p}^{p/q}\right) \|w - \tilde{w}_l\|_{L^p} \\
& -\sum_l \int_{D_l} \eta(\|x - \tilde{x}_l\|_{\mathbb{R}^n})(1 + \|\tilde{w}_l\|_{\mathbb{R}^m}^p + \|\nabla w_k(x)\|^p)dx \\
\geq\ & -\varepsilon.
\end{aligned}$$

Genau mit der gleichen Argumentation erhält man

$$\sum_l \int_{D_l} (f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w(x)) - f(x, w(x), \nabla w(x)))dx \geq -\varepsilon.$$

Schließlich ergibt sich mit Lemma 4.15

$$\begin{aligned}
& \liminf_{k\to\infty} I(w_k) - I(w) \\
\geq\ & -4\varepsilon + \liminf_{k\to\infty} \sum_l \int_{D_l} (f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w_k(x)) - f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w(x)))dx \\
\geq\ & -4\varepsilon + \sum_l \liminf_{k\to\infty} \int_{D_l} (f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w_k(x)) - f(\tilde{x}_l, \tilde{w}_l, \nabla w(x)))dx \\
\geq\ & -4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, ist damit die Behauptung bewiesen. ■

Somit wurde bewiesen, dass die Quasikonvexität der Funktion f im dritten Argument in gewissem Sinne äquivalent zur schwachen Folgenunterhalbstetigkeit des Funktionals I ist.

4.6 Beispiele hyperelastischer Materialien

An dieser Stelle sollen einige Beispiele hyperelastischer Materialien in aller Kürze aufgeführt werden. Für nähere Informationen und Beweise sei auf die Bücher von Ciarlet [6] und Dacorogna [7] verwiesen.

Beispiele 4.17
Es werden hier die Energiedichtefunktionen einiger hyperelastischer Materialien tabellarisch aufgeführt:

St. Venant-Kirchhoff	$W(F) = \frac{\lambda}{2}\left(\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}(F^TF - I_3)\right)\right)^2 + \mu\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}(F^TF - I_3)\right)^2$
Ogden	$W(x,F) = c(x) + \sum_{i=1}^{M} a_i(x)(\\|F\\|^{\alpha_i} - 3) + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)(\\|\mathrm{cof}\,F\\|^{\beta_j} - 3) + d(\det F)$
Kompressible Neo-Hooke	$W(x,F) = a(x)(\\|F\\|^2 - 3) + d(\det F)$
Kompressible Mooney-Rivlin	$W(x,F) = a(x)(\\|F\\|^2 - 3) + b(x)(\\|\mathrm{cof}\,F\\|^2 - 3) + d_*(\det F)$

,

wobei λ, $\mu > 0$ die Lamé-Konstanten des Materials sind, a, b, c, a_i, $b_j \in L^1(\Omega)$ mit $a_i(x)$, $b_j(x) \geq \varepsilon > 0$, α_i, $\beta_j \geq 1$ und $d : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvex ist mit $d(\delta) \to \infty$ für $\delta \to 0^+$ und $\delta \to \infty$ sowie $d_*(\delta) := \tilde{c}\delta^2 - \tilde{d}\ln(\delta)$ mit $\tilde{c}$, $\tilde{d} > 0$.

Man sieht dabei sofort, dass kompressible Neo-Hooke- und kompressible Mooney-Rivlin-Materialien spezielle Ogden-Materialien sind. Man gelangt von den kompressiblen Neo-Hooke- und kompressiblen Mooney-Rivlin-Materialien zu den inkompressiblen, indem man den von $\det F$ abhängigen Term weglässt, denn für inkompressible Materialien gilt bekanntermaßen $\det F = 1$.

5 Ausblick

In diesem Abschnitt sollen einige weiterführende Inhalte aufgeführt werden. Wie sieht die Lösungtheorie zum Beispiel für Probleme mit nichtquasikonvexer Funktion f aus? Welche Theorie gibt es für Probleme, auf die man keine variationellen Techniken anwenden kann, die zu einer Aufgabe der Minimierung führen?
Im Folgenden wird auf die obigen Probleme kurz eingegangen und sie können zum Thema Relaxierung von Minimierungsproblemen in [7, Kapitel 5] und zu nichtvariationellen Techniken in [10, Abschnitt 3.6] sowie [9, Kapitel 9] vertieft werden.

5.1 Probleme ohne Quasikonvexitätsbedingung

Es gibt immer noch einige Aufgaben, die mit der bisher behandelten Theorie nicht gelöst werden können, zum Beispiel, wenn die Funktion f nicht quasikonvex im dritten Eingang ist. In diesem Fall behilft man sich mit einer Relaxierung des Problems, wie es in der Linearen und Ganzzahligen Optimierung ebenfalls oft zur Anwendung kommt. Man kann diesen Weg übrigens auch gehen, wenn das Ausgangsproblem nur schwer zu lösen ist, denn das relaxierte Problem kann unter Umständen weitaus einfacher zu lösen sein.
Um zum relaxierten Problem zu gelangen, modifiziert man die gegebene Aufgabe ein wenig und hofft, dass die relaxierte Aufgabe lösbar ist und im besten Fall etwas mit dem Ausgangsproblem zu tun hat.

5.1.1 Hüllen der eingeführten Konvexitätsbegriffe

Alle Beweise in diesem Abschnitt kann man in [7, Abschnitt 5.1] und den dort aufgeführten Quellen nachlesen.
Zunächst befasst man sich mit den so genannten Hüllen, besser Hüllfunktionen, der eingeführten Konvexitätsbegriffe, wobei die konvexe Hülle relativ gebräuchlich ist, denn sie hat viele Anwendungen in der konvexen Analysis und der Nichtlinearen Optimierung, und deshalb schon bekannt sein könnte.
Es wird wieder aus Gründen der Übersichtlichkeit die Abhängigkeit der ersten und zweiten Variablen von f unterdrückt.

Definition 5.1 (Hüllen der eingeführten Konvexitätsbegriffe)
Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann werden die konvexe, die quasikonvexe, die polykonvexe und die Rang-1-konvexe Hülle, wie folgt, definiert:

i) $\mathrm{C}\, f := \sup\{g \leq f \ : \ g \textit{ konvex}\}$,

ii) $\mathrm{Q}\, f := \sup\{g \leq f \ : \ g \textit{ quasikonvex}\}$,

iii) $\mathrm{P}\, f := \sup\{g \leq f \ : \ g \textit{ polykonvex}\}$, *iv)* $\mathrm{R}\, f := \sup\{g \leq f \;:\; g$ *Rang-1-konvex*$\}$.

Es sei darauf hingewiesen, dass auch die quasikonvexe Hülle für $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert wurde. Dies kann man machen, jedoch wird sich zeigen, wie schon in Abschnitt 4.1 bemerkt, dass es bei der Quasikonvexität mehr Sinn ergibt, Funktionen $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ zu untersuchen.
Außerdem ist schon aus Abschnitt 4.2 bekannt, dass die Beziehungen $\mathrm{C}\, f = \mathrm{P}\, f = \mathrm{Q}\, f = \mathrm{R}\, f = f$ für den skalaren Fall und im vektoriellen Fall $\mathrm{C}\, f \leq \mathrm{P}\, f \leq \mathrm{Q}\, f \leq \mathrm{R}\, f \leq f$ gelten.
Bevor man zu den äquivalenten Notationen für die eben definierten Funktionen kommt, werden an dieser Stelle zunächst einige Vorüberlegungen getätigt.

Definition und Satz 5.2 (konjugiertes Funktional)
Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ *gegeben. Die Funktion* $f^* : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ *mit*

$$f^*(F^*) := \sup_{F\in\mathbb{R}^{m\times n}} (\langle F^*, F\rangle - f(F))$$

heißt zu f *konjugiertes Funktional.*
Die Funktion f^* *ist stets konvex und schwach folgenunterhalbstetig. Weiter ist* $f^{**} \leq f$.

Definition und Satz 5.3 (polykonvex-konjugiertes Funktional)
Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ *gegeben. Die Funktion* $f^{\mathrm{P}} : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \overline{\mathbb{R}}$ *mit*

$$f^{\mathrm{P}}(\alpha) := \sup_{F\in\mathbb{R}^{m\times n}} (\langle \alpha, T(F)\rangle - f(F))$$

heißt zu f *polykonvex-konjugiertes Funktional. Es sei weiter* $f^{\mathrm{P\,P}}(F) := (f^{\mathrm{P}})^*(T(F))$.
Die Funktion $f^{\mathrm{P\,P}}$ *ist stets polykonvex und schwach folgenunterhalbstetig. Weiter ist* $f^{\mathrm{P\,P}} \leq f$.

Nun folgt der Satz, der die äquivalenten Notationen der Hüllen bereitstellt.

Satz 5.4 (Hüllen der eingeführten Konvexitätsbegriffe)
Seien $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ *und eine konvexe Funktion* $c : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $f(F) \geq c(T(F))$ *gegeben. Dann gelten*

i) $\mathrm{C}\, f(F) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{mn+1} \vartheta_i f(F_i) \;:\; F = \sum\limits_{i=1}^{mn+1} \vartheta_i F_i\right\}$,

ii) $\mathrm{P}\, f(F) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i f(F_i) \;:\; T(F) = \sum\limits_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \vartheta_i T(F_i)\right\}$,

iii) $\mathrm{R}\, f(F) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{N} \vartheta_i f(F_i) \;:\; F = \sum\limits_{i=1}^{N} \vartheta_i F_i,\ (\vartheta_i, F_i)\ \textit{erfülle}\ (H_N),\ N \in \mathbb{N}\right\}$.

Für $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ gilt mit einer beliebigen beschränkten, offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Q}\, f(F) = \inf \left\{ \frac{1}{|D|} \int\limits_D f(F + \nabla w(x))dx \;:\; w \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

Zudem erhält man für solche reellwertigen f

i) $\mathrm{C}\, f = f^{**}$,

ii) $\mathrm{P}\, f = f^{\mathrm{P}\,\mathrm{P}}$.

5.1.2 Relaxierung des Minimierungsproblems

Man betrachtet nun statt des Ausgangsproblems

$$\begin{cases} \min\limits_{w\in V} I(w) = \min\limits_{w\in V} \int\limits_{\Omega} f(x, w(x), \nabla w(x))dx \\ V := y_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m) \end{cases}$$

das relaxierte Problem

$$\min_{w\in V} \tilde{I}(w) = \min_{w\in V} \int\limits_{\Omega} \mathrm{Q}\, f(x, w(x), \nabla w(x))dx,$$

wobei $\mathrm{Q}\, f$ die quasikonvexe Hülle von f bezüglich des dritten Eingangs bezeichne.
Es gilt dann folgender

Satz 5.5 (Relaxiertes Problem)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand und weiter $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und gelten für $1 < p < \infty$

$$\begin{array}{rcl} a_0(x) + b\|F\|^p \le f(x, w, F) & \le & a_1(x) + d(\|w\|^p_{\mathbb{R}^m} + \|F\|^p) \\ |f(x, w_0, F_0) - f(x, w_1, F_1)| & \le & \beta(1 + \|w_0\|^{p-1}_{\mathbb{R}^m} + \|w_1\|^{p-1}_{\mathbb{R}^m} + \|F_0\|^{p-1} + \|F_1\|^{p-1}) \cdot \\ & & \cdot (\|w_0 - w_1\|_{\mathbb{R}^m} + \|F_0 - F_1\|) \\ |f(x_0, w, F) - f(x_1, w, F)| & \le & \eta(\|x_0 - x_1\|_{\mathbb{R}^n})(1 + \|w\|^p_{\mathbb{R}^m} + \|F\|^p) \end{array}$$

für alle x, x_0, $x_1 \in \Omega$, für alle w, w_0, $w_1 \in \mathbb{R}^m$ und für alle F, F_0, $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit a_0, $a_1 \in L^1(\Omega)$, $d \ge b > 0$, $\beta > 0$ und η eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $\eta(0) = 0$.
Ist nun $y \in V$, dann existiert eine Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$, sodass

i) $y_k \rightharpoonup y$ *in* $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$,

ii) $I(y_k) \to \tilde{I}(y)$.

Man rufe sich an dieser Stelle die Ähnlichkeit zu den Sätzen über die Äquivalenz von Quasikonvexität von f im dritten Argumten und der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von I in Erinnerung (Satz 4.14 und Satz 4.16).
Nach dem letzten Satz muss man also im Wesentlichen nur das relaxierte Problem auf Lösbarkeit überprüfen, also im Prinzip nur die schwache Koerzitivität des Funktionals I nachweisen. Dann erhält man eine gegen die Lösung in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ schwach konvergente Folge, deren Funktionalfolge von I gegen das Minimum des relaxierten Problems konvergiert.
Zuletzt sei bemerkt, dass der vorstehende Satz die Beziehung $\inf_{w\in V} I(w) = \inf_{w\in V} \tilde{I}(w)$ offenbart.

5.2 Nichtvariationelle Techniken

Bei den nichtvariationellen Techniken betrachtet man ganz allgemein Differentialoperatoren über einem Vektorraum V als Funktionen $A : V \to V^*$. Die Operatoren A erfüllen dann eine gewisse Monotoniebedingung.
Die Beweise können in [10, Abschnitt 3.4] und [18, Kapitel 26 und 27] nachgelesen werden.
Die bekanntesten Sätze sind eine Verallgemeinerung des Satzes von Browder und Minty und der Satz von Brézis über Operatoren, die die (M)-Eigenschaft erfüllen.
Zunächst werden einige Definitionen benötigt.

Definitionen 5.6
Sei V ein Banachraum. Ein Operator $A : V \to V^*$

i) heißt monoton, falls $\langle A(w_0) - A(w_1), w_0 - w_1\rangle \geq 0$ für alle w_0, $w_1 \in V$ gilt.

ii) heißt radialstetig, falls die Funktion $\vartheta \mapsto \langle A(w_0 + \vartheta w_1), w_1\rangle$ für alle w_0, $w_1 \in V$ auf $[0,1] \ni \vartheta$ stetig ist.

iii) heißt verstärkt stetig, falls A schwach konvergente Folgen in konvergente Folgen abbildet.

iv) heißt koerzitiv, falls eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(R) \to \infty$ für $R \to \infty$ existiert, sodass $\langle A(w), w\rangle \geq \gamma(\|w\|_V)\|w\|_V$ für alle $w \in V$ gilt.

v) erfüllt die (M)-Eigenschaft, falls aus $w_k \rightharpoonup w$, $A(w_k) \rightharpoonup b$ und $\limsup_{k\to\infty}\langle A(w_k), w_k\rangle \leq \langle b, w\rangle$ die Bedingung $A(w) = b$ folgt.

Nun werden zwei Sätze aufgeführt, die sich mit der Lösbarkeit der Aufgabe $(A+B)(y) = f$ beziehungsweise $A(y) = f$ für ein beliebiges $f \in V^*$ beschäftigen, das heißt, ein Element $y \in V$ zu finden, welches eine der obigen Gleichungen erfüllt.

Satz 5.7 (Verallgemeinerung des Satzes von Browder und Minty)
Sei V ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum, A, $B : V \to V^*$, wobei A monoton und radialstetig, B verstärkt stetig sowie $A + B$ koerzitiv seien. Dann ist der Operator $A + B : V \to V^*$ surjektiv.

Satz 5.8 (Satz von Brézis)
Sei V ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum und $A : V \to V^*$ ein beschränkter, koerzitiver Operator, der die (M)-Eigenschaft erfülle. Dann ist der Operator A surjektiv.

6 Schluss

In dieser Arbeit wurden als erster Meilenstein die Massenbilanz und die Impulsbilanz für hyperelastische Materialien in Lagrangescher Fassung hergeleitet, da man diese mit Hilfe der Variationsrechnung als Aufgabe der Minimierung von Energiefunktionalen umschreiben kann.
Um nun diese Minimierungsaufgabe zu lösen, die in Gestalt einer Integro-Differentialgleichung auftritt, stellt man an die Funktion, die über das Integral definiert ist, die Bedingungen der schwachen Koerzitivität und der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit. Diese kann man umschreiben, sodass daraus Bedingungen an den Integranden werden: eine Koerzitivitätsbedinung und die Quasikonvexität. Weiter wird bewiesen, dass die Quasikonvexität des Integranden als äquivalent zur schwachen Folgenunterhalbstetigkeit der Funktion, die über das Integral definiert ist, angesehen werden kann.
Dass man sich überhaupt mit einem anderen Begriff als der Konvexität auseinander setzen muss, rührt aus der physikalischen Überlegung her, dass die Energie, die sich einstellt, wenn man einen Körper auf ein Volumen der Größe Null zusammenpressen möchte, Unendlich groß werden sollte.
Es sei außerdem erwähnt, dass aufgezeigt wurde, dass unter gewissen physikalisch-mechanischen Voraussetzungen, nämlich der Bezugssysteminvarianz und der Isotropie des hyperelastischen Materials, die Energiedichtefunktion genau von den Maßen für die Deformation von Volumen-, Flächen- und Linienelementen des Körpers abhängt, also von der Determinante und der Cofaktormatrix des Deformationsgradienten sowie dem Deformationsgradienten selbst. Diese Abhängigkeit tritt ebenfalls bei Quasiaffinität des Integranden ein.
Nachdem man diese Arbeit gelesen hat, wird wahrscheinlich klar, warum John M. Ball im eingangs aufgeführten Zitat die von ihm entwickelte Existenztheorie für Minimierer von Energiefunktionalen in der dreidimensionalen nichtlinearen Elastizitätstheorie als eine seiner größten Errungenschaften bezeichnet, da es zuvor keine Theorie gegeben hatte, die einen Vergleich zur obigen realitätsnahen Theorie hätte ziehen können.

Literaturverzeichnis

[1] E. Acerbi, N. Fusco: Semicontinuity Problems in the Calculus of Variations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86** (1984), 125-145

[2] J. Alibert, B. Dacorogna: An Example of a Quasiconvex Function that is not Polyconvex in Two Dimensions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **117** (1992), 155-166

[3] J. M. Ball: Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1977), 337-403

[4] J. M. Ball, F. Murat: Remarks on Rank-One Convexity and Quasiconvexity, In B.D. Sleeman and R.J. Jarvis, editors, *Ordinary and partial differential equations*, Volume III, pages 25–37. Pitman, 1991

[5] P. M. Ban: *Anwendungen der getrennt konvexen Funktionale in der Mechanik*, Dissertation an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2007

[6] P. G. Ciarlet: *Mathematical Elasticity - Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988

[7] B. Dacorogna: *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New York, 1989

[8] B. Dacorogna, P. Marcellini: *Implicit Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1999

[9] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2002

[10] E. Emmrich: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen – Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*, Vieweg, Wiesbaden, 2004

[11] P. Marcellini: Approximation of Quasiconvex Functions, and Lower Semicontinuity of Multiple Integrals, *Manuscripta Math.* **51** (1985), 1-28

[12] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, New Jersey, 1983

[13] N. G. Meyers: Quasi-Convexity and Lower Semicontinuity of Multiple Variational Integrals of any Order, *Trans. Amer. Math. Soc.* **119** (1965), 125-149

[14] C. B. Morrey: Quasi-Convexity and the Lower Semicontinuity of Multiple Integrals, *Pacific J. Math.* **2** (1952), 25-53

[15] W. H. Müller, F. Ferber: *Technische Mechanik für Ingenieure*, Hanser, München, 2012

[16] P. Pedregal: *Variational Methods in Nonlinear Elasticity*, SIAM, Philadelphia, 2000

[17] P. Pedregal, V. Šveràk: A Note on Quasiconvexity and Rank-One Convexity for 2×2 Matrices, *Journal of Convex Analysis* **5** (1998), 107-117

[18] E. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B – Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990