Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Bachelorarbeit

im Studiengang Mathematik

Äquivalenz von Entropie-, renormalisierten und milden Lösungen nichtlinearer Diffusionsgleichungen mit L^1-Daten

Matthias Eisenmann

betreut von Prof. Dr. Petra Wittbold und Prof. Dr. Etienne Emmrich

9. Mai 2012

Die selbstständige und eigenständige Anfertigung versichert an Eides statt:

Berlin, den

(Matthias Eisenmann)

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden instationäre nichtlineare Diffusionsgleichungen, das heißt quasilineare, parabolische Gleichungen in mehreren Raumdimensionen mit homogenen DIRICHLET-Randdaten betrachtet. Der Anfangswert und die rechte Seite sind lediglich integrierbar, daher kann nicht auf das Konzept der schwachen Lösung zurückgegriffen werden. Es wird untersucht unter welchen Voraussetzungen die Begriffe der Entropie-, der renormalisierten und der milden Lösungen übereinstimmen.

Inhalt

1 Einführung

In dieser Arbeit geht es um verschiedene Lösungsbegriffe für nichtlineare Diffusionsgleichungen. Diffusionsvorgänge treten sowohl in der Natur als auch in technischen Prozessen in verschiedenen Formen auf. Ein wichtiges Beispiel ist die Wärmeleitung, welche durch die Gleichung

$$u_t - \Delta u = f$$

auf Gebieten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ beschrieben wird. Die Wärmeleitung ist ein linearer Diffusionsprozess. Um allerdings turbulente Strömungen von so genannten *nicht-*NEWTON*'schen Fluiden* (etwa Blut oder zähfließende Polymere) zu beschreiben, ist die Verwendung des p-LAPLACE-*Operators* vonnöten. Es ergibt sich die Gleichung

$$u_t - \Delta_p u = f,$$

wobei $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ mit einem Parameter $p \in (0, \infty)$. In der Werkstofftechnik ist der Fluss von Gasen durch so genannte *poröse Medien* (etwa Sandstein, Kalkstein, Schieferton etc.) von Bedeutung. Die zugehörige Poröse-Medien-Gleichung ähnelt der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u^m = f.$$

Dies ist ein anderes Beispiel für eine nichtlineare Diffusionsgleichung. Häufig wird auch die allgemeinere Form

$$u_t - \Delta\Phi(u) = f$$

verwendet. Dabei ist Φ eine monoton wachsende Funktion und f integrierbar. Für solche Gleichungen sind DIRICHLET-Randbedingungen und ein Anfangswert u_0 aus $L^1(\mathbb{R}^N)$ häufig natürliche Voraussetzungen, etwa als Dichte oder Konzentration eines Diffusionsprozesses oder der Temperatur eines Mediums. Für eine spezielle Betrachtung der Poröse-Medien-Gleichung siehe VÁZQUEZ [25]. Wir werden uns allerdings hier nicht mit Operatoren dieser Art, die im Wesentlichen von u abhängen, sondern mit solchen, deren Abhängigkeit im Wesentlichen durch ∇u gegeben ist, beschäftigen, was zum Beispiel durch den p-LAPLACE gegeben ist.
Sobald die Daten nicht mehr glatt genug sind, etwa wenn die rechte Seite keine stetige Funktion ist, kann die klassische Lösungstheorie auf solche Probleme nicht mehr angewendet werden. Die schwache Lösungstheorie beruht darauf, dass diese Problemstellung in ein variationelles Evolutionsproblem

$$\begin{cases} u' + \mathcal{A}u &= f \quad \text{in } (0,T), \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

mit einem Operator $\mathcal{A}$, der von einem passenden reflexiven und separablen BANACH-Raum in dessen Dualraum abbildet, umgewandelt wird. Letztlich reduziert sich die Frage der Lösbarkeit darauf, ob $\frac{d}{dt} + \mathcal{A}$ surjektiv ist. Für rechte Seiten, die nur aus L^1 sind, schlägt diese Vorgehensweise fehl, da $L^1(\Omega)$ nicht in $W^{-1,p}(\Omega)$, dem Dualraum von $W^{1,p}(\Omega)$ aus dem $\mathcal{A}$ abbildet, enthalten ist, wenn man Gebiete Ω betrachtet, deren Dimensionen größer als Eins sind. Ebenfalls problematisch ist, dass $L^1(\Omega)$ kein reflexiver BANACH-Raum ist. Um dieser Problematik zu begegnen, gibt es verschiedene Ansätze.

Der erste Ansatz, der in dieser Arbeit behandelt wird, ist der der *renormalisierten Lösung*. Dieser Begriff wurde erstmals von DIPERNA und LIONS [10] für die BOLTZMANN-Gleichung definiert, bei der eine Funktion $f = f(t, x, \xi)$ (eine Dichtefunktion, dabei ist t die Zeit-, x die Orts- und ξ die Impulsvariable) gesucht ist, die

$$\begin{cases} f_t + \xi \cdot \nabla_x f & = Q(f, f) \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \\ f(0, \cdot, \cdot) & = f_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \end{cases}$$

erfüllt. Hierbei wird die Gleichung wie folgt umformuliert. Sei dazu

$$g := \log(1 + f).$$

Eine nichtnegative Funktion f (diese Voraussetzung ergibt Sinn, da f eine Verteilungsdichte modelliert) ist eine renormalisierte Lösung der BOLTZMANN-Gleichung, wenn g die Gleichung

$$\begin{cases} g_t + \xi \cdot \nabla_x g & = \frac{1}{1+f} Q(f, f) \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \\ f(0, \cdot, \cdot) & = f_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \end{cases}$$

im distributionellen Sinne löst. Es wird letztlich nur eine simple Substitution durchgeführt. Die Funktion g kann man sich leicht als die gesuchte Funktion f auf einer logarithmischen Skala vorstellen. Von großem Nutzen ist hier der Funktionsverlauf des Logarithmus. Für große Zahlen n spielt der Bereich, in dem f kleiner als n ist, in der umformulierten Gleichung eine wichtigere Rolle als vor der Substitution.

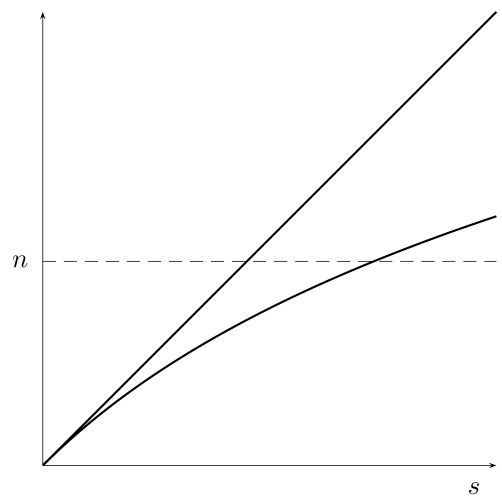

Abbildung 1: Skalierungen des Wertebereichs im Vergleich, $\log(1 + s)$ und s.

Die Definition wurde von LIONS und MURAT [21] und BOCCARDO et al. [7] auf elliptische Probleme erweitert. Betrachtet werden dabei Gleichungen der Form

$$\begin{cases} -\text{div } a(x,u,\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, wobei a eine monotone, koerzitive, einer Wachstumsbedingung in u und ∇u genügende CARATHÉODORY-Funktion* ist. Die renormalisierte Lösung ist auch hier wiederum eine distributionelle Lösung einer Familie umformulierter Gleichungen. Sei hierfür $h \in C_c^1(\mathbb{R})$, also eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Die Gleichung wird hier formal mit $h(u)$ multipliziert. Man erhält

$$\begin{cases} -\text{div}(a(x,u,\nabla u))h(u) &= fh(u) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

In BOCCARDO et al. [7] wird gezeigt, dass für dieses Problem eine Lösung u aus $W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert. Die Verwendung für Evolutionsprobleme in der Fluidmechanik stammt von LIONS [20]. Da sich diese im wesentlichen nicht von der hier verwendeten Formulierung aus BLANCHARD et al. [6] und DRONIOU und PRIGNET [11] unterscheidet, soll sie an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden. Die hier verwendete Formulierung wird in Kapitel 2.1 beschrieben.

Der zweite Ansatz, der sich parallel zu den renormalisierten Lösungen entwickelt hat, ist der der sogenannten *Entropielösung*. Dieser wurde für quasilineare Probleme der Form

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x &= 0 \quad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \end{cases}$$

entwickelt. Ist etwa f eine konvexe Funktion, so kann eine distributionelle Lösung der obigen Gleichung Unstetigkeiten haben, wobei $u(t, x-0)$ größer als $u(t, x+0)$ wäre. Eine solche Gleichung hat in der Regel eine Vielzahl von distributionellen Lösungen. Die Frage ist dann, welche die *physikalisch relevante* ist. Wir wollen dies am Beispiel der HOPF-Gleichung (der eindimensionalen Gasdynamikgleichung), die auch als BURGERS-Gleichung bezeichnet wird,

$$u_t + uu_x = 0, \tag{1.1}$$

erörtern, wir setzen also $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Eine Lösung $u = u(t,x)$ dieser Gleichung beschreibt die Geschwindigkeit des Partikel eines *idealen Gases* im Ort x zum Zeitpunkt t. Ideale Gase existieren allerdings nur theoretisch. In der Praxis fasst man ein Gas als ideal auf, wenn die *Viskosität* ε, das heißt die Zähigkeit, eines *realen Gases* vernachlässigbar klein ist. In diesem Sinne kann die HOPF-Gleichung als Grenzwert der viskosen BURGERS-Gleichung

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \tag{1.2}$$

*All diese Anforderungen werden durch den p-LAPLACE-Operator, der das Modellproblem für diese Art von Problemen darstellt, erfüllt.

interpretiert werden. Man nennt dies die Methode der *verschwindenden Viskosität.* Wir wollen im weiteren betrachten, wie sich die kinetische Energie

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\ dx$$

des Systems in der Zeit verändert. Für klassische Lösungen der HOPF-Gleichung (1.1) gilt, dass $\mathcal{E}$ in der Zeit konstant bleibt. Hat man allerdings eine Lösung u^ε der approximierenden BURGERS-Gleichung (1.2), so stellt man fest, dass

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon u_t^\varepsilon\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(\varepsilon u_{xx}^\varepsilon - u^\varepsilon u_x^\varepsilon)\ dx \\ &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} (u_x^\varepsilon)^2\ dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Diese Rechnung nutzt aus, dass man davon ausgeht, dass u für $|x| \to \infty$ schnell genug gegen Null geht. Daraus kann außerdem geschlossen werden, dass $\frac{d\mathcal{E}}{dt} < 0$ ist, wenn u^ε nicht konstant Null ist. Man stellt fest, dass $\mathcal{E}$ eine in der Zeit nicht wachsende Funktion ist, für eine physikalisch relevante Lösung der HOPF-Gleichung sollte dies folglich ebenso gelten. Der Grund dafür ist, dass die BURGERS-Gleichung in der Zeit nicht umkehrbare Prozesse beschreibt, also solche, die Entropie erzeugen. Betrachten wir nun die schwache Formulierung. In dieser muss die Integralgleichung

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(u\varphi_t + f(u)\varphi_x\Big) dxdt = 0 \tag{1.3}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R})$ erfüllt sein. Wir wollen nun (1.3) und das Entropiewachstum miteinander verbinden. Angenommen, u ist eine beschränkte und auf $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ messbare Funktion und erfüllt die Ungleichung

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(|u-k|\varphi_t + \operatorname{sign}_0(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x\Big) dxdt \geq 0 \tag{1.4}$$

für alle nichtnegativen Funktionen $\varphi \in C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R})$ und Konstanten $k \in \mathbb{R}$, dann erfüllt diese auch (1.3)[†]. Denn wählt man $k > \|u\|_\infty$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big((k-u)\varphi_t + (f(k)-f(u))\varphi_x\Big) dxdt \\ &= -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(u\varphi_t + f(u)\varphi_x\Big) dxdt. \end{aligned}$$

[†]Dass die Gleichung auch für beliebige Testfunktionen gilt, folgt daraus, dass jede Testfunktion als Differenz zweier nichtnegativer Testfunktionen dargestellt werden kann.

Wiederholt man dieses Argument für $k < -\|u\|_\infty$, so sieht man ein, dass u die Beziehung (1.3) erfüllt. Die Familie von Ungleichungen (1.4) beruht auf der Methode der verschwindenden Viskosität. Dafür betrachten wir eine beliebige konvexe Funktion $E \in C^2(\mathbb{R})$ und eine Lösung u von (1.2). Es gilt

$$\begin{aligned} E'(u)u_t &= E(u)_t, \\ E'(u)uu_x &= \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_k^{u(t,x)} \xi E'(\xi) d\xi, \\ E'(u)u_{xx} &= E(u)_{xx} - E''(u)u_x^2. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir also (1.2) mit $E'(u)$, erhalten wir

$$\begin{aligned} E(u)_t + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_k^{u(t,x)} \xi E'(\xi) d\xi \\ = \varepsilon(E(u)_{xx} - E''(u)u_x^2) \\ \leq \varepsilon E(u)_{xx}. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ erhalten wir damit in der schwachen Formulierung

$$-\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(E(u)\varphi_t + \varphi_x \int\limits_k^{u(t,x)} \xi E'(\xi) d\xi \Big) dx dt \leq 0,$$

wenn $\varphi \geq 0$. Wählen wir nun für E eine Folge E_m, die gegen $s \mapsto |s-k|$ und deren Ableitungsfolge gegen $s \mapsto \operatorname{sign}_0(s-k)$ passend konvergieren, so erhalten wir (1.4). Für die genauen Rechnungen und weitere Details verweisen wir auf Chechkin und Goritsky [8].

Eine Funktion, die (1.4) erfüllt, nennt man eine *Entropielösung*, (1.4) nennt man Kružkovs *Entropiebedingung*, siehe dazu Kružkov [18].

Eine Anpassung auf so genannte Diffusions-Konvektionsgleichungen der Form

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \frac{\partial}{\partial y} f(u) \quad \text{in } [0,\infty) \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot,\cdot) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

wurde von Escobedo et al. [14] vorgenommen. Hier werden Entropietestfunktionen der Form $|u - \psi(x)|$ für glatte Funktionen ψ betrachtet, bei Kružkov waren dagegen konstante Funktionen verlangt. Es ergibt sich nun folgende Familie von Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}|u - \psi(x)| - \Delta_x |u - \psi(x)| \\ \leq\ &\frac{\partial}{\partial y}[(f(u) - f(\psi(x)))\operatorname{sign}_0(u - \psi(x))] + \operatorname{sign}_0(u - \psi(x))\Delta_x \psi(x), \end{aligned}$$

die im distributionellen Sinne erfüllt sein sollen. Eine Entropielösung der obigen Diffusions-Konvektionsgleichung ist in diesem Fall eine Funktion

$$u \in C((0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N),$$

die diese Familie von Ungleichungen erfüllt. Eine andere Erweiterungsmöglichkeit bietet sich an, indem man die Forderung nach der Beschränktheit fallen lässt und die Entropiebedingung nur auf dem Bereich betrachtet, in dem der Lösungskandidat beschränkt ist. Auf diese Weise verfuhren BÉNILAN et al. [2]. Bei der Betrachtung der Gleichung

$$-\text{div } a(x, \nabla u) = f \text{ in } \Omega$$

mit $f \in L^1(\Omega)$ wurde die Entropiebedingung für Testfunktionen $T_k(u - \varphi)$ mit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ formuliert. Dabei ist T_k die sogenannte *Abschneidefunktion*, die die eingesetzte Funktion abschneidet, wenn diese größer als k oder kleiner als $-k$ wird. $T_k(u)$ verhält sich also wie u selbst, so lange u im Betrag kleiner als k ist und ist ansonsten konstant k, beziehungsweise $-k$. Man erhält also

$$\int\limits_{\{|u-k|\leq k\}} a(x, \nabla u) \cdot (\nabla u - \nabla \varphi)\ dx \leq \int\limits_{\Omega} T_k(u - \varphi) f\ dx$$

für alle $k > 0$. Eine Entropielösung für diese Gleichung mit DIRICHLET-Randbedingungen ist eine auf Ω messbare Funktion u, für die $T_k(u)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt und die die Entropiebedingung erfüllt. Eine Verallgemeinerung auf nichtlineare Diffusionsgleichungen der Form

$$\begin{cases} u_t - \text{div } a(t, x, u\nabla u) & = f \quad \text{in } \mathcal{Q} = (0, T) \times \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{auf } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) & = u_0 \quad \text{in } \Omega \end{cases}$$

erfolgt in DRONIOU und PRIGNET [11] und wird in Kapitel 2.2 erläutert.

Der dritte Ansatz beruht auf dem Halbgruppenansatz für Evolutionsprobleme. In diesem werden Probleme folgender Art betrachtet

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au & = f, \\ u(0) & = u_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Dabei sei A ein linearer Operator der Form $A : D(A) \subset X \to X$ und X ein BANACH-Raum. Ist A ein beschränkter, also stetiger, Operator, so erhält man die Lösung u durch die Formel von Duhamel, siehe zum Beispiel EMMRICH [12, Kap. 7],

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Dabei ist $e^{-tA} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-tA)^n}{n!}$ der so genannte Lösungsoperator. An der Definition lässt sich erkennen, dass e^{-tA} nur sinnvoll definiert werden kann, wenn A beschränkt ist. Für unbeschränkte Operatoren definiert man eine *Halbgruppe* als eine Familie von Operatoren $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, wenn für diese gilt, dass

$$S(t + s) = S(t)S(s) \text{ für alle } t, s \geq 0,$$
$$S(0) = I.$$

Eine solche Halbgruppe soll nun durch den Operator A erzeugt werden, das heißt, dass sich Au für alle $u \in D(A)$ durch

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t}$$

darstellen lässt. Man nennt A dann den *infinitesimalen Erzeuger* von $(S(t))_{t \geq 0}$. Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen ein Operator A Erzeuger einer solchen Halbgruppe ist. Der *Satz von* Hille-Yosida, siehe etwa Engel und Nagel [13, Kap. 2], ist das klassische Ergebnis der linearen Halbgruppentheorie. Dieser sagt aus, dass ein Operator A genau dann eine nichtexpansive, stark stetige Halbgruppe erzeugt, wenn $D(A)$ dicht in X liegt, die Resolventenmenge von A die rechte reelle Halbachse umfasst und die zugehörigen Resolventen $R_A(\lambda)$ in der Operatornorm durch $\frac{1}{\lambda}$ beschränkt sind. Eine *milde Lösung* u von (1.5) wird für solche Operatoren wiederum mit der Formel von Duhamel durch

$$u(t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

definiert. Diese Vorgehensweise auf nichtlineare Operatoren zu erweitern, ist Gegenstand von Bénilan et al. [4] und wird in Kapitel 2.3 beschrieben. Die Techniken, die dabei verwendet werden, haben nur wenig mit der linearen Theorie zu tun. Es gibt zwar auch den Ansatz, eine Linearisierung des Problems zu betrachten, siehe etwa Lunardi [22], dieser wird in dieser Arbeit jedoch nicht behandelt.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen diese drei Ansätze für nichtlineare Diffusionsgleichungen zu den gleichen Ergebnissen führen. Bereits bekannt ist, dass unter Voraussetzungen, die die Eindeutigkeit der Entropielösung garantieren, diese auch eine renormalisierte Lösung ist und umgekehrt, siehe dazu beispielsweise Zhang und Zhou [27]. Hier soll, so weit es geht, nur auf Bedingungen, die die Existenz, nicht aber die Eindeutigkeit renormalisierter Lösungen sicherstellen, zurückgegriffen werden. Im Gegensatz zu Droniou und Prignet [11], die die Äquivalenz von Entropie- und renormalisierten Lösungen für den Fall von *soft meausures* als rechter Seite, wird hier etwa auf strikte Monotonie und eine globale Wachstumsbedingung verzichtet. Die Äquivalenz von milden und Entropie-, beziehungsweise renormalisierten Lösungen ist für andere Gleichungen[‡] bekannt und wird durch diese Arbeit auf die hier behandelten Fälle erweitert. Eine Betrachtung dieser drei Begriffe in einer einzigen Arbeit hat bisher nicht stattgefunden.

[‡] Etwa der Boltzmann-Gleichung, siehe DiPerna und Lions [10].

2 Definitionen

Nichtlineare Diffusionsvorgänge werden häufig durch Anfangsrandwertprobleme der Gestalt

$$\begin{cases} u_t - \text{div } a(t,x,u,\nabla u) &= f \quad \text{in } \mathcal{Q} = (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{in } \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

beschrieben. Dabei sei $T > 0$ und Ω eine beschränkte offene Menge in $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$. Außerdem seien $-\text{div}(a(t,x,u,\nabla u))$ mit der zugehörigen Randbedingung ein LERAY-LIONS-Operator und $u_0 \in L^1(\Omega)$ und $f \in L^1(\mathcal{Q})$. Weiterhin seien im weiteren $p > 1$ und p' der zu p konjugierte Exponent so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Wir machen zudem die folgenden Annahmen:

(I) Die Funktion $a : \mathcal{Q}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sei eine CARATHÉODORY-Funktion,

(II) es existiere ein $\alpha > 0$ so, dass

$$a(t,x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p$$

für fast alle $(t,x) \in \mathcal{Q}$, für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ (Koerzitivität),

(III) für alle $K > 0$ existiere ein $\beta_K > 0$ und eine Funktion $C_K \in L^{p'}(\mathcal{Q})$ so, dass

$$|a(t,x,s,\xi)| \leq C_K(t,x) + \beta_K|\xi|^{p-1}$$

für fast alle $(t,x) \in \mathcal{Q}$, für alle $s \in \mathbb{R}$ so, dass $|s| \leq K$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ (Wachstumsbedingung),

(IV) für fast alle $(t,x) \in \mathcal{Q}$, für alle $(s,\xi,\xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$, gelte

$$[a(t,x,s,\xi) - a(t,x,s,\xi')]\cdot[\xi-\xi'] \geq 0$$

(Monotonie).

Diese Voraussetzungen garantieren die Existenz einer renormalisierten Lösung. Weiterhin greifen wir teilweise auf die folgenden Einschränkungen zurück, die auf gewisse Weise die Eindeutigkeit der Lösung in verschiedenen Punkten der Arbeit sicherstellen sollen.

(IIIA) Für $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ existiere eine Funktion $C_u \in L^{p'}(\mathcal{Q})$ und $\beta_u > 0$ so, dass

$$|a(t,x,u(t,x),\xi)| \leq C_u(t,x) + \beta_u|\xi|^{p-1}$$

für fast alle $(t,x) \in \mathcal{Q}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(IIIB) Es existiere ein $\nu < (p-1)(1-\frac{1}{p^*})$ mit p^* so, dass* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p*}(\Omega)$ und eine Funktion $C \in L^{p'}(\mathcal{Q})$ und $\beta > 0$ so, dass

$$|a(t,x,s,\xi)| \leq C(t,x) + \beta|\xi|^{p-1} + |s|^\nu$$

für fast alle $(t,x) \in \mathcal{Q}$, alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^N$.

*Man wähle hier $p^* = Np/(N-p)$, wenn $p < N$. Wenn $p = N$, wähle man p^* als beliebige reelle Zahl echt größer als Eins und für $p > N$ setze man $p^* = \infty$. Siehe dazu ROUBÍČEK [24, Thm. 1.20].

(IIIC) Für beliebige $K > 0$ und alle $|s| \le K, |s'| \le K$ gelte, dass

$$|a(t,x,s,\xi) - a(t,x,s',\xi)| \le C_K(t,x)|s-s'| + \beta_K|\xi|^{p-1}$$

für fast alle $(t,x) \in \mathcal{Q}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Bemerkung 1. *Die Bedingung (IIIB) erscheint sehr stark, da ν zum Beispiel für den Fall $N = 3$ und $p = 2$ kleiner als Eins und somit nicht einmal lineares Wachstum zugelassen wäre. Diese Bedingung ist allerdings insofern minimal, dass für Entropielösungen a priori nur ausgesagt werden kann, dass diese für $0 \le q \le p(1 - \frac{1}{p^*})$ in $L^q(\mathcal{Q})$ liegen, siehe* Droniou und Prignet [11]*, und eine Beschränkung von $(t,x) \mapsto a(t,x,u(t,x),\xi)$ in $L^{p'}(\mathcal{Q})$ benötigt wird.*

Bemerkung 2. *Die in* (2.1) *gesuchte Funktion u beschreibt zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ den Zustand des durch die Gleichung beschriebenen Systems. Daran lässt sich erkennen, dass die Zeitvariable eine andere Rolle als die Ortsvariable x spielt. Dies wird dadurch ausgedrückt, dass man u zumeist nicht als reellwertige Funktion*

$$\mathcal{Q} \ni (t,x) \mapsto u(t,x),$$

sondern als abstrakte Funktion mit Werten in einem Banach-*Raum X*

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t) \in X$$

betrachtet. Dabei ist X ein Funktionenraum über Ω. Und wir definieren

$$[u(t)](x) := u(t,x).$$

2.1 Renormalisierte Lösung

Wir wollen nun den Begriff der renormalisierten Lösung einführen. Sei dafür u formal zunächst eine distributionelle Lösung zu einer glatten rechten Seite und zumindest stetig differenzierbar. Wir testen die Differentialgleichung mit $S'(u)$, wobei $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare und beschränkte Funktion sei und S' kompakten Träger habe. Wir erhalten

$$u_t S'(u) - \operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u))S'(u) = fS'(u) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{Q}).$$

Mit der Kettenregel

$$S(u)_t = u_t S'(u)$$

und der Produktregel

$$\operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u)S'(u)) = S''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u + \operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u))S'(u)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} &S(u)_t - \operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u)S'(u)) + S''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \\ &= fS'(u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathcal{Q}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Insbesondere reicht es im distributionellen Sinne, dass wir statt S beschränkt und zweimal stetig differenzierbar auch nur $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ fordern können. Außerdem fordern wir, dass S' nach wie vor kompakten Träger hat. Durch diese Voraussetzungen ersetzt S die im folgenden definierte Abschneidefunktion.

Definition 2.1. *Abschneidefunktion*
Die Funktion

$$T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T_k(r) = \begin{cases} r, & \text{falls } |r| \leq k, \\ k, & \text{falls } r > k, \\ -k, & \text{falls } r < -k. \end{cases}$$

nennen wir die Abschneidefunktion (bei k).

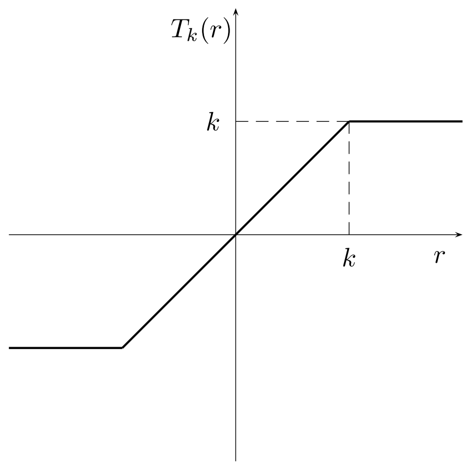

Abbildung 2: Der Graph der Abschneidefunktion T_k.

Wir setzen

$$\mathcal{T} := \{S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}) \mid S' \text{ hat kompakten Träger}\}.$$

Die Funktionen aus $\mathcal{T}$ sind glattere, das heißt stetig differenzierbare, Vertreter der Abschneidefunktion. Die Terme in (2.2) ergeben auch noch Sinn, wenn wir die Regularität von u fallen lassen. Dafür verlangen wir nur noch, dass

$$u \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \text{ und } T_k(u) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

für alle $k \geq 0$ gilt. Man stellt leicht fest, dass für ein $k \geq 0$ mit $\operatorname{supp}(S') \subset [-k, k]$ gilt, dass

$$S(u) = T_k(S(u)) = S(T_k(u)).$$

Also ist auch $S(u) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ für alle $S \in \mathcal{T}$.

Bemerkung 3. *Für den Fall, dass u die Bedingung $T_k(u) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ für alle $k \geq 0$ erfüllt, ist bekannt, dass es eine eindeutige messbare (vektorwertige) Funktion ∇u gibt so, dass $\nabla T_k(u) = \chi_{\{|u| \leq k\}} \nabla u$ fast überall auf $\mathcal{Q}$ für alle*

$k \geq 0$ *ist, siehe* BÉNILAN et al. [2]. *Im weiteren werden wir diese Definition von* ∇u *verwenden. Auf diese Weise können dann auch Terme der Form*

$$\operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u))T_k(u-\varphi)$$

durch

$$-a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)$$

für $\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *im distributionellen Sinne erklärt werden.*

Sei also $S \in \mathcal{T}$. Da S' kompakten Träger hat, folgt

$$fS'(u) \in L^1(\mathcal{Q}).$$

Wählen wir $k > 0$ so, dass supp $S' \subset [-k,k]$ ist, so reicht es, (2.2) für $|u| \leq k$ zu betrachten. Wir identifizieren also $T_k(u)$ und u miteinander. Ebenso verfahren wir für $\nabla T_k(u)$ und ∇u. Für diesen Fall ist dann

$$|\nabla u| = |\nabla T_k(u)| \in L^p(\mathcal{Q})$$

und wegen der Wachstumsbedingung ist

$$(x,t) \mapsto |a(t,x,u,\nabla u)| = |a(t,x,T_k(u),\nabla T_k(u))| \in L^{p'}(\mathcal{Q}).$$

Damit sind also

$$\begin{aligned} S'(u)a(t,x,u,\nabla u) &\in L^{p'}(\mathcal{Q})^N, \\ S''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u &\in L^1(\mathcal{Q}) \\ \text{und } fS'(u) &\in L^1(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Dank der Linearität der Divergenz sind die Terme, die von a abhängen und die rechte Seite im distributionellen Sinne wohldefiniert. Es fehlt noch die Zeitableitung $S(u)_t$. Klar ist, dass $S(u)$ in $L^1(\mathcal{Q})$ liegt, da S Lipschitz-stetig ist und eine betragsmäßige obere Schranke besitzt. Damit existiert auch die Zeitableitung von $S(u)$ in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$. Alle Terme in (2.2) ergeben somit in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$ Sinn, die Gleichung ist also wohldefiniert. Genauer betrachtet erhalten wir aus (2.2)

$$S(u)_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(\mathcal{Q}).$$

Da außerdem nach Voraussetzung

$$S(u) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\mathcal{Q}),$$

folgt mit PORRETTA [23], dass $S(u) \in C([0,T];L^1(\Omega))$. Wir betrachten nun den Term

$$\iint\limits_{\{n\leq|u(t,x)|\leq n+1\}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\; dxdt.$$

Für $n \to \infty$ strebt dieser Term gegen Null, wenn zum Beispiel

$$a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \in L^1(\mathcal{Q})$$

und

$$u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$$

sind. Diese Eigenschaft von a lässt sich allerdings nicht aus den gegebenen Voraussetzungen (I)-(IV) herleiten. Wir werden diese Integrabilität also zusätzlich fordern. Der Term wäre nur unter der stärkeren Annahme kontrollierbar, dass die Beschränkung (III) nicht von K abhängig ist. Im allgemeinen ist

$$(t,x) \mapsto |a(t,x,u,\nabla u)|$$

nicht mehr in $L^1_{loc}(\mathcal{Q})$ und die Integralterme sind somit nicht mehr endlich. Wir definieren daher

Definition 2.2. *Renormalisierte Lösung*
Eine Funktion $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ heißt renormalisierte Lösung, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $k \geq 0$ ist $T_k(u) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$,

(ii) für $n \to \infty$ konvergiert

$$\iint_{\{n \leq |u(t,x)| \leq n+1\}} a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla u \; dxdt$$

gegen Null,

(iii) die Gleichung

$$S(u)_t - \operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u)S'(u)) + S''(u)a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla u = fS'(u)$$

ist für alle $S \in \mathcal{T}$ in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$ erfüllt,

(iv) für alle $S \in \mathcal{T}$ ist $S(u)(0) = S(u_0)$ in $L^1(\Omega)$.

Bemerkung 4. *Es stellt sich die Frage, inwiefern die Anfangsbedingung durch* (2.2)*(iv) erfüllt ist. Zunächst sei dafür $u(0)$ eine Funktion in $L^1(\Omega)$. Wählt man für S Glättungen der Abschneidefunktionen T_k für alle $k > 0$, so erhält man, dass $u(0,x)$ und $u_0(x)$ auf den Mengen*

$$\{x \in \Omega \mid |u(0,x)| \leq k\} \cap \{x \in \Omega \mid |u_0(x)| \leq k\}$$

fast überall übereinstimmen. Da sowohl $u(0,\cdot)$ als auch u_0 in $L^1(\Omega)$ liegen und somit fast überall auf Ω endlich sind, gilt, dass die Anfangsbedingung fast überall erfüllt ist. Zudem ist es noch interessant, inwiefern die renormalisierte Lösung in der Zeit für $t \downarrow 0$ gegen u_0 konvergiert, beziehungsweise inwiefern $u(0,\cdot)$ überhaupt definiert werden kann. Wir hatten bereits festgestellt, dass $S(u)$ in $C([0,T];L^1(\Omega))$ liegt. Also konvergiert $S(u)(t)$ in $L^1(\Omega)$ gegen $S(u_0)$.

2.2 Entropielösung

Wir führen nun einen weiteren verallgemeinerten Lösungsbegriff ein. Dafür definieren wir den Funktionenraum

$$E = \{\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\mathcal{Q}) \mid \varphi_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(\mathcal{Q})\}. \tag{2.3}$$

Es gilt $E \subset C([0,T];L^1(\Omega))$. Außerdem gilt für $\varphi, \phi \in E$ die partielle Integrationsformel

$$\begin{aligned}&\int_0^s \Big(\langle \varphi_t, \phi \rangle_{V,V'} + \langle \phi_t, \varphi \rangle_{V,V'} \Big)\, dt \\ =&\langle \varphi(s), \phi(s) \rangle_{V,V'} - \langle \varphi(0), \phi(0) \rangle_{V,V'}.\end{aligned}$$

Wir setzen dabei $V = W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega)$ und damit $V' = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)^\dagger$. Für den Nachweis dieser beiden Eigenschaften siehe Porretta [23] für die Einbettung und Droniou und Prignet [11, Lemma 7.1] für die partielle Integration. Wir setzen außerdem im weiteren

$$W = L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(\mathcal{Q}) \text{ und } W' = L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\mathcal{Q}).$$

Angenommen, $u \in E$ sei eine distributionelle Lösung des Problems. Dann gilt insbesondere

$$\iint_{\mathcal{Q}} u_t \varphi \; dxdt + \iint_{\mathcal{Q}} a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla \varphi \; dxdt = \iint_{\mathcal{Q}} f \varphi \; dxdt$$

für alle $\varphi \in \mathcal{W}^p(0,T) := \{\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \mid \varphi_t \in L^p(0,T;W_0^{-1,p'}(\Omega))\}$. Wir können also $T_k(u-\varphi)$ als Testfunktion einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(T,x)\; dx - \int_\Omega \Theta_k(u_0-\varphi)(0,x)\; dx \\ &+ \iint_{\mathcal{Q}} T_k(u-\varphi)\varphi_t \; dxdt + \iint_{\mathcal{Q}} a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla(T_k(u-\varphi))\; dxdt \\ =& \iint_{\mathcal{Q}} f T_k(u-\varphi)\; dxdt\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in E$ und $k \geq 0$. Hierbei sei $\Theta_k(s) = \int_0^s T_k(r)dr$ die Stammfunktion der Abschneidefunktion. Um den Lösungsbegriff zu verallgemeinern, soll es uns im

†Um einzusehen, dass dies tatsächlich die entsprechenden Dualräume sind, siehe Gajewski et al. [16, Satz 5.13].

weiteren reichen, dass die Lösung folgender Familie von Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(T,x)\ dx - \int_\Omega \Theta_k(u_0-\varphi)(0,x)\ dx \\
&+ \iint_Q T_k(u-\varphi)\varphi_t\ dxdt + \iint_Q a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)\ dxdt \\
\le &\iint_Q fT_k(u-\varphi)\ dxdt
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

für alle $\varphi \in E$, $k \geq 0$ genügt. Es bleibt allerdings noch zu zeigen, dass jeder dieser Terme auch wohldefiniert ist. Sei dafür u eine auf $\mathcal{Q}$ LEBESGUE-messbare Funktion, für die das folgende gilt:

$$T_k(u) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ für alle } k \geq 0, \tag{2.5}$$

$$[0,T] \ni t \mapsto \int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(t,x)\ dx$$

ist für alle $k \geq 0$ und $\varphi \in E$ fast überall gleich einer stetigen Funktion. (2.6)

Durch (2.6) folgt sofort, dass der erste Term von (2.4) wohldefiniert ist, indem man den entsprechenden stetigen Repräsentanten wählt und $t = T$ setzt.
Auch der zweite Term ist damit sinnvoll, da u_0 integrierbar ist und auch für φ ein in t stetiger Repräsentant und somit $\varphi(0)$ aus $L^1(\Omega)$ gewählt werden kann. Somit folgt, da $|\Theta_k(s)| \leq k|s|$, dass

$$\Omega \ni x \mapsto \Theta_k(u_0-\varphi)(0,x)$$

integrierbar und der zweite Term somit wohldefiniert ist.
Für den dritten Term gilt durch die Regularität (2.3) von φ_t und die Voraussetzung (2.5) an $T_k(u)$ ((2.5) lässt sich auf $T_k(u-\varphi)$ ohne weiteres erweitern, da $\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$), dass

$$\iint_Q T_k(u-\varphi)\varphi_t\ dxdt = \int_0^T \langle T_k(u-\varphi), \varphi_t\rangle_{V',V}\ dt.$$

Der Term ist somit als Integral über einer dualen Paarung wohldefiniert. Das gleiche Argument lässt sich auf die rechte Seite anwenden, wobei $f \in L^1(\mathcal{Q})$ und somit auch in W und $T_k(u-\varphi) \in W'$ sind.
Es bleibt noch der vierte Term zu betrachten. Wir nutzen aus, dass auf der Menge $\{|u-\varphi| > k\}$ gilt, dass $\nabla(T_k(u-\varphi)) = 0$ ist. Wir können uns auf folgendes Integral beschränken.

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)\ dxdt \\
=&\iint_{\{\nabla T_k(u-\varphi)\neq 0\}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)\ dxdt \\
=&\iint_{\{|u-\varphi|\leq k\}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)\ dxdt.
\end{aligned}
$$

Da außerdem $|u-\varphi| \leq k$ impliziert, dass $|u| \leq M := k + \|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{Q})}$ und damit $|a(t,x,u,\nabla u)| \leq C_M(t,x) + \beta_M |\nabla u|^{p-1}$ sind, folgern wir, dass

$$\begin{aligned}|a(t,x,u,\nabla u)| &= |a(t,x,T_M(u),\nabla T_M(u))|\\ &\leq C_M(t,x) + \beta_M |\nabla T_M(u)|^{p-1}\end{aligned}$$

auf der Menge $\{|u-\varphi| \leq k\}$ ist. Da $|\nabla(T_M(u))| \in L^p(\mathcal{Q})$ ist, folgt, dass

$$|\nabla(T_M(u))|^{p-1} \in L^{p'}(\mathcal{Q})$$

und damit auch

$$(t,x) \mapsto a(t,x,u,\nabla u)\chi_{\{|u-\varphi|\leq k\}} \in L^{p'}(\mathcal{Q})$$

sind. Mit der Identifikation

$$T_k(u-\varphi) = T_k(T_M(u)-\varphi) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$$

folgt wiederum mit der HÖLDER-Ungleichung, dass

$$(t,x) \mapsto a(t,x,u,\nabla u)\cdot \nabla(T_k(u-\varphi)) \in L^1(\mathcal{Q})$$

ist und somit die Wohldefiniertheit des Terms. Wir definieren also

Definition 2.3. *Entropielösung*
Eine auf $\mathcal{Q}$ LEBESGUE-messbare Funktion u heißt Entropielösung, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $k \geq 0$ ist $T_k(u) \in L^p(0,T,W_0^{1,p}(\Omega))$,

(ii) es ist für alle $k \geq 0$ und alle $\varphi \in E$

$$[0,T] \ni t \mapsto \int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(t,x)\ dx$$

fast überall gleich einer stetigen Funktion,

(iii) für alle $k \geq 0$ und alle $\varphi \in E$ gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(T,x)\ dx - \int_\Omega \Theta_k(u_0-\varphi)(0,x)\ dx\\ &+ \iint_{\mathcal{Q}} T_k(u-\varphi)\varphi_t\ dxdt + \iint_{\mathcal{Q}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)\ dxdt\\ \leq &\iint_{\mathcal{Q}} fT_k(u-\varphi)\ dxdt.\end{aligned}$$

2.3 Milde Lösung

Wir werden diesen Begriff für den Fall eines zeitunabhängigen Operators einführen, da die Theorie der nichtlinearen Halbgruppen von Bénilan et al. [4], auf der diese Arbeit beruht, nur für autonome Operatoren definiert ist. Unter sehr restriktiven Anforderungen an eine Operatorenfamilie $(A(t))_{t\geq 0}$ kann die Theorie der milden Lösungen zwar auch für zeitabhängige Operatoren eingeführt werden, siehe Evans [15] und Kobayasi et al. [17], diese sind aber zu streng für unser Problem und sollen demnach hier nicht betrachtet werden. Wir modifizieren unser Problem (2.1) wie folgt

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\, a(x,u,\nabla u) &= f \quad \text{in } \mathcal{Q} = (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Der Begriff der milden Lösung beruht auf einer Umformulierung der nichtlinearen Diffusionsgleichung in ein inhomogenes abstraktes Cauchy-Problem. Hierbei wird wie folgt vorgegangen.

Definition 2.4. *Sei X ein Banach-Raum und A eine Abbildung der Form*

$$A : X \to 2^X.$$

Dabei sei 2^X die Potenzmenge von X. Man nennt A einen Operator in X. Weiterhin nennt man

$$D(A) := \{x \in X \mid Ax \neq \emptyset\}$$

den effektiven Definitionsbereich und

$$R(A) := \bigcup_{x\in X} Ax$$

den effektiven Wertebereich von A. Die Menge

$$G(A) := \{(x,y) \in X \times X \mid x \in X, y \in Ax\}$$

heißt Graph des Operators. Gilt weiterhin, dass Ax für alle $x \in D(A)$ eine einelementige Menge ist, so nennt man A einwertig. In diesem Fall kann der Operator mit einem klassischen Operator

$$A : D(A) \subset X \to X$$

identifiziert werden.

Bemerkung 5. *Wir werden den Operator und seinen Graphen im weiteren miteinander identifizieren, da genau dann $y \in Ax$ gilt, wenn $(x,y) \in G(A)$. Wir schreiben deswegen auch $(x,y) \in A$.*

Bemerkung 6. *Selbst für den Fall[‡], dass die nichtlineare Diffusionsgleichung einen einwertigen Operator definiert, ergibt es Sinn, dieses allgemeinere Setting zu betrachten. Eine Motivation hierfür liefert die folgende Definition.*

[‡]Etwa wenn $-\operatorname{div}\, a(t,x,u,\nabla u) = -\Delta_p(u)$.

Definition 2.5. *Der Abschluss $\bar{A}$ eines Operators A in X ist definiert über den Abschluss des Graphen bezüglich der Graphennorm*[§]*. Wir setzen*

$$\bar{A} = G(\bar{A}) = \overline{G(A)}.$$

Ähnlich wird die Inverse A^{-1} mittels

$$A^{-1} = G(A^{-1}) = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in G(A)\}$$

definiert.

In diesem Sinne ist also jeder Operator abschließ- und invertierbar.

Diese Vorbereitung erlaubt es uns nun, die nichtlineare Diffusionsgleichung folgendermaßen umzuformulieren. Wir setzen

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \mid \text{div } a(\cdot, u, \nabla u) \in L^\infty(\Omega)\}, \\ Au &:= -\text{div } a(\cdot, u, \nabla u). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Durch diese Umformulierung ist es nun möglich, die folgende Gleichung aufzustellen

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au & \ni f \qquad \text{in } [0, T], \\ \quad u(0) & = u_0. \end{cases}$$

Diese Formulierung wird als abstraktes CAUCHY-Problem bezeichnet. Die Idee hinter der Definition der milden Lösung ist es auf dieses Problem das implizite EULER-Verfahren anzuwenden, also stückweise konstante Näherungslösungen für das Problem zu finden. Das implizite EULER-Verfahren bietet sich insofern an, da dieses stark *A-stabil* ist und sich deswegen für *akkretive* Operatoren eignet.

Definition 2.6. *Ein Operator A in X heißt akkretiv in X, wenn für alle (x, y), $(\hat{x}, \hat{y}) \in A$ und alle $\lambda > 0$ gilt, dass*

$$\|x - \hat{x}\|_X \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|_X.$$

Betrachtet man akkretive Operatoren für den einwertigen Fall auf einem HILBERT-Raum X, so stellt man fest, dass dies eine Verallgemeinerung der Monotonie

$$(Ax - Ay, x - y) \geq 0 \text{ für alle } x, y \in D(A)$$

bedeutet. Um den Begriff der Akkretivität zu verdeutlichen, wollen wir eine alternative Definition über eine Verallgemeinerung des Skalarprodukts eines HILBERT-Raums auf BANACH-Räume vornehmen. Wir betrachten dafür die folgenden semi-inneren Produkte

$$\begin{aligned} (x, y)_+ &:= \|x\| \inf_{\lambda > 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}, \\ (x, y)_- &:= \|x\| \inf_{\lambda > 0} \frac{\|x\| - \|x + \lambda y\|}{\lambda}. \end{aligned}$$

[§]Für $(x, y) \in D(A) \times R(A)$ sei $\|(x, y)\|_{G(A)} := \|x\|_X + \|y\|_X$.

Wie man sieht, stimmen diese für den Fall, dass man sie auf einem HILBERT-Raum definiert, mit dem inneren Produkt überein. Es ist also natürlich, den Begriff der Monotonie/Akkretivität durch diese neuen inneren Produkte zu formulieren. Tatsächlich erfolgt durch diese eine äquivalente Formulierung der Akkretivität, was wir im folgenden nachweisen wollen. Wir ersetzen $(\cdot,\cdot)_+$ dabei durch das so genannte *Bracket*.

Definition 2.7. *Bracket*
Sei X ein BANACH-*Raum und $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{R}$ die Abbildung*

$$[x, y] = \inf_{\lambda>0} \frac{\|x + \lambda y\|_X - \|x\|_X}{\lambda}.$$

Das Bracket hat also im wesentlichen die Eigenschaften von $(x, y)_+$, außer dass dieses normiert wird. Dadurch ist das Bracket identisch mit der rechtsseitigen GÂTEAUX-Ableitung der Norm an der Stelle x in Richtung y. In einem HILBERT-Raum gilt folglich $[x, y] = \frac{(x,y)}{|x|}$. Die Charakterisierung der Akkretivität über das Bracket erfolgt durch folgendes Lemma.

Lemma 2.1. *Für alle $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$ gilt*

$$\|x - \hat{x}\|_X \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|_X$$

für alle $\lambda > 0$ genau dann, wenn

$$[x - \hat{x}, y - \hat{y}] \geq 0.$$

Beweis. Seien X ein BANACH-Raum, $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$ beliebig, dann gilt für beliebiges $\lambda > 0$

$$\|x - \hat{x}\|_X \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|_X$$

genau dann, wenn

$$\frac{\|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|_X - \|x - \hat{x}\|_X}{\lambda} \geq 0.$$

Damit gilt diese Äquivalenz insbesondere für das Infimum über $\lambda > 0$ und somit das Bracket. □

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen HILBERT- und BANACH-Räumen ist die Form der so genannten Dualitätsabbildung.

Definition 2.8. *Sei X ein* BANACH-*Raum. Dann heißt*

$$J : X \to 2^{X'}, \quad x \mapsto J(x) := \{x^* \in X' \mid \langle x^*, x\rangle_{X',X} = \|x\|_X, \|x^*\|_{X'} \leq 1\}$$

Dualitätsabbildung.

In einem HILBERT-Raum ist diese Abbildung stets einwertig und sehr leicht durch $J(x) = \frac{x}{\|x\|}$ zu beschreiben. Der Zusammenhang zwischen den semi-inneren Produkten beziehungsweise dem Bracket und der Dualitätsabbildung wird deutlich, wenn man sich bewusst macht, dass

$$\frac{(x, y)_+}{\|x\|} = [x, y] = \max\{x^*(y) \mid x^* \in J(x)\}.$$

Es gilt demnach folgendes Lemma.

Lemma 2.2. *Ein Operator A im* BANACH*-Raum X ist genau dann akkretiv, wenn es für alle Paare $(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A$ ein $\varphi \in J(x-\hat{x})$ gibt so, dass*

$$\langle \varphi, y-\hat{y}\rangle_{X',X} \geq 0.$$

Für eine weiterführende Betrachtung semi-innerer Produkte auf BANACH-Räumen siehe DEIMLING [9, Kap. 3]. Um die nun aufgestellte Theorie zu nutzen, zeigen wir, dass die nichtlineare Diffusionsgleichung einen akkretiven Operator definiert.

Theorem 2.1. *Unter den Voraussetzungen (I), (II), (IIIC) und (IV) gilt, dass der in* (2.8) *definierte Operator A akkretiv in $L^1(\Omega)$ ist.*

Beweis. Seien $(u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in A$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $u = \hat{u}$. Hier gilt für alle $\lambda > 0$, dass

$$\|u-\hat{u}\| = 0 \leq \|\lambda(v-\hat{v})\| = \|u-\hat{u}+\lambda(v-\hat{v})\|.$$

Die Akkretivität ist also klar. Sei also $u \neq \hat{u}$. Hierfür definieren wir zunächst

$$H_\varepsilon^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad H_\varepsilon^+(r) = \begin{cases} 1, & r \geq \varepsilon, \\ 0, & r \leq 0, \\ r/\varepsilon, & \textit{sonst}, \end{cases}$$

$$\text{wobei gilt } \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon^+(r) = \operatorname{sign}_0^+(r) := \begin{cases} 1, & r > 0, \\ 0, & r \leq 0. \end{cases}$$

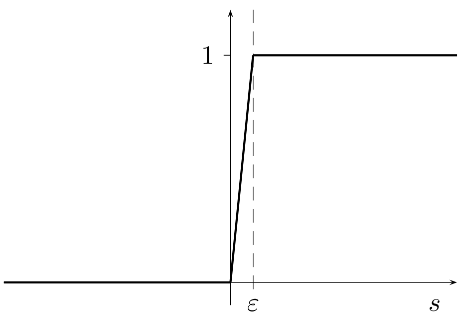

Abbildung 3: Der Graph von H_ε^+.

$(H_\varepsilon^+)_\varepsilon$ ist also eine Annäherung an die HEAVISIDEsche Sprungfunktion durch stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktionen. Und da H_ε^+ monoton wachsend ist, gilt für die Ableitung (außer in den beiden Punkten, in denen sie nicht existiert), dass $(H_\varepsilon^+)'(r) \geq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
$\varphi(x) := \operatorname{sign}_0^+(u(x)-\hat{u}(x))$ ist Element von $L^\infty(\Omega)$ und soll unser Kandidat sein, der uns die Akkretivität aus der Definition über die Dualitätsabbildung

liefert. Wir stellen fest, dass

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (v-\hat{v})H_\varepsilon^+(u-\hat{u})\ dx && (2.9)\\
&= \int_\Omega (a(x,u,\nabla u)-a(x,\hat{u},\nabla\hat{u}))\cdot\nabla H_\varepsilon^+(u-\hat{u})\ dx\\
&= \int_\Omega (a(x,u,\nabla u)-a(x,\hat{u},\nabla\hat{u}))\cdot\nabla(u-\hat{u})(H_\varepsilon^+)'(u-\hat{u})\ dx\\
&= \int_\Omega (a(x,u,\nabla u)-a(x,u,\nabla\hat{u}))\cdot\nabla(u-\hat{u})(H_\varepsilon^+)'(u-\hat{u})\ dx\\
&\quad+\int_\Omega (a(x,u,\nabla\hat{u})-a(x,\hat{u},\nabla\hat{u}))\cdot\nabla(u-\hat{u})(H_\varepsilon^+)'(u-\hat{u})\ dx\\
&\geq \int_\Omega (a(x,u,\nabla\hat{u})-a(x,\hat{u},\nabla\hat{u}))\cdot\nabla(u-\hat{u})(H_\varepsilon^+)'(u-\hat{u})\ dx.
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Monotonie (IV). Betrachten wir nun den dadurch gewonnen Term. Sei dafür $K := \max\{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\hat{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
&|(a(x,u,\nabla\hat{u})-a(x,\hat{u},\nabla\hat{u}))\cdot\nabla(u-\hat{u})(H_\varepsilon^+)'(u-\hat{u})|\\
&\leq |a(x,u,\nabla\hat{u})-a(x,\hat{u},\nabla\hat{u})||\nabla u-\nabla\hat{u}||(H_\varepsilon^+)'(u-\hat{u})|\\
&\leq (C_K(x)|u-\hat{u}|+\beta_K|\nabla\hat{u}|^{p-1})|\nabla u-\nabla\hat{u}|\frac{1}{\varepsilon}\chi_{\{0<|u-\hat{u}|<\varepsilon\}}\\
&\leq C_K(x)|\nabla u-\nabla\hat{u}|+c\beta_K|\nabla\hat{u}|^{p-1}|\in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Die Konstante c aus der letzten Zeile erhält man durch die Poincaré-Ungleichung. Da $(H_\varepsilon^+)'(u-\hat{u})\to 0$ für $\varepsilon\downarrow 0$ auf der Menge $M := \{x\in\Omega \mid u\neq\hat{u}\}$ und (2.9) auf $\Omega\setminus M$ Null ist, folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz von Lebesgue die Behauptung, dass

$$\int_\Omega (v-\hat{v})\varphi\ dx \geq 0.$$

□

Nach dieser Vorarbeit nähern wir uns der Definition der milden Lösung. Sei $[t_0,t_N]\subset[0,T]$ und $t_0<t_1<...<t_N$ eine Partition von $[t_0,t_N]$. Weiterhin sei $\{f_1,...,f_N\}$ eine endliche Teilmenge eines Banach-Raums X. Wir nennen ein System von Differenzrelationen

$$\frac{v_i-v_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}+Av_i\ni f_i,\quad i=1,...,N, \tag{2.10}$$

eine *Diskretisierung* von $\frac{du}{dt}+Au\ni f$ und schreiben $D_A(t_0,...,t_N;f_1,...,f_N)$. Eine Lösung dieser Diskretisierung ist eine stückweise konstante Funktion

$$v:[t_0,t_N]\to X,$$

deren Werte $v(t_0) = v_0$, $v(t) = v(t_i) = v_i$ auf $(t_{i-1}, t_i]$ die Differenzrelationen (2.10) erfüllen und somit Approximationen an die Werte einer Lösung in t_i darstellen. $D_A(t_0, ..., t_N; f_1, ..., f_N)$ bezeichnen wir als ε-Diskretisierung von $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ wenn gilt, dass

$$0 \leq t_0 < \varepsilon,\ 0 \leq T - t_N < \varepsilon,\ t_i - t_{i-1} < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots, N,$$
$$\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(s) - f_k\|_X ds < \varepsilon.$$

Eine *ε-Diskretisierung* ist also „ε-nah“ am Problem. Lösungen einer solchen Diskretisierung, wie wir sie eben definiert haben, bezeichnen wir als ε-Näherungslösung.

Bemerkung 7. *Erfüllt der Operator A die Range-Bedingung $\overline{D(A)} \subset R(I+\lambda A)$ für alle $\lambda > 0$, so kann man konstante Zeitschritte, sowie $t_0 = 0$ und $t_N = T$ wählen. Man erhält in diesem Fall mittels exaktem äquidistanten impliziten* EULER-*Verfahren die milde Lösung. Wir werden sehen, dass dies für den Operator* (2.8) *der Fall ist. Für allgemeine akkretive Operatoren gilt dies aber nicht.*

Bemerkung 8. *Es stellt sich die Frage, inwiefern eine ε-Näherungslösung das Problem*

$$\begin{cases} \frac{v - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} - \operatorname{div} a(x, v, \nabla v) &= f_i \quad \text{in } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für $f_i \in L^1(\Omega)$ löst. Man kann dieses Problem umgehen, indem man eine Approximation f_ε von $f \in L^1(\mathcal{Q})$ aus Treppenfunktionen in $L^\infty(\mathcal{Q})$ wählt. In diesem Fall existiert eine schwache Lösung dieses Problems, siehe dazu Abschnitt (3.4.1)*. Wählt man allerdings wie in* BÉNILAN et al. [4, Kap. 4.3] *nur eine Treppenfunktionsfolge in $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, so stellt sich heraus, dass v die renormalisierte Lösung der obigen Gleichung ist.*

Mit Hilfe der ε-Diskretisierungen wollen wir nun den Begriff der milden Lösung einführen.

Definition 2.9. *Milde Lösung*
Als milde Lösung von

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au &\ni f \qquad \text{in } [0, T], \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

bezeichnet man eine Funktion $u \in C([0, T]; X)$, für die es für alle $\varepsilon > 0$ eine ε-Diskretisierung mit zugehöriger ε-Näherungslösung u_ε gibt so, dass

$$\|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_X < \varepsilon \text{ für alle } t \in [t_0, t_N] \subset [0, T]$$

ist und die die Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ erfüllt.

3 Äquivalenzen

Es folgt das Hauptkapitel dieser Arbeit. Wir werden zeigen, unter welchen Bedingungen die im vorangegangenen Kapitel eingeführten Lösungsbegriffe miteinander übereinstimmen. Wir zeigen das zentrale Theorem dieser Arbeit.

Theorem 3.1. *Unter den Bedingungen (I), (II), (III) und (IV) gelten folgende Aussagen:*

3.1 *Ist eine Funktion u eine renormalisierte Lösung von* (2.1)*, so ist diese auch eine Entropielösung von* (2.1)*.*

3.2 *Ist eine Funktion u eine Entropielösung von* (2.1) *und es gilt zusätzlich (IIIA) oder (IIIB), so ist diese auch eine renormalisierte Lösung von* (2.1)*.*

3.3 *Ist eine Funktion u eine milde Lösung von* (2.7)*, so ist diese auch eine renormalisierte Lösung von* (2.7)*.*

3.4 *Sind sowohl milde, als auch renormalisierte Lösungen von* (2.7) *eindeutig, so stimmen diese überein.*

Die folgenden Unterkapitel werden sich jeweils mit dem Beweis einer dieser Aussagen beschäftigen.

3.1 Eine renormalisierte Lösung ist eine Entropielösung

Die erste Eigenschaft der Entropielösung entspricht der ersten der renormalisierten Lösung und ist damit klar. Wir zeigen also nur die anderen beiden. Sei $t_1 \in (0, T]$ und $\varepsilon > 0$, wir definieren zunächst eine Approximation an

$$\theta : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & t \le t_1, \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$

durch

$$\theta_\varepsilon : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \le \varepsilon, \\ \frac{t-\varepsilon}{\varepsilon}, & t \in [\varepsilon, 2\varepsilon], \\ 1, & t \in [2\varepsilon, t_1], \\ 1 - \frac{t-t_1}{\varepsilon}, & t \in [t_1, t_1 + \varepsilon], \\ 0, & t > t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

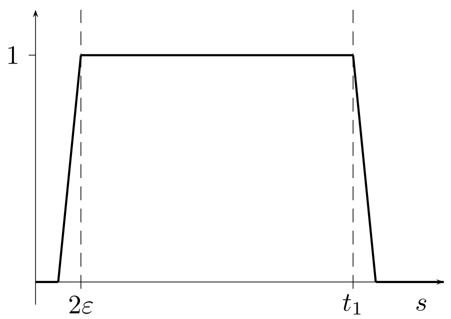

Abbildung 4: Der Graph von θ_ε.

Es gilt, dass $\theta_\varepsilon \to \chi_{[0,t_1]}$. Sei nun $\varphi \in E$ und $M = k + \|\varphi\|_{L^\infty(Q)}$. Die Funktion $T_k(u - \varphi)\theta_\varepsilon = T_k(T_M(u) - \varphi)\theta_\varepsilon$ ist dann eine zulässige Testfunktion in (2.2). Wir betrachten also

$$\begin{aligned} &\iint_Q S(u)_t T_k(u-\varphi)\theta_\varepsilon \; dxdt \\ &- \iint_Q \operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u)S'(u))T_k(u-\varphi)\theta_\varepsilon \; dxdt \\ &+ \iint_Q S''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot \nabla u \; T_k(u-\varphi)\theta_\varepsilon \; dxdt \\ = &\iint_Q S'(u)fT_k(u-\varphi)\theta_\varepsilon \; dxdt. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Es gilt

$$S(u)_t \in W \text{ und } T_k(u-\varphi) \in W'$$

sowie mit Bemerkung 3

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u))T_k(u-\varphi) \\ = & -a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla(T_k(u-\varphi)) \\ \in & L^1(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Wir wählen uns im folgenden ein spezielles $S = S_n$.

$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(s) = 1 - |T_1(s - T_n(s))| = \begin{cases} 1, & |s| \le n, \\ 1 - (|s| - n), & |s| \in (n, n+1), \\ 0, & |s| \ge n+1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & S_n(s) = \int_0^s h_n(r)dr = \begin{cases} s, & |s| \le n, \\ \operatorname{sign}_0(s)(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(|s| - (n+1))^2), & |s| \in (n, n+1), \\ \operatorname{sign}_0(s)(n + \frac{1}{2}), & |s| \ge n+1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2}$$

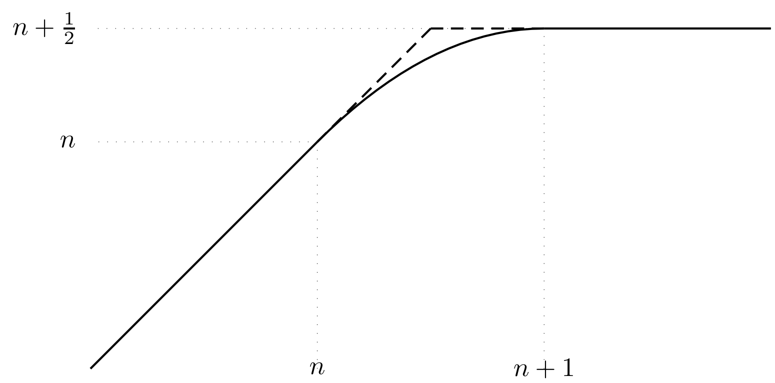

Abbildung 5: S_n glättet $T_{n+\frac{1}{2}}$.

S_n ist im wesentlichen eine geglättete Version der Funktion $T_{n+\frac{1}{2}}$. Wir stellen fest, dass $S_n'' = h_n' = \chi_{[-n-1,n]} - \chi_{[n,n+1]}$. Durch Einsetzen der entsprechenden dualen Paarung ergibt sich aus (3.1)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (S_n(u))_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'}\theta_\varepsilon \ dt \\
&+ \iint_{\mathcal{Q}} S_n'(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla(T_k(u-\varphi))\theta_\varepsilon \ dxdt \\
&+ \iint_{\mathcal{Q}} S_n''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \ T_k(u-\varphi)\theta_\varepsilon dxt \\
=& \iint_{\mathcal{Q}} S_n'(u)fT_k(u-\varphi)\theta_\varepsilon \ dxdt.
\end{aligned}$$

Da $S_n''(s) = 0$ für $|s| \notin [n, n+1]$, können wir den dritten Term umschreiben. Wir erhalten damit zusammen mit der Wachstumsbedingung, dass

$$\begin{aligned}
&S_n''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \ T_k(u-\varphi) \\
=& S_n''(u)a(t,x,T_{n+1}(u),\nabla u)\cdot\nabla(T_{n+1}(u)) \ T_k(u-\varphi) \\
\in& L^1(\mathcal{Q}).
\end{aligned}$$

Dadurch gilt, dass

$$\langle (S_n(u))_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'} \in L^1(0,T)$$

als duale Paarung,

$$\begin{aligned}
&S_n'(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi) \\
=& S_n'(u)a(t,x,T_M(u),\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi) \\
\in& L^1(\mathcal{Q}),
\end{aligned}$$

aufgrund der Wachstumsbedingung und da $S_n'(u) \leq 1$,

$$S_n''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla(T_{n+1}(u)) \ T_k(u-\varphi) \in L^1(\mathcal{Q})$$

und die rechte Seite nach Voraussetzung in $L^1(\mathcal{Q})$ und $\theta_\varepsilon \leq 1$ sind, folgt für $\varepsilon \downarrow 0$ mit dem Satz von der dominierten Konvergenz von Lebesgue (mit $\mathcal{Q}_{t_1} = [0, t_1] \times \Omega$), dass

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} \langle S_n(u)_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'} \ dt \\
&+ \iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} S_n'(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla(T_k(u-\varphi)) \ dxdt \\
&+ \iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} S_n''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \ T_k(u-\varphi) \ dxdt \\
=& \iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} S_n'(u)fT_k(u-\varphi) \ dxdt.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sei nun $n \geq M$, dann gilt $T_k(u-\varphi) = T_k(S_n(u)-\varphi)$. Außerdem nutzen wir, dass $S_n(u) \in C([0,T];L^1(\Omega))$ ist; da $S_n \in \mathcal{T}$ ist, existiert somit insbesondere eine stetige Funktion

$$\overline{S_n(u)} : [0,T] \to L^1(\Omega),$$

die fast überall gleich $S_n(u)$ ist. Da außerdem $S_n(u) - \varphi \in E$ ist, können wir partiell integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} \langle (S_n(u))_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'}\, dt \\
&= \int_0^{t_1} \langle (S_n(u)-\varphi)_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'}\, dt + \int_0^{t_1} \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'}\, dt \\
&= \int_\Omega \Theta_k(\overline{S_n(u)}(t_1) - \varphi(t_1))\, dx - \int_\Omega \Theta_k(S_n(u_0) - \varphi(0))\, dx \\
&\quad + \int_0^{t_1} \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'}\, dt.
\end{aligned}$$

In Verbindung mit (3.3) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Theta_k(\overline{S_n(u)}(t_1) - \varphi(t_1))\, dx - \int \Theta_k(S_n(u_0) - \varphi(0)) dx \\
&+ \int_0^{t_1} \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'}\, dt + \iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} S_n'(u) a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla(T_k(u-\varphi))\, dxdt \\
&+ \iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} S_n''(u) a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla u\ T_k(u-\varphi)\, dxdt \\
= &\iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} S_n'(u) f T_k(u-\varphi)\, dxdt.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Wir wollen diese sechs Terme nun für $n \to \infty$ betrachten.
Es gilt

$$\overline{S_n(u)} = S_n(u) \text{ fast überall in } \mathcal{Q}$$

für alle $n \geq 1$, also $\overline{S_n(u)} = S_n(u)$ in $\mathcal{Q} \setminus A_n$ für eine Menge A_n vom Maß Null für alle $n \geq 1$. Damit gilt, dass für $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\overline{S_n(u)} = S_n(u) \text{ auf } \mathcal{Q} \setminus A$$

für alle $n \geq 1$ ist. Da A eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist, folgt, dass für fast alle $t_1 \in [0,T]$ und fast überall auf Ω gilt, dass

$$\overline{S_n(u)}(t_1) - \varphi(t_1) = S_n(u)(t_1) - \varphi(t_1) \to u(t_1) - \varphi(t_1) \text{ für } n \to \infty.$$

Da außerdem $\varphi \in E$ und somit auch in $C([0,T];L^1(\Omega))$ ist und $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ sowie $|\overline{S_n(u)}(t_1,\cdot) - \varphi(t_1,\cdot)| \le \|u\|_\infty + \|\varphi\|_\infty$ sind, folgt wiederum mit LEBESGUEs Satz von der dominierten Konvergenz, dass für fast alle $t_1 \in [0,T]$

$$\overline{S_n(u)}(t_1) - \varphi(t_1) \to u(t_1) - \varphi(t_1) \text{ in } L^1(\Omega) \text{ für } n \to \infty.$$

Aus der Lipschitz-Stetigkeit* von Θ_k folgt somit, dass der erste Term gegen

$$\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(t_1)\; dx$$

konvergiert. Da $|S_n(u_0)| \le |u_0|$ folgt auch hier mit LEBESGUEs Satz, dass

$$S_n(u_0) \to u_0 \text{ in } L^1(\Omega)$$

und wiederum mit der Lipschitz-Stetigkeit von Θ_k die Konvergenz des zweiten Terms gegen

$$-\int_\Omega \Theta_k(u_0 - \varphi(0))\; dx.$$

Der dritte Term hängt nicht von n ab und wie bereits gesehen gilt, dass

$$a(t,x,u,\nabla u)\cdot \nabla(T_k(u-\varphi)) \text{ und } fT_k(u-\varphi) \in L^1(\mathcal{Q})$$

sind. Zusammen mit den Tatsachen, dass $|S_n'| \le 1$ ist und $S_n'(u)$ für $n \to \infty$ gegen eins konvergiert, folgt aus LEBESGUEs Satz, dass der vierte Term gegen

$$\iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot \nabla T_k(u-\varphi)\; dxdt$$

und die rechte Seite gegen

$$\iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} fT_k(u-\varphi)\; dxdt$$

konvergieren. Im verbleibenden Term können wir uns auf die Menge

$$\{n \le |u| \le n+1\}$$

zurückziehen, da S_n'' auf dem Rest Null und sonst durch Eins beschränkt ist. Wir schätzen daher wie folgt ab

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{\mathcal{Q}_{t_1}} S_n''(u)a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\; T_k(u-\varphi)\; dxdt\right| \\
&= \iint_{\{n\le|u|\le n+1\}} |S_n''(u)|a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\; |T_k(u-\varphi)|\; dxdt \\
&\le k \iint_{\{n\le|u|\le n+1\}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\; dxdt.
\end{aligned}$$

*T_k ist eine durch k beschränkte Funktion und die Ableitung von Θ_k; folglich hat Θ_k beschränkte Ableitung und ist stetig differenzierbar, also Lipschitz-stetig.

Nach der Integrabilitätsbedingung an die renormalisierte Lösung geht dieser Term für $n \to \infty$ gegen Null. Durch Übergang zum Grenzwert in (3.4) erhalten wir also

$$\int\limits_{\Omega} \Theta_k(u-\varphi)(t_1)\ dx - \int\limits_{\Omega} \Theta_k(u_0-\varphi(0))\ dx + \int\limits_{0}^{t_1} \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle_{V,V'}\ dt$$
$$+ \iint\limits_{Q_{t_1}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot \nabla T_k(u-\varphi)\ dxdt = \iint\limits_{Q_{t_1}} f T_k(u-\varphi)\ dxdt.$$

Da der zweite Term nicht von t_1 abhängt und die Terme 3-5 als Integrale zur oberen Grenze t_1 von auf $[0,T]$ integrierbaren Funktionen stetig sind, folgt, dass der erste Term bezüglich t_1 fast überall gleich einer auf $[0,T]$ stetigen Funktion ist. Damit ist die zweite Eigenschaft einer Entropielösung gezeigt. Im nächsten Schritt ersetzen wir

$$t \mapsto \int\limits_{\Omega} \Theta_k(u-\varphi)(t)\ dx$$

durch seinen stetigen Vertreter (wir behalten die Notation der Übersichtlichkeit halber bei). Für diesen gilt dann auch

$$\lim_{t\to T} \int\limits_{\Omega} \Theta_k(u-\varphi)(t)\ dx = \int\limits_{\Omega} \Theta_k(u-\varphi)(T)\ dx$$

und somit folgt insbesondere für alle $k \geq 0$ und $\varphi \in E$ (wir ersetzen die duale Paarung im dritten Term wieder mit der Ausgangsnotation), dass

$$\int\limits_{\Omega} \Theta_k(u-\varphi)(T)\ dx - \int\limits_{\Omega} \Theta_k(u_0-\varphi(0))\ dx + \iint\limits_{Q} T_k(u-\varphi)\varphi_t\ dxdt$$
$$+ \iint\limits_{Q} a(t,x,u,\nabla u)\cdot \nabla T_k(u-\varphi)\ dxdt = \iint\limits_{Q} f T_k(u-\varphi)\ dxdt.$$

Hier gilt sogar die Gleichheit. Folglich ist die dritte Eigenschaft der Entropielösung gezeigt und der Beweis somit abgeschlossen.

3.2 Eine Entropielösung ist eine renormalisierte Lösung

Wir zeigen zunächst die Integrabilitätsbedingung (die erste Eigenschaft ist wieder klar). Sei also u eine Entropielösung, außerdem sei $(T_n(u))^h$ $(h > 0)$ eine Regularisierungsfolge zu $T_n(u)$ mit folgenden Eigenschaften (die LANDES-Approximation, siehe LANDES [19]):

(i) $(T_n(u))^h_t = h(T_n(u) - (T_n(u))^h)$,

(ii) $(T_n(u))^h(0) = u_0^h \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u_0^h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq n, u_0^h \to T_n(u_0)$ in $L^1(\Omega)$ für $h \to \infty$ und $\frac{1}{h}\|u_0^h\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to 0$ für $h \to \infty$,

(iii) $|(T_n(u))^h| \leq n$,

(iv) es existiert eine Teilfolge (weiterhin indiziert mit h), so dass

$$(T_n(u))^h \to T_n(u) \text{ in } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$$

und fast überall in $\mathcal{Q}$ für $h \to \infty$.

Dann ist $(T_n(u))^h \in W'$ und $(T_n(u))^h_t \in W$, also $(T_n(u))^h \in E$ und somit eine zulässige Testfunktion in (2.3)(iii) für $k = 1$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Theta_1(u - (T_n(u))^h)(T,x)\,dx - \int_\Omega \Theta_1(u_0 - (T_n(u))^h)(0,x)\,dx \\
&+ \iint_{\mathcal{Q}} T_1(u - (T_n(u))^h)(T_n(u))^h_t\,dxdt \\
&+ \iint_{\mathcal{Q}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_1(u - (T_n(u))^h)\,dxdt \\
\leq &\iint_{\mathcal{Q}} fT_1(u - (T_n(u))^h)\,dxdt.
\end{aligned}$$

Da $\Theta_1 \geq 0$ ist, können wir den ersten Term wegfallen lassen, und da $u-(T_n(u))^h$ und $T_n(u) - (T_n(u))^h$ das gleiche Vorzeichen haben, folgt aus der ersten Eigenschaft der Regularisierungsfolge, dass auch der dritte Term nichtnegativ ist. Wir erhalten also die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{Q}} a(t,x,u,\nabla u)\cdot\nabla(T_1(u - (T_n(u))^h))\,dxdt \\
\leq &\int_\Omega \Theta_1(u_0 - (T_n(u))^h)(0,x)\,dx + \iint_{\mathcal{Q}} fT_1(u - (T_n(u))^h)\,dxdt.
\end{aligned}$$

Für $h \to \infty$ geht (in einer Teilfolge) $(T_n(u))^h$ gegen $T_n(u)$. Da

$$T_1(u - (T_n(u))^h) = T_1(T_{n+1}(u) - (T_n(u))^h)$$

und

$$T_1(T_{n+1}(u) - T_n(u)) = T_1(u - T_n(u)),$$

folgt aus

$$T_1(T_{n+1}(u) - (T_n(u))^h) \to T_1(T_{n+1}(u) - T_n(u))$$

entsprechend

$$T_1(u - (T_n(u))^h) \to T_1(u - T_n(u))$$

in $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ und fast überall in $\mathcal{Q}$.
Weiterhin gilt, dass wenn $|u| \leq n+1$ ist, $|u-(T_n(u))^h| \leq 1$ ist, da $|(T_n(u))^h| \leq n$. $|u - (T_n(u))^h| \leq 1$ ist aber wiederum notwendig, damit

$$\nabla T_1(u - (T_n(u))^h) \neq 0$$

ist, da $T_1(u - (T_n(u))^h)$ in $\{|u| > n+1\}$ konstant Eins wäre. Wir können also das Integral auf der linken Seite auf die Menge $\{|u| \leq n+1\}$ beschränken. Da diese Argumentation unabhängig von h ist, gilt sie auch noch im Grenzwert. In $\{|u| \leq n+1\}$ gilt zudem, dass

$$\begin{aligned} |a(t,x,u,\nabla u)| &\leq C_{n+1}(t,x) + \beta_{n+1}|\nabla u|^{p-1} \\ &= C_{n+1}(t,x) + \beta_{n+1}|\nabla(T_{n+1}(u))|^{p-1} \in L^{p'}(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Für $h \to \infty$ gilt folglich, dass

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\mathcal{Q}} a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla(T_1(u - T_n(u)))\ dxdt \\ &\leq \int\limits_{\Omega} \Theta_1(u_0 - T_n(u_0))\ dx + \iint\limits_{\mathcal{Q}} fT_1(u - T_n(u))\ dxdt. \end{aligned}$$

Wir nutzen nun aus, dass $\nabla(T_1(u - T_n(u))) = \chi_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} \nabla u$, $|\Theta_1(s)| \leq |s|$ und $|u| \leq n$, also $T_1(u - T_n(u)) = 0$. Wir erhalten die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\{n \leq |u| \leq n+1\}} a(t,x,u,\nabla u) \cdot \nabla u\ dxdt \\ &\leq \int\limits_{\Omega} |u_0 - T_n(u_0)|\ dx + \iint\limits_{\{|u| \geq n\}} fT_1(u - T_n(u))\ dxdt. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht die rechte Seite der Ungleichung gegen Null, da einerseits gilt, dass $|u_0 - T_n(u_0)| \leq 2|u_0| \in L^1(\Omega)$ und, da $|u_0 - T_n(u_0)| \to 0$ fast überall in Ω für $n \to \infty$, somit das Integral nach Lebesgues Satz gegen Null konvergiert. Andererseits konvergiert $|\{|u| \geq n\}|$ gegen Null, da $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. Somit ist auch das zweite Integral im Grenzwert Null, da $f \in L^1(\mathcal{Q})$ ist. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt.
Für die weiteren Eigenschaften modifizieren wir unser Problem. Wir setzen $\tilde{a}(t,x,\xi) = a(t,x,u(t,x),\xi)$ und betrachten

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\ \tilde{a}(t,x,\nabla u) &= f \quad \text{in } \mathcal{Q} = (0,T) \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Für dieses Ersatzproblem existiert eine renormalisierte Lösung $\tilde{u}$. Wir zeigen, dass $u = \tilde{u}$, um die noch fehlenden Eigenschaften nachzuweisen. Die Existenz einer renormalisierten Lösung folgt aus BLANCHARD et al. [6]. Durch die Wahl von $\tilde{u}$ folgt, dass $S_n(\tilde{u}) \in E$, wir testen also damit und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Theta_k(u - S_n(\tilde{u}))(T,x)\ dx - \int_\Omega \Theta_k(u_0 - S_n(\tilde{u}))(0,x)\ dx \\
&+ \iint_Q T_k(u - S_n(\tilde{u}))S_n(\tilde{u})_t\ dxdt \\
&+ \iint_Q \tilde{a}(t,x,\nabla u) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u}))\ dxdt \\
\leq &\iint_Q f T_k(u - S_n(\tilde{u}))\ dxdt. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Da S_n durch $n+1$ beschränkt ist, identifizieren wir

$$T_k(u - S_n(\tilde{u})) = T_k(T_{n+k+1}(u) - S_n(\tilde{u})) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q).$$

Dies ist also eine zulässige Testfunktion in (2.2)(iii).

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (S_n(\tilde{u}))_t, T_k(u - S_n(\tilde{u}))\rangle_{V,V'}\ dt \\
= &\iint_Q f S_n'(\tilde{u}) T_k(u - S_n(\tilde{u}))\ dxdt \\
&- \iint_Q T_k(u - S_n(\tilde{u})) S_n''(\tilde{u}) \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}) \cdot \nabla\tilde{u}\ dxdt \\
&- \iint_Q S_n'(\tilde{u}) \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u}))\ dxdt.
\end{aligned}$$

Da nur in $\{n \leq |\tilde{u}| \leq n+1\}$ gelten kann, dass $S_n''(\tilde{u}) \neq 0$ und zudem $|S_n''| \leq 1$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_Q T_k(u - S_n(\tilde{u})) S_n''(\tilde{u}) \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}) \cdot \nabla\tilde{u}\ dxdt \right| \\
\leq &\left| k \iint_{\{n \leq |\tilde{u}| \leq n+1\}} \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}) \cdot \nabla\tilde{u}\ dxdt \right| \\
=: &\ \omega_1(n) \to 0,\ \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist (da $\omega_1 \geq 0$)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (S_n(\tilde{u}))_t, T_k(u - S_n(\tilde{u}))\rangle_{V,V'} \; dt \\
\geq &- \omega_1(n) + \iint_Q f S_n'(\tilde{u}) T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt \\
&- \iint_Q S_n'(\tilde{u}) \tilde{a}(t, x, \nabla \tilde{u}) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

(3.6) und (3.7) ergeben zusammen, da $\Theta_k \geq 0$, dass

$$\begin{aligned}
&\iint_Q (\tilde{a}(t, x, \nabla u) - S_n'(\tilde{u}) a(t, x, \tilde{u}, \nabla \tilde{u})) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt \\
\leq &\iint_Q (1 - S_n'(\tilde{u})) f T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt \\
&+ \int_\Omega \Theta_k(u_0 - S_n(\tilde{u}))(0, x) \; dx + \omega_1(n). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Wir unterteilen die linke Seite dieser Ungleichung nun folgendermaßen

$$\begin{aligned}
&\iint_Q (\tilde{a}(t, x, \nabla u) - S_n'(\tilde{u}) \tilde{a}(t, x, \nabla \tilde{u})) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt \\
= &\iint_{\{|\tilde{u}| \leq n\}} (\tilde{a}(t, x, \nabla u) - S_n'(\tilde{u}) \tilde{a}(t, x, \nabla \tilde{u})) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt \qquad (3.9) \\
&+ \iint_{\{|\tilde{u}| > n\}} \tilde{a}(t, x, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt \qquad (3.10) \\
&- \iint_{\{|\tilde{u}| > n\}} S_n'(\tilde{u}) \tilde{a}(t, x, \nabla \tilde{u}) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Der erste Term (3.9) kann vereinfacht werden, da in $\{|\tilde{u}| \leq n\}$ gilt, dass $S_n(\tilde{u}) = \tilde{u}$, $S_n'(\tilde{u}) = 1$ und $\nabla(T_k(u - S_n(\tilde{u}))) = \chi_{\{|u-\tilde{u}| \leq k\}}(\nabla u - \nabla \tilde{u})$ sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\iint_{\{|\tilde{u}| \leq n\}} (\tilde{a}(t, x, \nabla u) - S_n'(\tilde{u}) \tilde{a}(t, x, \nabla \tilde{u})) \cdot \nabla T_k(u - S_n(\tilde{u})) \; dxdt \\
= &\iint_{\{|\tilde{u}| \leq n\}} \chi_{\{|u-\tilde{u}| \leq k\}} (\tilde{a}(t, x, \nabla u) - \tilde{a}(t, x, \nabla \tilde{u})) \cdot (\nabla u - \nabla \tilde{u}) \; dxdt. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Der Term (3.12) ist der relevante Teil der linken Seite der Ungleichung (3.8). Wir wollen zeigen, dass dieser für $n \to \infty$ gegen Null strebt, daraus kann dann, wie wir noch sehen werden, gefolgert werden, dass u und $\tilde{u}$ fast überall übereinstimmen. Unser Ziel ist also (3.12) durch die linke Seite von (3.8) bis auf eine

Nullfolge abzuschätzen. Betrachten wir nun den zweiten Term (3.10)

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n\}} \tilde a(t,x,\nabla u)\cdot \nabla T_k(u-S_n(\tilde u))\;dxdt\\
=&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} \tilde a(t,x,\nabla u)\cdot (\nabla u - S_n'(\tilde u)\nabla \tilde u)\;dxdt\\
=&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} \tilde a(t,x,\nabla u)\cdot \nabla u\;dxdt\\
&-\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} S_n'(\tilde u)\tilde a(t,x,\nabla u)\cdot \nabla \tilde u\;dxdt.
\end{aligned}
$$

Den dritten Term (3.11) behandeln wir analog. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n\}} S_n'(\tilde u)\tilde a(t,x,\nabla \tilde u)\cdot \nabla T_k(u-S_n(\tilde u))\;dxdt\\
=&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} S_n'(\tilde u)\tilde a(t,x,\nabla \tilde u)\cdot \nabla u\;dxdt\\
&-\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} S_n'(\tilde u)^2\tilde a(t,x,\nabla \tilde u)\cdot \nabla \tilde u\;dxdt.
\end{aligned}
$$

Wieder zusammengefasst ergeben (3.10) und (3.11)

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} \tilde a(t,x,\nabla u)\cdot \nabla u\;dxdt\\
-&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} S_n'(u)(\tilde a(t,x,\nabla u)\cdot \nabla \tilde u + \tilde a(t,x,\nabla \tilde u)\cdot \nabla u)\;dxdt\\
+&\iint\limits_{\{|\tilde u|>n,|u-S_n(\tilde u)|\le k\}} S_n'(\tilde u)^2\tilde a(t,x,\nabla \tilde u)\cdot \nabla \tilde u\;dxdt.
\end{aligned}
$$

In $\{|\tilde u|\ge n\}$ gilt, dass $n\le S_n(\tilde u)\le n+1$ ist. Wenn außerdem $|u-S_n(\tilde u)|\le k$ ist, folgt, dass

$$|u|\le k+|S_n(\tilde u)|\le k+n+1$$

und

$$|u|\ge |S_n(\tilde u)-k|\ge n-k$$

sind. Umgekehrt folgt aus den letzten beiden Ungleichungen wiederum, dass

$$|u-S_n(\tilde u)|\le k$$

ist. Da weiterhin für $|r|>n+1$ gilt, dass $S_n'(r)=0$ und außerdem $|S_n'|\le 1$ sind, kriegen wir den ersten und dritten Term mit der Integrabilitätsbedingung in den Griff (wir runden k der Einfachheit halber zur nächsthöheren natürlichen Zahl auf)

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\{|\tilde{u}|>n,|u-S_n(\tilde{u})|\leq k\}} \tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla u\; dxdt \\
&= \iint\limits_{\{n-k\leq|u|\leq n+k+1\}} \tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla u\; dxdt \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \iint\limits_{\{n+j\leq|u|\leq n+j+1\}} \tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla u\; dxdt.
\end{aligned}$$

Jedes einzelne Summenglied geht für $n\to\infty$ gegen Null, also auch das gesamte Integral. Ähnlich verfahren wir für den dritten Term

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\{|\tilde{u}|>n,|u-S_n(\tilde{u})|\leq k\}} S_n'(\tilde{u})^2\tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u})\cdot\nabla\tilde{u}\; dxdt \\
&\leq \iint\limits_{\{n\leq|\tilde{u}|\leq n+1,n-k\leq|u|\leq n+k+1\}} \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u})\cdot\nabla\tilde{u}\; dxdt.
\end{aligned}$$

Auch hier nutzen wir die Integrabilität aus ($\tilde{u}$ ist eine renormalisierte Lösung). Es bleibt noch der mittlere Term. Für diesen unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall 1:

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\iint\limits_{\{|\tilde{u}|>n,|u-S_n(\tilde{u})|\leq k\}} S_n'(\tilde{u})(\tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla\tilde{u}+\tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u})\cdot\nabla u)\; dxdt \\
&= \iint\limits_{\{|\tilde{u}|>n,|u-S_n(\tilde{u})|\leq k\}} S_n'(\tilde{u})(\tilde{a}(t,x,\nabla u)-\tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}))\cdot(\nabla u-\nabla\tilde{u}) \\
&\quad - S_n'(\tilde{u})(\tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla u-\tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u})\cdot\nabla\tilde{u})\; dxdt \\
&\geq -\iint\limits_{\{|\tilde{u}|>n,|u-S_n(\tilde{u})|\leq k\}} S_n'(\tilde{u})(\tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla u-\tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u})\cdot\nabla\tilde{u})\; dxdt \\
&\to 0 \text{ für } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned}
0 &\leq -\iint\limits_{\{|\tilde{u}|>n,|u-S_n(\tilde{u})|\leq k\}} \Big(S_n'(u)(\tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla\tilde{u}+\tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u})\cdot\nabla u)\Big)\; dxdt \\
&\leq \iint\limits_{\{|\tilde{u}|>n,|u-S_n(\tilde{u})|\leq k\}} \Big(2C_u(t,x)+\beta_u|\nabla u|^{p-1}|\nabla\tilde{u}|+\beta_u|\nabla\tilde{u}|^{p-1}|\nabla u|\Big)\; dxdt \\
&\leq \iint\limits_{\{n\leq|\tilde{u}|\leq n+1,n-k\leq|u|\leq n+k+1\}} \Big(2C_u(t,x)+2\beta_u\max(|\nabla u|^p,|\nabla\tilde{u}|^p)\Big)\; dxdt \\
&\to 0 \\
&\quad \text{für } n\to\infty \text{ , da } |\{n\leq|\tilde{u}|\leq n+1, n-k\leq|u|\leq n+k+1\}|\to 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung 9. *Nur an dieser Stelle benötigen wir die zusätzliche Wachstumsbedingung (IIIA). Es hätte ebenso (IIIB) verwendet werden können, indem man ausnutzt, dass für eine Entropielösung u gilt, dass für $0 \leq q \leq p(1-\frac{1}{p^*})$ $|u|^q \in L^1(\mathcal{Q})$ ist; siehe dazu* Droniou und Prignet [11]. *Es fällt zudem auf, dass, wenn $u = \tilde{u}$ ist, der Wert unter dem Integral nichtnegativ ist. Der Fall 2 tritt demnach im Nachhinein nicht auf.*

Wenden wir diese Ergebnisse auf (3.9), (3.10) und (3.11) an, folgt, dass eine Nullfolge $(\omega_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, für die

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathcal{Q}} (\tilde{a}(t,x,\nabla u) - S_n'(\tilde{u})\tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}))\cdot\nabla T_k(u - S_n(\tilde{u}))\ dxdt \\
\geq &\iint\limits_{\{|\tilde{u}|\leq n\}} \chi_{\{|u-\tilde{u}|\leq k\}}(\tilde{a}(t,x,\nabla u) - \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}))\cdot(\nabla u - \nabla\tilde{u})\ dxdt - \omega_2(n)
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit gilt wiederum mit (3.8)

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\{|\tilde{u}|\leq n\}} \chi_{\{|u-\tilde{u}|\leq k\}}(\tilde{a}(t,x,\nabla u) - \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}))\cdot(\nabla u - \nabla\tilde{u})\ dxdt \\
\leq &\iint\limits_{\mathcal{Q}} (1 - S_n'(\tilde{u}))fT_k(u - S_n(\tilde{u}))\ dxdt \\
&+ \int\limits_{\Omega} \Theta_k(u_0 - S_n(\tilde{u}))(0,x)\ dx + \omega_1(n) + \omega_2(n) \\
\leq &k\left(\iint\limits_{\mathcal{Q}} |f||1 - S_n'(\tilde{u})|\ dxdt + \int\limits_{\Omega} |u_0 - S_n(u_0)|\ dx\right) + \omega_1(n) + \omega_2(n).
\end{aligned}$$

Da für $n \to \infty$ gilt, dass $S_n(s) \to s$ und $S_n' \to 1$ sowie $|S_n(s)| \leq |s|$ und $|S_n'| \leq 1$ sind, folgt aus Lebesgues Satz, dass für $n \to \infty$

$$\iint\limits_{\mathcal{Q}} |f||1 - S_n'(\tilde{u})|\ dxdt + \int\limits_{\Omega} |u_0 - S_n(u_0)|\ dx \to 0.$$

Aus der Monotonie (Nichtnegativität) folgt mit dem Lemma von Fatou, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{Q}} \chi_{\{|\tilde{u}|\leq n\}}\chi_{\{|u-\tilde{u}|\leq k\}}(\tilde{a}(t,x,\nabla u) - \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}))\cdot(\nabla u - \nabla\tilde{u})\ dxdt$$

höchstens Null ist. Also gilt fast überall in $\mathcal{Q}$, dass

$$\chi_{\{|u-\tilde{u}|\leq k\}}(\tilde{a}(t,x,\nabla u) - \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}))\cdot(\nabla u - \nabla\tilde{u}) = 0$$

ist. Aus der Beliebigkeit von k und der Tatsache, dass u und $\tilde{u}$ fast überall endlich sind, gilt auch, dass fast überall in $\mathcal{Q}$ $(\tilde{a}(t,x,\nabla u) - \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u}))\cdot(\nabla u - \nabla\tilde{u}) = 0$ ist.

Wir betrachten nun die Funktion

$$\omega_n = T_1(T_n(u) - T_n(\tilde{u})) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),$$

für diese gilt, dass

$$\nabla\omega_n = \chi_{\{|T_n(u)-T_n(\tilde{u})|\leq 1\}}\left(\chi_{\{|u|\leq n\}}\nabla u - \chi_{\{|\tilde{u}|\leq n\}}\nabla\tilde{u}\right)$$

ist. Da $\nabla\omega_n = 0$ ist, falls $|u|$ und $|\tilde{u}|$ beide echt großer n sind und ebenso, wenn

$$|u - T_n(\tilde{u})| > 1$$

beziehungsweise

$$|\tilde{u} - T_n(u)| > 1$$

ist, erhalten wir durch Abschätzen, dass

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathcal{Q}} |\nabla\omega_n|^p \ dxdt \\
\leq &\iint\limits_{\{n-1\leq|u|\leq n\}} |\nabla u|^p \ dxdt + \iint\limits_{\{n-1\leq|\tilde{u}|\leq n\}} |\nabla\tilde{u}|^p \ dxdt \\
\leq &\frac{1}{\alpha}\left(\iint\limits_{\{n-1\leq|u|\leq n\}} \tilde{a}(t,x,\nabla u)\cdot\nabla u \ dxdt + \iint\limits_{\{n-1\leq|\tilde{u}|\leq n\}} \tilde{a}(t,x,\nabla\tilde{u})\cdot\nabla\tilde{u} \ dxdt\right).
\end{aligned}$$

Dieser Term geht mit den Integrabilitätsbedingungen an u und $\tilde{u}$ für $n\to\infty$ gegen Null. Damit gilt $\omega_n \to 0$ in $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, also insbesondere in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$. Da aber fast überall $\omega_n \to T_1(u-\tilde{u})$ und $|\omega_n|\leq 1$ ist, folgt außerdem

$$\omega_n \to T_1(u-\tilde{u})$$

in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$. Es gilt also, dass $T_1(u-\tilde{u}) = 0$ fast überall in $\mathcal{Q}$ ist. Damit ist dann auch $u=\tilde{u}$ fast überall in $\mathcal{Q}$. Damit folgt, dass u eine renormalisierte Lösung zu (3.5) und damit auch zu (2) ist.

3.3 Eine milde Lösung ist eine renormalisierte Lösung

Vorab betrachten wir die durch eine milde Lösung gegebenen Näherungslösungen und inwiefern das dadurch gegebene Problem im Ort gelöst ist. Im zweiten Teil nutzen wir dies aus, um mit den Techniken eines Existenzbeweises für renormalisierte Lösungen zu zeigen, dass der Grenzwert der Näherungslösungsfolge eine renormalisierte Lösung und damit auch identisch zu der milden Lösung ist.

3.3.1 Näherungsgleichungen und der Abschluss von A

Wenn man den Operator A aus (2.8) betrachtet, fällt einem auf, dass dieser nur Lösungen von

$$\begin{cases} u - \text{div } a(x,u,\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

für beschränkte rechte Seiten f liefern kann, da eine Lösung u aus $D(A)$ und damit aus $L^\infty(\Omega)$ und $Au = -\text{div } a(\cdot, u, \nabla u)$ nach Voraussetzung aus $L^\infty(\Omega)$ wären. Will man allerdings Näherungsgleichungen

$$\begin{cases} \frac{v - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} - \text{div } a(x,v,\nabla v) &= f_i \quad \text{in } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

der milden Lösung betrachten und dabei f_i aus $L^1(\Omega)$ zulassen, so führt das gerade auf Gleichungen der Form (3.13) mit f aus $L^1(\Omega)$. Um dieses Problem zu umgehen, nutzt man folgende, sehr nützliche Eigenschaft milder Lösungen aus.

Theorem 3.2. *Eine Funktion u aus $C([0,T]; L^1(\Omega))$ ist genau dann eine milde Lösung von*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au &\ni f \quad \textit{in } [0,T], \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

wenn sie eine milde Lösung von

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \bar{A}u &\ni f \quad \textit{in } [0,T], \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

ist.

Beweis. Siehe Bénilan et al. [4, Thm. 1.7]. □

Wir interessieren uns also für den Abschluss von A in $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$. Sei also (u_n, f_n) eine konvergente Folge in A mit Grenzwert (u, f) in $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$. Im weiteren wollen wir zeigen, dass u eine renormalisierte Lösung von

$$\begin{cases} -\text{div } a(x,u,\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.14}$$

ist. Damit kann der Abschluss von A folgendermaßen beschrieben werden

$$\bar{A} = \{(u,f) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \mid u \text{ ist renormalisierte Lösung von (3.14) zur rechten Seite } f\}.$$

Da $(u_n, f_n) \in A$ ist, gilt jeweils, dass u_n schwache Lösung von (3.14) zur rechten Seite f_n ist. Insbesondere ist dann u_n auch eine renormalisierte Lösung. Es gilt also

$$-\mathrm{div}(a(x, u_n, \nabla u_n)S'(u_n)) + S''(u_n)a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n = f_n S'(u_n)$$

in $\mathcal{D}'(\Omega)$ für alle $S \in \mathcal{T}$. Wir wollen in diesen Termen nun zum Grenzwert für $n \to \infty$ übergehen. Dabei reicht es, die einzelnen Terme für „abgeschnittene" u_n zu betrachten, da S' und S'' kompakte Träger haben. Wir stellen zunächst fest, dass fast überall in Ω

$$a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)) \to a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))$$

gilt, da a eine CARATHÉODORY-Funktion ist. Durch die Wachstumsbedingung (III) an a gilt diese Konvergenz sogar in $(L^{p'}(\Omega))^N$. Außerdem konvergiert eine Teilfolge von

$$a(\cdot, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n))$$

nach dem Satz von EBERLEIN-ŠMULIAN schwach in $(L^{p'}(\Omega))^N$. Die Monotonie von a erlaubt es uns diesen Grenzwert mit u zu identifizieren. Man stellt fest, dass

$$\begin{aligned} &a(\cdot, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) \cdot \nabla T_k(u_n) \\ \rightharpoonup\ &a(\cdot, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \text{ in } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Diese Argumente werden im nächsten Teil analog verwendet und genauer ausgeführt. Wählt man k so, dass supp S' und supp S'' in $[-k, k]$ liegen, erhält man

$$a(\cdot, u_n, \nabla u_n)S'(u_n) \rightharpoonup a(\cdot, u, \nabla u)S'(u) \text{ in } (L^{p'}(\Omega))^N$$

und

$$S''(u_n)a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \rightharpoonup S''(u)a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u$$

in $L^1(\Omega)$. Da außerdem

$$f_n S'(u_n) \to f S'(u) \text{ in } L^1(\Omega),$$

folgt, dass u eine renormalisierte von (3.14) zur rechten Seite f ist. Betrachtet man zusätzlich, dass

$$u_n S'(u_n) \to u S'(u) \text{ in } L^1(\Omega),$$

stellt man fest, dass eine Näherungslösung von (3.13) diese für rechte Seiten aus $L^1(\Omega)$ im renormalisierten Sinn erfüllt.

3.3.2 Existenz und Übereinstimmen mit einer milden Lösung einer renormalisierten Lösung

Zunächst wollen wir zeigen, dass eine milde Lösung u in $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ und $T_k(u)$ für alle $k \geq 0$ in $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ liegt. Da $C([0, T]; L^1(\Omega))$ Teilmenge von $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ ist, ist die erste Aussage klar. Für die zweite Aussage betrachten wir die ε-approximativen Lösungen u_ε zu u. Durch

$$[0,T] \ni t \mapsto \tilde{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_\varepsilon(t), & t \in [t_0, t_N], \\ 0, & t \notin [t_0, t_N] \end{cases}$$

wird eine Abbildung $\tilde{u}_\varepsilon$ mit Werten in $W_0^{1,p}(\Omega)$ definiert, da die Werte von u_ε per Definition in $D(A)$ liegen und $D(A)$ Teilmenge von $W_0^{1,p}(\Omega)$ ist (nach (2.8)). Da $\tilde{u}_\varepsilon$ nur endlich viele Werte annimmt, gilt insbesondere $\tilde{u}_\varepsilon \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Im weiteren sei $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge. Dann definiert $T_k(\tilde{u}_\varepsilon)$ eine in $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ beschränkte Folge, was sich durch die Argumentation aus dem letzten Teilabschnitt erkennen lässt. Da $\tilde{u}_\varepsilon$ Lösung der Näherungsgleichung ist, erhalten wir mit $T_k(\tilde{u_\varepsilon})$ als Testfunktion die folgende Gleichung (wobei f_ε eine entsprechende Folge von Treppenfunktionen auf $\mathcal{Q}$ mit Grenzwert f ist):

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{Q}} a(x, \tilde{u_\varepsilon}, \nabla\tilde{u_\varepsilon}) \cdot \nabla T_k(\tilde{u_\varepsilon})\ dxdt \\ =&\iint_{\mathcal{Q}} f_\varepsilon T_k(\tilde{u}_\varepsilon)\ dxdt \\ &- \iint_{\mathcal{Q}} \widehat{(u_\varepsilon)_t} T_k(\tilde{u_\varepsilon})\ dxdt. \end{aligned}$$

Dabei definieren wir $\widehat{(u_\varepsilon)_t} := \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \chi_{(t_{i-1},t_i]}$ als Schreibweise für die diskrete Ableitung. Aus der Koerzitivität (II) wissen wir, dass für $n \geq k$ gilt, dass

$$\alpha |\nabla T_k(\tilde{u_\varepsilon})|^p \leq a(x, T_k(\tilde{u_\varepsilon}), \nabla T_k(\tilde{u_\varepsilon})) \cdot \nabla T_k(\tilde{u_\varepsilon}).$$

Wir erkennen also, dass wir $\nabla T_k(\tilde{u_\varepsilon})$ durch die Approximation an die rechte Seite und die Zeitableitung abschätzen können. Da f_ε gegen f konvergiert, ist dieser Teil beschränkt. Mit der Zeitableitung verfahren wie folgt. Wir definieren die Funktion

$$U_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(v_{i-1} + \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (t - t_{i-1}) \right) \chi_{(t_{i-1},t_i]}.$$

Es gilt $(U_\varepsilon)_t = \widehat{(u_\varepsilon)_t}$. Wir stellen fest, dass auch U_ε „ε-nah“ am Problem liegt. Wir zeigen dafür, dass der Abstand zu u_ε hinreichend klein ist. Wir nutzen die gleichmäßige Stetigkeit von u aus und wählen für gegebenes $\hat{\varepsilon} > 0$ das zugehörige $\delta = \varepsilon$, so dass dann für ein $i \in \{1, \ldots, N\}$ gilt, dass aus $|t_{i-1} - t_i| < \varepsilon$ folgt, dass $\|u(t_{i-1}) - u(t_i)\|_{L^1(\Omega)} < \hat{\varepsilon}$ (o.B.d.A. sei $\varepsilon < \hat{\varepsilon}$). Damit folgt für $t \in [t_0, t_N]$, dass

$$
\begin{aligned}
&\|U_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t)\|_{L^1(\Omega)}\\
=&\left\| v_{i-1} + \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) - v_i \right\|_{L^1(\Omega)}\\
=&\left\| \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_i) \right\|_{L^1(\Omega)}\\
\leq&\frac{|t_i - t|}{|t_i - t_{i-1}|}(\|v_{i-1} - u(t_{i-1})\|_{L^1(\Omega)} + \|u(t_{i-1}) - u(t_i)\|_{L^1(\Omega)} + \|u(t_i) - v_i\|_{L^1(\Omega)})\\
<&3\hat{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Es reicht also $\iint\limits_{Q} (U_\varepsilon)_t T_k(U_\varepsilon)\ dxdt$ zu betrachten. Dafür definieren wir

$$\tilde{T}_k(r) := \int\limits_0^r T_k(s)ds.$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q} (U_\varepsilon)_t T_k(U_\varepsilon)\ dxdt\\
=&\int\limits_\Omega \tilde{T}_k(U_\varepsilon)(T)\ dx - \int\limits_\Omega \tilde{T}_k(U_\varepsilon)(0)\ dx.
\end{aligned}
$$

Dieser Term kann also ebenso durch eine konvergente und somit beschränkte Folge abgeschätzt werden. $T_k(\tilde{u}_\varepsilon)$ besitzt also, da $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ reflexiv ist, nach dem Satz von EBERLEIN-ŠMULIAN eine schwach konvergente Teilfolge, die wir weiterhin mit ε indizieren, so dass es ein χ_k aus $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ gibt und

$$T_k(\tilde{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \chi_k \text{ in } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Außerdem gilt aber für $\varepsilon \downarrow 0$, dass für alle t in $(0,T)$ $\tilde{u}_\varepsilon(t)$ gegen $u(t)$ in $L^1(\Omega)$ konvergiert. Da aus der Konvergenz in $L^1(\Omega)$ die Konvergenz fast überall in Ω folgt, konvergiert $\tilde{u}_\varepsilon$ auch fast überall in Q gegen u. Insbesondere konvergiert dann für jedes $k \geq 0$ auch $T_k(\tilde{u}_\varepsilon)$ gegen $T_k(u)$ fast überall in Q. Daraus folgt aber, dass $\chi_k = T_k(u) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ für alle $k \geq 0$.
Um die Integrabilitätsbedingung nachzuweisen, zeigen wir diese zunächst für die fortgesetzten ε-Näherungslösungen $\tilde{u}_\varepsilon$. Wir betrachten

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\{n\leq|\tilde{u}_\varepsilon|\leq n+1\}} a(x,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\tilde{u}_\varepsilon\ dxdt\\
=&\iint\limits_{Q} \chi_{\{n\leq|\tilde{u}_\varepsilon|\leq n+1\}} a(x,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\tilde{u}_\varepsilon\ dxdt
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

und nutzen aus, dass sich $\tilde{u}_\varepsilon(t)$ nur aus endlich vielen Werten $v_0,\ldots,v_N \in D(A) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ zusammensetzt. Für fast alle $x \in \Omega$ gilt also

$$|\tilde{u}_\varepsilon(t,x)| \leq \max_{i=0,\ldots,N} |v_i(x)| \leq \max_{i=0,\ldots,N} \|v_i\|_{L^\infty(\Omega)} =: K_\varepsilon < \infty.$$

Es gibt demnach ein $n \in \mathbb{N}$, so dass fast überall in $\mathcal{Q}$ der Betrag von $\tilde{u}_\varepsilon$ kleiner als n ist. Da außerdem $a(x, \tilde{u}_\varepsilon, \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon$ nichtnegativ ist, folgt

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{Q}} \chi_{\{n \le |\tilde{u}_\varepsilon| \le n+1\}} a(x, \tilde{u}_\varepsilon, \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon \; dxdt \\
&\le \iint_{\mathcal{Q}} a(x, \tilde{u}_\varepsilon, \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon \; dxdt \\
&\le \max_{i=0,\dots,N} \iint_{\mathcal{Q}} a(x, v_i, \nabla v_i) \cdot \nabla v_i \; dxdt \\
&\le \max_{i=0,\dots,N} \iint_{\mathcal{Q}} (C_{K_\varepsilon}(t,x) + \beta_{K_\varepsilon} |\nabla v_i|^{p-1}) |\nabla v_i| \; dxdt < \infty.
\end{aligned}$$

Damit folgt, da $\chi_{\{n \le |\tilde{u}_\varepsilon| \le n+1\}}$ für $n \to \infty$ fast überall in $\mathcal{Q}$ gegen Null konvergiert, mit LEBESGUEs Satz, dass (3.15) für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Weiterhin nutzen wir aus, dass $\chi_{\{n \le |\tilde{u}_\varepsilon| \le n+1\}} \nabla \tilde{u}_\varepsilon = \nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon))$. Es gilt (gegebenenfalls in einer Teilfolge, die wir weiterhin mit ε indizieren), dass

$$T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon)) \rightharpoonup T_1(u - T_n(u)) \text{ in } L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Wir identifizieren also (ausgenutzt wird, dass $T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon)) = 0$ für $|\tilde{u}_\varepsilon| > n+1$ ist)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{Q}} \chi_{\{n \le |\tilde{u}_\varepsilon| \le n+1\}} a(x, \tilde{u}_\varepsilon, \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon \; dxdt \\
&= \iint_{\mathcal{Q}} a(x, \tilde{u}_\varepsilon, \nabla \tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon)) \; dxdt \\
&= \iint_{\mathcal{Q}} a(x, T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla (T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon))) \cdot \nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon)) \; dxdt. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Da nun aber

$$|a(x, T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon))| \le C_{n+1}(t,x) + \beta_{n+1} |\nabla T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon)|^{p-1},$$

folgt, dass $a(x, T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon))$ in $(L^{p'}(\mathcal{Q}))^N$ beschränkt ist und somit auch hier ein schwacher Grenzwert für $\varepsilon \downarrow 0$ existiert. Folglich ist (3.16) unabhängig von ε beschränkt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{Q}} a(x, T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon)) \cdot \nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon)) \; dxdt \\
&= \int_0^T \langle a(\cdot, T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon)), \nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon)) \rangle_{L^{p'}(\Omega), L^p(\Omega)} \; dt.
\end{aligned}$$

Der Integrand der rechten Seite der vorstehenden Gleichung liegt in $L^1(0,T)$ und hat nach den obigen Abschätzungen[†] eine von ε unabhängige Majorante in

[†]Wir hatten gezeigt, dass $\nabla T_k(\tilde{u_\varepsilon})$ beschränkt in $L^p(\mathcal{Q})^N$ ist, folglich sind die Terme in der dualen Paarung in $L^{p'}(\mathcal{Q})^N$ beziehungsweise in $L^p(\mathcal{Q})^N$ beschränkt.

$L^1(0,T)$ und konvergiert somit in diesem Raum. Es gilt also, dass

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \iint_{\mathcal{Q}} a(x, T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla(T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon))) \cdot \nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon))\ dxdt = 0 \tag{3.17}$$

und entprechend

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \iint_{\{n\le|\tilde{u}_\varepsilon|\le n+1\}} a(x, \tilde{u}_\varepsilon, \nabla\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \nabla\tilde{u}_\varepsilon\ dxdt = 0$$

sind. Damit hätten wir die Integrabilitätsbedingung gezeigt, wenn für alle $k \geq 0$ gelten würde, dass

$$a(x, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon) \rightharpoonup a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{in } L^1(\mathcal{Q}).$$

Zumindest folgt aus dem Satz von Eberlein-Šmulian die Existenz eines schwachen Grenzwerts σ_k von $a(x, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla(T_k(\tilde{u}_\varepsilon)))$ in $(L^{p'}(\mathcal{Q}))^N$. Außerdem gilt fast überall in $\mathcal{Q}$, dass

$$a(x, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_k(u)) \to a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)).$$

Wir nutzen dabei aus, dass a eine Carathéodory-Funktion ist und dass wir bereits nachgewiesen haben, dass $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ fast überall in $\mathcal{Q}$. Die Wachstumsbedingung (III) liefert weiterhin

$$a(\cdot,\cdot, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_k(u)) \to a(\cdot,\cdot, T_k(u), \nabla T_k(u)) \text{ in } (L^{p'}(\mathcal{Q}))^N. \tag{3.18}$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \iint_{\mathcal{Q}} [a(x, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)) - a(x, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_k(u))] \cdot [\nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon) - \nabla T_k(u)]\ dxdt = 0 \tag{3.19}$$

gilt. Durch die Monotonie des Operators ist klar, dass dieser Grenwert zumindest nichtnegativ sein muss. Außerdem schätzen wir ab:

Lemma 3.1. *Für alle $k \geq 0$ gilt, dass*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega a(x, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)\ dxdsdt \leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \sigma_k \cdot \nabla T_k(u)\ dxdsdt.$$

Beweis. Der natürliche Ansatz diese Ungleichung zu erhalten, wäre mit $T_k(u) - T_k(\tilde{u_\varepsilon})$ in der renormalisierten Gleichung mit $S = S_n$ zu testen und erst für $\varepsilon \downarrow 0$ und dann für $n \to \infty$ zu betrachten. Dies führt allerdings nur im elliptischen

Fall zum Erfolg. Wir werden hier nur die nötigen Eigenschaften für die Zeitableitung nachweisen. Für eine entsprechende Betrachtung der anderen Terme sei auf BLANCHARD et al. [6] verwiesen.
Zunächst sei $(T_k(u))^h$ wie in Abschnitt 3.2 als die LANDES-Regularisierung gewählt. Wir zeigen, dass

$$\liminf_{h\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t \langle S_n(\tilde{u}_\varepsilon)_s, T_k(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h)\rangle\; dsdt \geq 0. \tag{3.20}$$

Dafür stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^t \langle S_n(\tilde{u}_\varepsilon)_s, T_k(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h\rangle\; dsdt\\
=&\int_0^T\int_0^t \langle S_n(\tilde{u}_\varepsilon)_s - (T_k(u))^h)_s, S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h)\rangle\; dsdt\\
&-\int_0^T\int_0^t \langle (T_k(u))^h_s, S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - T_k(\tilde{u_\varepsilon})\rangle\; dsdt\\
&+\int_0^T\int_0^t \langle (T_k(u)^h_s, S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h\rangle\; dsdt.
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration im ersten und zweiten Term der rechten Seite erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^t \langle S_n(\tilde{u}_\varepsilon)_s, T_k(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h\rangle\; dsdt\\
=&\frac{1}{2}\iint_Q |S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h|^2\; dxdt - \frac{T}{2}\int_\Omega |S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h|^2(0)\; dx\\
&-\frac{1}{2}\iint_Q |S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - T_k(\tilde{u}_\varepsilon)|^2\; dxdt + \frac{T}{2}\int_\Omega |S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - T_k(\tilde{u}_\varepsilon)|^2(0)\; dx\\
&+\int_0^T\int_0^t \langle (T_k(u)^h_s, S_n(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h\rangle\; dsdt.
\end{aligned}$$

Im Grenzwert erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t \langle S_n(\tilde{u}_\varepsilon)_s, T_k(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h\rangle \; dsdt\\
=&\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{Q}} |S_n(u) - (T_k(u))^h|^2 \; dxdt - \frac{T}{2}\int_\Omega |S_n(u_0) - (T_k(u))^h(0)|^2 \; dx\\
&-\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{Q}} |S_n(u) - T_k(u)|^2 \; dxdt + \frac{T}{2}\int_\Omega |S_n(u_0) - T_k(u_0)|^2(0) \; dx\\
&+\int_0^T\int_0^t \langle (T_k(u)_s^h, S_n(u) - (T_k(u))^h\rangle \; dsdt,
\end{aligned}$$

da durch die Glattheit von S_n auch die Konvergenz in $L^2(\mathcal{Q})$ und die schwach*-Konvergenz in $L^\infty(\mathcal{Q})$ gegeben ist. Durch die weiteren Eigenschaften der LANDES-Regularisierung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t \langle S_n(\tilde{u}_\varepsilon)_s, T_k(\tilde{u_\varepsilon}) - (T_k(u))^h)\rangle \; dsdt\\
=&h\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (T_k(S_n(u)) - (T_k(S_n(u))^h)(S_n(u) - (T_k(S_n(u))^h) \; dxdsdt.
\end{aligned}$$

Da $(T_k(S_n(u)) - (T_k(S_n(u))^h)(S_n(u) - (T_k(S_n(u))^h)$ fast überall auf $\mathcal{Q}$ nichtnegativ ist, gilt (3.20). Dadurch, dass die rechte Seite bei der gleichen Grenzwertbetrachtung wegfällt und der Teil, in dem a mit S_n'' multipliziert wird, mit dem bereits gezeigten Teil (3.17) der Integrabilitätsbedingung in den Griff zu bekommen ist, folgt aus der schwachen Konvergenz

$$S_n'(\tilde{u}_\varepsilon)a(x, T_{n+1}(\tilde{u_\varepsilon}), \nabla T_{n+1}(\tilde{u_\varepsilon})) \rightharpoonup S_n'(u)\sigma_{n+1}$$

in $L^{p'}(\mathcal{Q})^N$ die gewünschte Abschätzung. □

Geht man nun in (3.19) zum Limes Superior über, folgt mit der Monotonie die Behauptung. Das bringt uns nun in die Position den Grenzwert σ_k zu identifizieren, wir zeigen im weiteren also folgendes Lemma.

Lemma 3.2. *Für beliebiges, aber festes $k \geq 0$ gilt fast überall in $\mathcal{Q}$, dass*

$$\sigma_k(t, x) = a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)).$$

Außerdem gilt für $\varepsilon \downarrow 0$ (wieder in einer Teilfolge)

$$\begin{aligned}
&a(\cdot, \cdot, T_k(\tilde{u}_\varepsilon), \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)\\
&\rightharpoonup a(\cdot, \cdot, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)
\end{aligned}$$

in $L^1(\mathcal{Q})$.

Beweis. Aus (3.19) folgt, dass

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\iint\limits_Q a(x,T_k(\tilde u_\varepsilon),\nabla T_k(\tilde u_\varepsilon))\cdot\nabla T_k(\tilde u_\varepsilon)\ dxdt$$
$$=\iint\limits_Q \sigma_k\cdot\nabla T_k(u)\ dxdt.$$

Mit dem Argument von Minty folgern wir nun die erste Aussage. Seien $\lambda\geq 0$ und $\Phi\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, dann gilt mit Hilfe der Monotonie von a und (3.18) die folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned}
&\lambda\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \sigma_k\cdot\nabla\Phi\ dxdsdt\\
=&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega a(x,T_k(\tilde u_\varepsilon),\nabla T_k(\tilde u_\varepsilon))\cdot\nabla(\lambda\Phi)\ dxdsdt\\
\geq&\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega a(x,T_k(\tilde u_\varepsilon),\nabla T_k(\tilde u_\varepsilon))\cdot\nabla(T_k(\tilde u_\varepsilon)-T_k(u)+\lambda\Phi)\ dxdsdt\\
=&\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (a(x,T_k(\tilde u_\varepsilon),\nabla T_k(\tilde u_\varepsilon))-a(x,T_k(\tilde u_\varepsilon),\nabla(T_k(u)-\lambda\Phi))\\
&\quad\cdot(\nabla(T_k(\tilde u_\varepsilon)-T_k(u)+\lambda\Phi))\ dxdsdt\\
&+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega a(x,T_k(\tilde u_\varepsilon),\nabla(T_k(u)-\lambda\Phi))\cdot(\nabla(T_k(\tilde u_\varepsilon)-T_k(u)+\lambda\Phi))\ dxdsdt\\
\geq&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^T\int_0^t\int_\Omega a(x,T_k(\tilde u_\varepsilon),\nabla(T_k(u)-\lambda\Phi))\cdot(\nabla(T_k(\tilde u_\varepsilon)-T_k(u)+\lambda\Phi))\ dxdsdt\\
=&\lambda\int_0^T\int_0^t\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla(T_k(u)-\lambda\Phi))\cdot\nabla\Phi\ dxdsdt.
\end{aligned}$$

Kürzen wir nun das λ auf beiden Seiten, folgt für $\lambda\downarrow 0$

$$\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \sigma_k\cdot\nabla\Phi\ dxdsdt\geq\int_0^T\int_0^t\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\cdot\nabla\Phi\ dxdsdt$$

analog folgt für $\lambda\leq 0$ und $\lambda\uparrow 0$, dass

$$\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \sigma_k\cdot\nabla\Phi\ dxdsdt\leq\int_0^T\int_0^t\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\cdot\nabla\Phi\ dxdsdt.$$

Also folgt die Gleichheit für alle $\Phi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ und somit auch fast überall in $\mathcal{Q}$. Mit der Monotonie und (3.19) folgern wir, dass

$$\begin{aligned}&(a(\cdot,\cdot,T_k(\tilde{u}_\varepsilon),\nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)) - a(\cdot,\cdot,T_k(\tilde{u}_\varepsilon),\nabla T_k(u))) \cdot (\nabla T_k(u_\varepsilon) - \nabla T_k(u))\\ &\to 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

in $L^1(\mathcal{Q})$. Weiterhin erhalten wir aus der Identifikation des Grenzwerts σ_k und (3.18), dass

$$\begin{aligned}a(\cdot,\cdot,T_k(\tilde{u}_\varepsilon),\nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u) &\rightharpoonup a(\cdot,\cdot,T_k(u),\nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u),\\ a(\cdot,\cdot,T_k(\tilde{u}_\varepsilon),\nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(\tilde{u}_\varepsilon) &\rightharpoonup a(\cdot,\cdot,T_k(u),\nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)\end{aligned}$$

in $L^1(\mathcal{Q})$. Dies eingesetzt in (3.21) bringt das Gewünschte. □

Damit haben wir nun die Möglichkeit den Beweis der Integrabilitätsbedingung zuende zu führen. Wir nutzen wieder die Identifizierung $\chi_{\{n\le|\tilde{u}_\varepsilon|\le n+1\}} \cdot \nabla\tilde{u}_\varepsilon = \nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon))$ und (3.17)

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\{n\le|u|\le n+1\}} a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \; dxdt\\ =&\iint\limits_{\mathcal{Q}} a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\chi_{\{n\le|u|\le n+1\}} \; dxdt\\ =&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\iint\limits_{\mathcal{Q}} a(x,T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon),\nabla T_{n+1}(\tilde{u}_\varepsilon))\cdot\nabla T_1(\tilde{u}_\varepsilon - T_n(\tilde{u}_\varepsilon)) \; dxdt\\ &\to 0 \text{ für } n\to\infty.\end{aligned}$$

Wir nutzen nun unsere Erkenntnisse aus dem vorigen Abschnitt aus, inwiefern die approximativen Lösungen die Gleichung auf den einzelnen Zeitabschnitten erfüllen. Für alle $i \in \{1,...,N\}$ gilt

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Av_i \ni f_i, \text{ in } (t_{i-1},t_i]$$

beziehungsweise

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} - \operatorname{div}\, a(x,v_i,\nabla v_i) = f_i, \text{ in } (t_{i-1},t_i] \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega),$$

falls $f_i \in L^\infty(\Omega)$ ist. Wie bereits erwähnt wollen wir dies hier aber nicht voraussetzen. Wir hatten festgestellt, dass für $f_i \in L^1(\Omega)$ die Näherungsgleichungen im renormalisierten Sinn erfüllt sind. Wir erhalten also die folgende Gleichung (wobei $\tilde{f}_\varepsilon$ die analog zu $\tilde{u}_\varepsilon$ definierte Fortsetzung außerhalb von $[t_0,t_N]$ ist).

$$\begin{aligned}&\hat{S}(\tilde{u}_\varepsilon)_t - \operatorname{div}(S'(\tilde{u}_\varepsilon)a(x,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon)) + S''(\tilde{u}_\varepsilon)a(x,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\tilde{u}_\varepsilon\\ &= \tilde{f}_\varepsilon S'(\tilde{u}_\varepsilon) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{Q}),\end{aligned}$$

$$\text{wobei } \hat{S}(\tilde{u}_\varepsilon)_t := \sum_{i=1}^{N} \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\chi_{(t_{i-1},t_i]}S'(v_i).$$

Um den dritten Punkt der renormalisierten Lösung nachzuweisen, fehlen uns noch folgende Konvergenzen in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$

$$\begin{aligned}
&\hat{S}(\tilde{u}_\varepsilon)_t \to S(u)_t,\\
&-\operatorname{div}(S'(\tilde{u}_\varepsilon)a(x,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon)) \to -\operatorname{div}(S'(u)a(x,u,\nabla u)),\\
&S''(\tilde{u}_\varepsilon)a(x,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\tilde{u}_\varepsilon \to S''(u)a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u,\\
&\tilde{f}_\varepsilon S'(\tilde{u}_\varepsilon) \to fS'(u).
\end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst $\hat{S}(\tilde{u}_\varepsilon)_t$. Da S beschränkt und stetig ist, folgt, dass $S(\tilde{u}_\varepsilon)$ gegen $S(u)$ fast überall in $\mathcal{Q}$ und schwach-$*$ in $L^\infty(\mathcal{Q})$ konvergiert. Weiter sehen wir für beliebiges $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$ ein, dass

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (S(u)(t) - S(\tilde{u}_\varepsilon)(t))\varphi'(t)\,dt\\
&= \int_0^T \langle \underbrace{S(u) - S(\tilde{u}_\varepsilon)}_{\rightharpoonup_* 0}, \varphi'\rangle_{L^\infty(\mathcal{Q}),L^1(\mathcal{Q})}\,dt\\
&\to 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Folglich konvergiert auch die verallgemeinerte Zeitableitung, allerdings steht uns in den Näherungsgleichungen nur die diskrete Zeitableitung zur Verfügung. Wir betrachten also zunächst die anderen Grenzwerte. Für die rechte Seite wissen wir aus der Definition der milden Lösung, dass für alle t in $(0,T)$

$$\|f_\varepsilon(t) - f(t)\|_{L^1(\Omega)} \to 0,$$

es folgt also insbesondere punktweise Konvergenz fast überall in $\mathcal{Q}$. Mit dem kompakten Träger von S' folgt mit dem Satz von LEBESGUE das Gewünschte. Betrachten wir den Divergenzterm, folgt aus der vorangegangenen Identifikation von σ_k, dass bei gleichmäßiger Beschränkung von $\tilde{u}_\varepsilon$ und u durch ein $k \geq 0$

$$a(\cdot,\cdot,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon) \rightharpoonup a(\cdot,\cdot,u,\nabla u) \text{ in } (L^{p'}(\mathcal{Q}))^N$$

gilt. Durch die Multiplikation mit S' und der Existenz eines $k \geq 0$, so dass $\operatorname{supp} S' \subset [-k,k]$ (S' hat kompakten Träger), folgt aus der Linearität der Divergenz die Konvergenz in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$. Auch für den letzten Term machen wir uns zunutze, dass S'' ebenfalls kompakten Träger hat. Mit dem zweiten Punkt des Lemmas (3.2) folgt

$$S''(\tilde{u}_\varepsilon)a(x,\tilde{u}_\varepsilon,\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\cdot\nabla\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup S''(u)a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u \text{ in } L^1(\mathcal{Q})$$

und somit auch in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$. Wir stellen fest, dass $\hat{S}(\tilde{u}_\varepsilon)_t$ in $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ beschränkt ist. Somit existiert wiederum (in einer Teilfolge) ein schwacher Grenzwert χ_S. Für diesen gilt, dass

$$\chi_S = \operatorname{div}(S'(u)a(x,u,\nabla u)) - S''(u)a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u + fS'(u)$$

in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$ ist. Es gilt also ebenso $S(U_\varepsilon) \to S(u)$ fast überall in $\mathcal{Q}$ und schwach-$*$ in $L^\infty(\mathcal{Q})$. Damit folgt, dass $S(U_\varepsilon)_t \to S(u)_t$ in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$ analog zu (3.22). Weiter

gilt, da $(U_\varepsilon)_t = \widehat{(u_\varepsilon)_t}$ ist, auch, dass $S(U_\varepsilon)_t = S'(\tilde{u}_\varepsilon)\widehat{(u_\varepsilon)_t} = \hat{S}(\tilde{u}_\varepsilon)_t$ ist und somit auch, dass $\chi_S = S(u)_t$.
Für die noch fehlende Eigenschaft $S(u)(0) = S(u_0)$ nutzen wir aus, dass aus der Theorie für milde Lösungen bereits hervorgeht, dass $u(0) = u_0$ ist, folglich gilt dies auch eingesetzt in alle $S \in \mathcal{T}$.

3.4 Eine renormalisierte Lösung ist eine milde Lösung

Wir werden uns hier auf den Fall beschränken, dass die milde und die renormalisierte Lösung existieren und eindeutig sind. Dann folgt mit dem vorangegangenen Beweis, dass jede (die eindeutige) renormalisierte Lösung auch eine milde Lösung sein muss. Im folgenden soll nun erläutert werden, unter welchen Voraussetzungen eine eindeutige milde Lösung existiert und die renormalisierte Lösung eindeutig ist.

3.4.1 Existenz und Eindeutigkeit der milden Lösung

Wir werden hier wie in (2.3) annehmen, dass a nicht von t abhängt. Will man, dass ein inhomogenes Problem eindeutige Lösungen hat, so benötigt man zusätzliche Eigenschaften des Wertebereichs des Operators. Hierbei ist zunächst die Eigenschaft der *m-Akkretivität* zu nennen.

Definition 3.1. *Ein Operator $A : X \to 2^X$ heißt m-akkretiv, wenn dieser akkretiv ist und für alle $\lambda > 0$ gilt, dass $X = R(I + \lambda A)$.*

Es gilt der folgende Satz (siehe Bénilan et al. [4, Thm. 4.2]).

Theorem 3.3. *Range-Bedingung*
Genügt ein m-akkretiver Operator A in X einer Range-Bedingung, das heißt

$$D(A) \subset R(I + \lambda A),$$

für alle $\lambda > 0$, dann existiert zu jedem Anfangswert $u_0 \in \overline{D(A)}$ genau eine milde Lösung $u \in C([0, T]; X)$.

Bemerkung 10. *Dieser Satz ist eine Folgerung aus dem Lemma von* Kobayashi*, siehe* Bénilan et al. [4, Thm. 3.5].

In Verbindung mit Theroem 3.2 erkennen wir, dass wir benötigen, dass der Abschluss $\bar{A}$ des in (2.8) definierten Operators m-akkretiv ist und der obigen Range-Bedingung genügt.

Bemerkung 11. *In unserem Fall ist $X = L^1(\Omega)$ und wie wir noch zeigen werden liegt $D(A)$, wie wir es in (2.8) definiert haben, darin dicht, es folgt somit die Lösbarkeit für Anfangswerte in $L^1(\Omega)$, wie in (2.1) gefordert.*

Wir wollen also zeigen, dass die Range-Bedingung erfüllt ist. Dafür zeigen wir, dass für alle Gleichungen der folgenden Art eine schwache Lösung existiert. Seien $\lambda > 0$ und $f \in L^\infty(\Omega)$:

$$\begin{cases} u - \lambda \text{div } a(x, u, \nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

Es reicht offenbar die Gleichung für ein festes $\lambda > 0$ zu betrachten, deswegen sei im weiteren $\lambda = 1$. Außerdem gewinnen wir mit folgendem Lemma eine A-priori-Abschätzung.

Lemma 3.3. *Ist u eine Lösung von (3.23), so ist $u \in L^\infty(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Beweis. Sei Φ eine monoton wachsende $C^\infty(\mathbb{R})$-Funktion. Dann gilt, dass

$$\int_\Omega T_k(u)\Phi(u) + \underbrace{a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\ \Phi'(u)}_{\geq 0}\ dx = \int_\Omega f\Phi(u)\ dx.$$

Sei nun $\Phi_\varepsilon \to \operatorname{sign}_0^+(\cdot - \bar{k})$ mit $\bar{k} := \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$, $|\Phi_\varepsilon| \leq 2$ und den Eigenschaften von Φ. Dann gilt $|T_k(u) - \Phi_\varepsilon(u)| \leq 2 + k$. Mit LEBESGUEs Satz folgt somit für $k > \bar{k}$, dass

$$\int_{\{u>\bar{k}\}} T_k(u)\ dx \leq \int_{\{u>\bar{k}\}} f\ dx$$

und damit

$$\int_{\{u>\bar{k}\}} \Big(T_k(u) - \bar{k}\Big) dx \leq \int_{\{u>\bar{k}\}} \Big(f - \bar{k}\Big) dx \leq 0.$$

Also folgt, dass $|T_k(u)| \leq \bar{k}$ ist. Da aber $k > \bar{k}$ ist, gilt die Abschätzung $|u| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ fast überall in Ω. $\square$

Wir ersetzen nun das Problem durch das folgende

$$\begin{cases} T_K(u) - \operatorname{div}\ a(x, T_K(\tilde{u}), \nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Dabei ist $\tilde{u}$ eine beliebige Funktion aus $L^p(\Omega)$ und $K := \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$. Die Existenz einer Lösung dieses Ersatzproblems kann aus dem Satz von BROWDER-MINTY (siehe GAJEWSKI et al. [16]) gefolgert werden.

Theorem 3.4. *Ein Operator*

$$\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

ist surjektiv, wenn gilt:

(i) $\mathcal{A}$ ist hemistetig (es reicht auch radialstetig),

(ii) $\mathcal{A}$ ist monoton,

(iii) $\mathcal{A}$ ist koerzitiv.

Theorem 3.5. *Der Operator $\mathcal{A}$, der durch*

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega a(x,\tilde{u},\nabla u)\cdot\nabla v + T_K(u)v\ dx$$

definiert ist, erfüllt die Eigenschaften (i)-(iii) aus 3.4.

Beweis. Wir setzen zunächst $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ und $V' = W^{-1,p'}(\Omega)$.
Zu (i):
Sei $t_n \to t$ in $[0,1]$, dann gilt für $n \to \infty$, dass

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(u+t_nv), w\rangle_{V',V} &= \int_\Omega \Big(a(x,\tilde{u},\nabla(u+t_nv)) \cdot \nabla w + T_K(u+t_nv)w \Big) dx \\ &\to \int_\Omega \Big(a(x,\tilde{u},\nabla(u+tv)) \cdot \nabla w + T_K(u+tv)w \Big) dx \\ &= \langle \mathcal{A}(u+tv), w\rangle_{V',V}.\end{aligned}$$

Diese Konvergenz folgt aus Lebesgues Satz über dominierte Konvergenz mit der Abschätzung

$$\begin{aligned}&|a(x,\tilde{u},\nabla(u+t_nv)) \cdot \nabla w + T_K(u+t_nv)w| \\ \le &(C_K(x) + \beta_K|\nabla(u+t_nv)|^{p-1})|\nabla w| + K|w| \\ \le &(C_K(x) + \beta_K(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla w| + K|w| \\ \le &(C_K(x) + \beta_K 2^{p-1}(|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1})|\nabla w| + K|w|.\end{aligned}$$

Zu (ii):
Unter Verwendung der Monotonie von a gilt

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v\rangle_{V',V} \\ = &\int_\Omega \Big((a(x,T_K(\tilde{u}),\nabla u) - a(x,T_K(\tilde{u}),\nabla v)) \cdot \nabla(u-v) \\ &+ (T_K(u) - T_K(v))(u-v) \Big) dx \\ \ge &\ 0.\end{aligned}$$

Zu (iii):
Unter Verwendung der Koerzitivität von a folgt, dass

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{A}u, u\rangle_{V',V} \\ = &\int_\Omega \Big(a(x,T_K(\tilde{u}),\nabla u) \cdot \nabla u + T_K(u)u \Big) dx \\ \ge &\int_\Omega \Big(\alpha|\nabla u|^p + |T_K(u)|^2 \Big) dx \\ \ge &\ c\alpha \|u\|_V^p.\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Poincaré-Ungleichung. □

Aus der A-priori-Abschätzung (3.24) schließen wir, dass die Lösung des Ersatzproblems (3.25) zugleich auch eine Lösung von

$$\begin{cases} u - \operatorname{div} a(x,T_K(\tilde{u}),\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.26}$$

ist. Außerdem ist eine Lösung dieser Gleichung dank der folgenden Argumentation sogar eindeutig. Angenommen u_1 und u_2 sind Lösungen von (3.26), dann gilt durch Einsetzen von $(u_1 - u_2)$ als Testfunktion

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (u_1 - u_2)(u_1 - u_2)\ dx\\ &\quad + \int_\Omega (a(x, T_K(\tilde{u}), \nabla u_1) - a(x, T_K(\tilde{u}), \nabla u_2)) \cdot \nabla(u_1 - u_2)\ dx\\ &= 0.\end{aligned}$$

Durch die Monotonie von a folgt, dass

$$\int_\Omega (u_1 - u_2)(u_1 - u_2)\ dx \leq 0$$

und somit, dass

$$\int_\Omega |u_1 - u_2|^2\ dx = 0,$$

also fast überall $u_1 = u_2$. Wir können damit die folgende Abbildung

$$\begin{aligned}P : L^p(\Omega) &\to L^p(\Omega)\\ \tilde{u} &\mapsto u\end{aligned}$$

definieren. Dabei ist u die eindeutige schwache Lösung von (3.26). Auf diese Abbildung wollen wir den Satz von SCHAUDER anwenden.

Theorem 3.6. *Satz von* SCHAUDER
Sei X ein BANACH*-Raum und M eine nichtleere, konvexe, beschränkte und abgeschlossene Menge. Dann besitzt jede kompakte Abbildung $\Phi : M \to M$ einen Fixpunkt.*

Es ist also zu zeigen, dass die Abbildung P den obigen Bedingungen genügt. Zunächst zeigen wir, dass beschränkte Mengen auf relativ kompakte abgebildet werden. Es gilt

$$\|u\|_V^p \leq \frac{1}{\alpha c}\langle \mathcal{A}u, u\rangle_{V',V} = \frac{1}{\alpha c}\langle f, u\rangle_{V',V} \leq \frac{1}{\alpha c}\|f\|_{V'}\|u\|_V$$

und wir erhalten

$$\|P(\tilde{u})\|_V^{p-1} \leq \frac{1}{\alpha c}\|f\|_{V'}$$

für alle $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$. Somit ist also $P(L^p(\Omega))$ eine beschränkte Teilmenge von $V = W_0^{1,p}(\Omega)$. Nach dem Satz von Rellich ist aber $W_0^{1,p}(\Omega)$ kompakt eingebettet in $L^p(\Omega)$, folglich werden beschränkte Mengen auf relativ kompakte abgebildet. Als nächstes wollen wir die Stetigkeit zeigen. Sei also $(\tilde{u}_n)_n$ eine in $L^p(\Omega)$ konvergente Folge mit Grenzwert $\tilde{u}$. Um zu zeigen, dass $P(\tilde{u}_n) \to P(\tilde{u})$ in $L^p(\Omega)$, reicht es zu zeigen, dass jede Teilfolge eine weitere Teilfolge enthält, die gegen

$P(\tilde{u})$ konvergiert.
Dank der eben nachgewiesenen Kompaktheitseigenschaft von P folgt, dass jede Teilfolge von $P(\tilde{u}_n)$ eine konvergente Teilfolge $(P(\tilde{u}_{n_k}))_k$ enthält. Außerdem ist $(P(\tilde{u}_n))_n$ und damit auch jede Teilfolge beschränkt in $W_0^{1,p}(\Omega)$, also ist $(P(\tilde{u}_{n_k}))_k$ nach dem Satz von Eberlein-Šmulian o.B.d.A. ebenso eine schwach konvergente Teilfolge in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Die beiden Grenzwerte (bezeichnet mit v und v') sind nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe zum Beispiel Emmrich [12, Satz 8.1.3]) gleich, denn für alle $w \in L^{p'}(\Omega)$ gilt, dass

$$\int_\Omega P(\tilde{u}_{n_k})w\ dx \to \int_\Omega vw\ dx$$
$$\text{und} \int_\Omega P(\tilde{u}_{n_k})w\ dx \to \int_\Omega v'w\ dx.$$

Damit erhalten wir inbesondere, dass $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Wir können dank der Beschränktheit in $W_0^{1,p}(\Omega)$ unsere Teilfolge auch so wählen, dass für $k \to \infty$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}P(\tilde{u}_{n_k}) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial x_i}v.$$

Außerdem gilt auch die Konvergenz fast überall in Ω. Es folgt also für alle $u \in D(A)$, dass für $k \to \infty$

$$a(\cdot, T_K(P(\tilde{u}_{n_k})), \nabla u) \to a(\cdot, v, \nabla u) \text{ fast überall in } \Omega.$$

Wir schätzen weiter ab

$$|a(x, T_K(P(\tilde{u}_{n_k})), \nabla u)| \le C_K(x) + \beta_K |\nabla u|^{p-1}.$$

Somit existiert eine $L^{p'}(\Omega)$-Majorante. Nach dem Satz von Lebesgue gilt also

$$a(\cdot, T_K(P(\tilde{u}_{n_k})), \nabla u) \to a(\cdot, v, \nabla u) \text{ in } (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Wir gehen nun in der schwachen Formulierung der Gleichung zum Limes über und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(a(x, v, \nabla v)\cdot\varphi + v\varphi\Big)dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \Big(a(x, T_K(P(\tilde{u}_{n_k})), \nabla v)\cdot\varphi + v\varphi\Big)dx \\
&= \int_\Omega f\varphi\ dx.
\end{aligned}$$

Damit ist $v = P(u)$.
Um den Satz von Schauder anzuwenden, muss noch eine passende Menge gewählt werden. Wir definieren $M := \{v \in L^p(\Omega) \mid \|v\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha c}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}\}$, diese Menge liefert dann das Gewünschte. Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von Schauder gegeben, es existiert also ein Fixpunkt $u = P(u)$ und somit eine Lösung von (3.23). Damit haben wir gezeigt, dass

$$L^\infty(\Omega) \subset R(I + \lambda A)$$

und somit, dass A m-akkretiv ist und die Range-Bedingung erfüllt. Wir wollen nun noch zeigen, dass

$$W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset \overline{D(A)}. \tag{3.27}$$

Damit wäre gezeigt, dass $D(A)$ dicht in $L^1(\Omega)$ liegt. Somit hätte (2.7) für alle rechten Seiten $f \in L^1(\mathcal{Q})$ und Anfangswerte $u_0 \in L^1(\Omega)$ eine eindeutige milde Lösung. Wir zeigen zu diesem Zweck folgende hinreichende Bedingung für (3.27).

Lemma 3.4. *Sei $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und u_λ die Lösung von* (3.23). *Dann konvergiert u_λ in $L^1(\Omega)$ gegen f für $\lambda \downarrow 0$. Somit ist dann $f \in \overline{D(A)}$.*

Bemerkung 12. *Der nachfolgende Beweis ist im Prinzip eine A-priori-Betrachtung der Regularität der Lösungen von* (3.23). *Die hier verwendeten Techniken finden ihren Ursprung in den Arbeiten von* De Giorgi, Moser *und* Nash. *Für einen Überblick der zugrunde liegenden Theorie sei zum Beispiel auf* Zacher [26] *verwiesen.*

Beweis. Wir erinnern uns zunächst daran, dass $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ und setzen entsprechend $K \coloneqq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$. Außerdem ist auch $|\nabla u_\lambda|$ beschränkt in $L^p(\Omega)$. Dafür testen wir in der Gleichung mit u_λ und schätzen mithilfe der Koerzitivität ab.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_\lambda|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega \alpha |\nabla u_\lambda|^p \, dx \\
\leq &\int_\Omega f u_\lambda \, dx \\
\leq &\int_\Omega |f||u_\lambda| \, dx \\
\leq &\frac{1}{2}(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Wir erhalten also, dass

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p \, dx \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Weiterhin erhalten wir durch testen mit $u_\lambda - f$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_\lambda - f|^2 \, dx \\
=& -\lambda \int_\Omega a(x, u_\lambda, \nabla u_\lambda) \cdot \nabla(u_\lambda - f) \, dx \\
\leq& \lambda \int_\Omega a(x, u_\lambda, \nabla u_\lambda) \cdot \nabla f \, dx \\
\leq& \lambda \int_\Omega (C_K(x) + \beta_K |\nabla u_\lambda|^{p-1}) |\nabla f| \, dx \\
\leq& \lambda \int_\Omega C_K(x) |\nabla f| \, dx + \lambda^{1/p} \beta_K \left(\int_\Omega \lambda^p |\nabla u_\lambda|^p \right)^{p-1/p} \left(\int_\Omega |\nabla f|^p \, dx \right)^{1/p} \\
\leq& \lambda \int_\Omega C_K(x) |\nabla f| \, dx + \lambda^{1/p} \beta_K C_f.
\end{aligned}$$

Die Konstante C_f aus der letzten Zeile erhalten wir durch (3.28) und hängt nur von f ab. Der erste Integrand ist in $L^1(\Omega)$ und $|\nabla f|$ ist nach Voraussetzung in $L^p(\Omega)$, also konvergiert die letzte Zeile für $\lambda \downarrow 0$ gegen Null. Damit konvergiert u_λ sogar in $L^2(\Omega)$ gegen f. □

3.4.2 Eindeutigkeit der renormalisierten Lösung

Im weiteren zeigen wir die Eindeutigkeit einer renormalisierten Lösung von (2.7) für den Fall, dass a nicht von u abhängt. Für den allgemeineren Fall braucht man eine Zusatzbedingung, wie zum Beispiel (IIIC). Diese Bedingung sichert die Eindeutigkeit auch im zeitabhängigen Fall, siehe dafür Blanchard et al. [6].

Theorem 3.7. *Die renormalisierte Lösung von* (2.7) *ist eindeutig.*

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei renormalisierte Lösungen und S_n wie in (3.2). Mit der gleichen Argumentation wie in Kapitel 3.1 ergibt sich die Gleichung aus

(2.2) mit $S = T_k(S_n(u_1) - S_n(u_2))$

$$\int_0^T \langle (S_n(u_1) - S_n(u_2))_t, T_k(S_n(u_1) - S_n(u_2)) \rangle \; dt \tag{3.29}$$

$$+ \iint_Q (S_n'(u_1)a(x, \nabla u_1) - S_n'(u_2)a(x, \nabla u_2))$$

$$\cdot \nabla(T_k(S_n(u_1) - S_n(u_2))) \; dxdt \tag{3.30}$$

$$= \iint_Q f(S_n'(u_1) - S_n(u_2))T_k(S_n(u_1) - S_n(u_2)) \; dxdt \tag{3.31}$$

$$+ \iint_Q (S_n''(u_2)a(x, \nabla u_2) \cdot \nabla u_2 - S_n''(u_1)a(x, \nabla u_1) \cdot \nabla u_1)$$

$$T_k(S_n(u_1) - S_n(u_2)) \; dxdt. \tag{3.32}$$

Wir wollen nun diese vier Integrale für $n \to \infty$ betrachten. Mit den gleichen Argumenten wie in Kapitel 3.2 erhalten wir, dass die Integrale (3.31) und (3.32) gegen Null konvergieren und dass (3.29) nichtnegativ ist. Außerdem gilt

$$\liminf_{n \to \infty} \int_0^T \langle (S_n(u_1) - S_n(u_2))_t, T_k(S_n(u_1) - S_n(u_2)) \rangle \; dt$$

$$\geq \iint_{\{|u_1 - u_2| \leq k\}} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \; dxdt.$$

Wir erhalten also für $k \to \infty$, dass

$$\iint_Q (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2)) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \; dxdt \leq 0.$$

Durch die Monotonie erhalten wir $\nabla u_1 = \nabla u_2$, analog zu Kapitel 3.2 gilt dann $u_1 = u_2$. $\square$

4 Zusammenfassung und Ausblick

Wenn man die Ergebnisse dieser Arbeit betrachtet, so scheint die Äquivalenz von milden und renormalisierten Lösungen nur unter recht starken Bedingungen zu gelten. Dies hängt allerdings damit zusammen, dass eine milde Lösung des hier beschriebenen Operators per Konstruktion eindeutig ist. Renormalisierte Lösungen sind es allerdings nur unter recht restriktiven Zusatzbedingungen. Insofern ergibt es Sinn, nur den Fall zu betrachten, in der die renormalisierte Lösung eindeutig ist, da sonst davon auszugehen ist, dass nur eine bestimmte renormalisierte auch eine milde Lösung sein kann. Es gibt auch die Möglichkeit, milde Lösungen zu einem m-akkretiven Teiloperator zu definieren, ohne dass dabei der durch die Funktion a definierte Operator selbst akkretiv sein muss. Dies führt dann dazu, dass milde Lösungen nicht unbedingt eindeutig sind. Diese stimmen allerdings trotzdem mit (jeweils) einer renormalisierten Lösung überein. Ein solcher Teiloperator wird durch eine Regularisierung von a konstruiert. Für die genaue Vorgehensweise verweisen wir auf Bénilan und Wittbold [5].
Auch die modifizierten Wachstumsbedingungen, die man benötigt, um zu zeigen, dass eine Entropielösung auch eine renormalisierte ist, sind in einem gewissen Sinne minimal gewählt. Wie bereits erwähnt lassen sich Entropielösungen nur recht eingeschränkt a priori abschätzen. Betrachtet man, wann die Entropielösung (beziehungsweise die renormalisierte Lösung) eindeutig ist, wäre eine Lipschitz-stetige (oder zumindest Hölder-stetige) Abhängigkeit von u vorauszusetzen, um dies sicherzustellen. Will man also den allgemeinen, nur die Existenz einer Lösung garantierenden Fall betrachten, so sind die Voraussetzungen zumindest mit der hier gewählten Beweistechnik notwendig.
Wie wir in dieser Arbeit gesehen haben, ist die Äquivalenz der drei Begriffe auf jeden Fall gegeben, wenn wir a priori wüssten, dass die Lösungen in allen drei Fällen eindeutig sind. Diese Erkenntis spielt für eine große Klasse von Problemen eine wichtige Rolle. Denn häufig existiert zu einem Diffusionsprozess eine Vielzahl von schwachen Lösungen. Betrachten wir etwa noch einmal die skalare hyperbolische Erhaltungsgleichung

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x &= 0 \qquad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ \quad u(0,\cdot) &= u_0. \end{cases}$$

Gleichungen dieser Art haben im allgemeinen unendlich viele schwache Lösungen. Die drei hier behandelten Begriffe führen allerdings zu der *physikalisch relevanten*. Die Entropiebedingung berücksichtigt dabei die Gesetze der Thermodynamik; die renormalisierte Formulierung nutzt aus, dass sich die zugrundeliegenden Prozesse (etwa bei Gastransporten kommen unendliche Teilchendichten nicht vor) im wesentlichen auf endlichen Skalen abspielen und die milde Lösung wird über eine Diskretisierung in der Zeit und somit über Betrachtungen der stationären Teilprobleme gewonnen. Die in dieser Arbeit gezeigte Äquivalenz ist also auf eine gewisse Art auch Probe für den nötigen Zusammenhang der Lösungstheorien mit dem zugrundeliegenden physikalischen Prozess.
Ganz allgemein haben wir gezeigt, dass unter den Voraussetzungen (I)-(IV) an eine Diffusionsgleichung gilt, dass

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{E},$$

wobei $\mathcal{M}$ die (einelementige) Menge der milden, $\mathcal{R}$ die der renormalisierten und $\mathcal{E}$ entsprechend die der Entropielösungen seien. Die umgekehrten Inklusionen sind wie beschrieben nur für Spezialfälle nachgewiesen. Die Eindeutigkeitsvoraussetzung an die renormalisierte Lösung ist allerdings wie gesehen notwendig. Die Wachstumsbedingungen an Entropielösungen erscheinen allerdings nicht zwingend notwendig zu sein. Allerdings existiert für diese Art von Problemen auch noch kein Beweis, der nicht zumindest die Eindeutigkeit der Entropielösung eines modifizierten Problems voraussetzt.

Die hier behandelten Lösungsbegriffe sind außerdem in verschiedene Richtungen erweiterbar. Beispielsweise ist es möglich, für die rechte Seite glatte, beschränkte Maße (sogenannte „soft measures“) statt Funktionen in L^1 zu betrachten. Die Begriffe der Entropie- und der renormalisierten Lösungen sind auch dann äquivalent. Die Techniken der Beweise ändern sich im wesentlichen nicht. Das liegt daran, dass sich ein beschränktes Maß μ auf $\mathcal{Q}$ in folgender Art zerlegen lässt:

$$\int\limits_{\mathcal{Q}} \varphi d\mu = \iint\limits_{\mathcal{Q}} f\varphi\ dxdt + \iint\limits_{\mathcal{Q}} G_1 \cdot \nabla\varphi\ dxdt - \iint\limits_{\mathcal{Q}} g_2\varphi_t\ dxdt.$$

Diese Gleichheit gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$, dabei sind $f \in L^1(\mathcal{Q})$, $G_1 \in (L^{p'}(\mathcal{Q}))^N$ und $g_2 \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega))$, siehe dazu DRONIOU und PRIGNET [11]. Man kann mit einem solchen Maß also ähnlich wie mit einer Funktion aus L^1 umgehen. Es ist außerdem möglich, die Koerzitivität durch

$$\begin{aligned}&a(t,x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p - \Lambda(t,x),\\ &\text{für fast alle } (t,x) \in \mathcal{Q},\ \text{für alle } s \in \mathbb{R} \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

abzuschwächen. Dabei ist Λ eine Funktion aus $L^1(\mathcal{Q})$. Bei den meisten Rechnungen in dieser Arbeit würde es keinen großen Unterschied machen, welchen der beiden Koerzitivitätsbegriffe man verwendet. Die abgeschwächte Variante erfordert zumeist nur einige technische Schritte mehr.
Eine interessante und noch wenig betrachtete Frage ist auch, inwiefern milde Lösungen, statt nur über das implizite EULER-Verfahren, auch über andere Ein- oder Mehrschrittverfahren definiert werden können. Es stellt sich die Frage, ob Grenzwerte anderer Verfahren mit der milden Lösung übereinstimmen oder in welchem Sinne diese die Differentialgleichung sonst erfüllen und welche Stabilitätseigenschaften die numerischen Verfahren besitzen müssen.
Wie bereits in der Einführung geschildert gibt es auch andere Gleichungstypen, für die die hier betrachteten Lösungsbegriffe definiert werden können. Für manche ist es allerdings nötig diese zu erweitern, um sinnvolle Ergebnisse erwarten zu können. Betrachtet man etwa skalare Erhaltungsgleichungen der Form

$$u_t + \operatorname{div}\ \Phi(u) = f,$$

mit lokal LIPSCHITZ-stetigem $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, so existiert für Anfangswerte aus $L^1(\Omega)$ und rechte Seiten aus $L^1(\mathcal{Q})$ eine eindeutige milde Lösung u. Für solche unbeschränkten Daten ist im allgemeinen auch u als Funktion auf $\mathcal{Q}$ unbeschränkt. Folglich ist die Entropiebedingung

$$|u-k|_t + \operatorname{div}\left(\operatorname{sign}_0(u-k)(\Phi(u)-\Phi(k))\right) \leq \operatorname{sign}_0(u-k)f$$

in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$ nicht mehr sinnvoll, da $\Phi(u)$ nicht mehr lokal integrierbar sein könnte. Ein möglicher Ausweg besteht darin, die Bedingungen der renormalisierten

und der Entropielösung wie in Bénilan et al. [3] zu kombinieren. Für die so definierte *renormalisierte Entropielösung* kann wiederum die Existenz und Eindeutigkeit gezeigt werden. Auch in diesem Fall stimmt diese mit der milden Lösung überein.
Der Begriff der renormalisierten Lösung lässt sich auch auf stochastische Differentialgleichungen übertragen. Betrachtet man etwa lineare stochastische Transportgleichungen der Form

$$\begin{cases} du + (b \cdot \nabla) u dt + \sum_{k=1}^{N} \partial_k u \circ dW^k & = 0, \\ u|_{t=0} & = u_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

wobei W^k unabhängige Brownsche Bewegungen sind, so nennt man einen Prozess u eine renormalisierte Lösung, wenn $\beta(u)$ für alle stetig differenzierbaren β eine schwache L^∞-Lösung von (4.1) ist. Für die genauen Definitionen siehe Attanasio und Flandoli [1]. Auch dieser Lösungsbegriff leitet sich von der ursprünglichen Formulierung von DiPerna und Lions [10] ab.

Notation

Ω	eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, wobei N eine positive ganze Zahl ist,
$\mathcal{Q}$	der Raum-Zeit-Zylinder $\mathcal{Q} := (0,T) \times \Omega$,
supp u	der Träger einer Funktion u, das ist der Abschluss der Punktmenge, auf der u nicht Null ist,
$C_c^k(\Omega)$	der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompakt in Ω enthaltenem Träger,
$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$	der Raum der Testfunktionen, die unendlich oft differenzierbaren Funktionen, deren Träger kompakt in Ω enthalten sind,
in $\mathcal{D}'(\Omega)$	eine Gleichheit im distributionellen Sinne, das heißt multipliziert mit einer beliebigen Testfunktion und integriert über Ω,
$L^p(\Omega)$, $L^p(\mathcal{Q})$	der LEBESGUE-Raum der p-integrierbaren Funktionen auf Ω, beziehungsweise $\mathcal{Q}$, das heißt die Funktionen, deren Norm $\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int\limits_\Omega |f|^p dx)^{1/p}$ beziehungsweise $\|f\|_{L^p(\mathcal{Q})} = (\iint\limits_\mathcal{Q} |f|^p\ dxdt)^{1/p}$ endlich ist,
$L^p_{loc}(\Omega)$	der Raum der lokal, das heißt auf jeder in Ω kompakt enthaltenen Menge K, p-integrierbaren Funktionen,
$W^{m,p}(\Omega)$	der SOBOLEV-Raum der Funktionen aus $L^p(\Omega)$, deren distributionelle Ableitungen bis zur m-ten Ordnung in $L^p(\Omega)$ liegen,
$W_0^{m,p}(\Omega)$	der Abschluss der Testfunktionen in $W^{m,p}(\Omega)$,
$W^{-1,p'}(\Omega)$	der Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $p \in (1,\infty)$,
$C([0,T];X)$	der Raum der auf $[0,T]$ bezüglich der Norm des BANACH-Raums X stetigen Funktionen mit Werten in X,
$L^p(0,T;X)$	der BOCHNER-LEBESGUE-Raum der p-integrierbaren , das heißt bezüglich der Norm $\left(\int\limits_0^T \|f\|_X^p dt\right)^{1/p}$ endlichen Funktionen mit Werten in einem BANACH-Raum X,
sign	eine Äquivalenzklasse von Funktionen mit den Werten 1 bei positivem, -1 bei negativem Argument und einem beliebigen Wert für Null,
sign_0	der Vertreter aus sign, der bei Null den Wert Null annimmt,
$\subset$	eine Teilmenge oder eine stetige Einbettung,
χ_M	die Indikator- oder charakteristische Funktion einer Menge M, $\chi_M(x) = 1$, wenn $x \in M$, und $\chi_M(x) = 0$, wenn $x \notin M$,

f^+	der positive Teil einer Funktion f, $f^+ \coloneqq f\chi_{\{f>0\}}$,
div	die Divergenz eines Vektorfeldes, $\operatorname{div} v = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i$,
∇	der Gradient einer Funktion, $\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u, ..., \frac{\partial}{\partial x_N} u\right)^T$,
Δ	der LAPLACE-Operator, $\Delta u \coloneqq \operatorname{div} \nabla u$,
X'	der Dualraum eines BANACH-Raums X,
$\rightharpoonup$	schwache Konvergenz in einem BANACH-Raum,
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	schwach*-Konvergenz im Dualraum eines BANACH-Raums,
$\lvert M \rvert$	das N- oder $(N+1)$-dimensionale LEBESGUE-Maß einer Menge M.

Literatur

[1] Attanasio, S.; Flandoli, F.: Renormalized Solutions for Stochastic Transport Equations and the Regularization by Bilinear Multiplicative Noise. *Communications in Partial Differential Equations* 36 (2011), Nr. 8, S. 1455–1474.

[2] Bénilan, P.; Boccardo, L.; Gallouët, T.; Gariepy, R.; Pierre, M.; Vázquez, J. L.: An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* 22 (1995), S. 241–273.

[3] Bénilan, P.; Carillo, J.; Wittbold, P.: Renormalized Entropy Solutions of Scalar Conservation Laws. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* 29 (2000), Nr. 4, S. 313–327.

[4] Bénilan, P.; Crandall, M. G.; Pazy, A.: *Nonlinear Evolution Equations in Banach Spaces.* – unveröffentlicht.

[5] Bénilan, P.; Wittbold, P.: On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems. *Advances in Differential Equations* 1 (1996), S. 1053–1073.

[6] Blanchard, D.; Murat, F.; Redwane, H.: Existence and Uniqueness of a Renormnalized Solution for a Fairly General Class of Nonlinear Parabolic Problems. *Journal of Differential Equations* 177 (2001), S. 331–374.

[7] Boccardo, L.; Giachetti, D.; Diaz, J.-I.; Murat, F.: Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivations of nonlinear terms. *Journal of Differential Equations* 106 (1993), S. 215–237.

[8] Chechkin, G. A.; Goritsky, A. Y.: S. N. Kruzhkov's lectures on first-order quasilinear PDEs. In: Emmrich, E.; Wittbold, P. (Hrsg.): *Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations.* de Gruyter, Berlin 2009.

[9] Deimling, K.: *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin - New York 1980.

[10] DiPerna, R. J.; Lions, P. L.: On the Cauchy problem of Boltzmann equations: Global existence and weak stability. *Ann. of Math.* 130 (1989), Nr. 2, S. 321–366.

[11] Droniou, J.; Prignet, A.: Equivalence between entropy and renormalized solutions for parabolic equations with smooth measure data. *Nonlinear Differential Equations and Applications* 14 (2007), S. 181–205.

[12] Emmrich, E.: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen.* Vieweg, Wiesbaden 2004.

[13] Engel, K.-J.; Nagel, R.: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 2000.

[14] Escobedo, M.; Vázquez, J. L.; Zuazua, E.: Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity. *Transactions of the American Mathematical Society* 343 (1994), S. 829–842.

[15] Evans, L. C.: Nonlinear Evolution Equations in an arbitrary Banach Space. *Israel Journal of Mathematics* 26 (1977), S. 1–42.

[16] Gajewski, H.; Gröger, K.; Zacharias, K.: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie Verlag, Berlin 1974.

[17] Kobayasi, K.; Kobayashi, Y.; Oharu, S.: Nonlinear [im Original: Nolinear] Evolution Operators in Banach Spaces. *Osaka J. Math.* 21 (1984), S. 281–310.

[18] Kružkov, S. N.: First order quasilinear equations with several independent variables (Russisch). *Matematicheski Sbornik* 81 (1970), Nr. 123, S. 228–255. – Englische Übersetzung in Math. USSR Sb., 10 (1970), S. 217-243.

[19] Landes, R.: On the existence of weak solutions for quasilinear parabolic boundary value problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A* 89 (1981), S. 217–237.

[20] Lions, P. L.: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1: Incompressible models.* Oxford Univ. Press, Oxford 1996. (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications)

[21] Lions, P. L.; Murat, F.: *Sur les solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéares.* – unveröffentlicht.

[22] Lunardi, A.: *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems.* Birkhäuser Verlag, Basel 1995.

[23] Porretta, A.: Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV)* 177 (1999), S. 143–172.

[24] Roubíček, T.: *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel 2005.

[25] Vázquez, J. L.: Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space. *Journal of Evolution Equations* 2 (2002), S. 1–52.

[26] Zacher, R.: *De Giorgi-Nash-Moser estimates for evolutionary partial integro-differential equations*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Diss., 2010.

[27] Zhang, C.; Zhou, S.: Renormalized and entropy solutions for nonlinear parabolic equations with variable exponents and L^1 data. *Journal of Differential Equations* 248 (2010), S. 1376–1400.