Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Bachelorarbeit
Im Studiengang Mathematik

Kriterien für starke und schwache Konvergenz in L^1

vorgelegt von
Thomas Jankuhn

betreut durch
Dr. Hans-Christian Kreusler

11. November 2013

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 11.11.2013

. . . .

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Jahr 1902 veröffentlichte Henri Lebesgue seine Dissertation „Thèse: Intégral, longueur, aire“ und legte damit den Grundstein für die heutige Integrationstheorie. In seiner Arbeit führte er, mithilfe der Vorarbeiten von Émile Borel zur Maßtheorie und René Baire über reelle Funktionen, einen neuen Integrationsbegriff ein. Zu Ehren von Henri Lebesgue benannte Frigyes Riesz die Funktionenräume der Äquivalenzklassen fast überall gleicher messbarer Funktionen $f\colon I \to \mathbb{C}$, so dass $|f|^p$, $p \geq 1$, integrierbar ist, mit Lebesgue-Raum. Er untersuchte erstmals die starke Konvergenz und die schwache Konvergenz in $L^p(I)$.

In dieser Arbeit werden wir Kriterien für starke und schwache Konvergenz in $L^1(a,b)$ vorstellen. Wir beschränken uns dabei auf reellwertige Funktionen mit dem Definitionsbereich $[a,b]$. Wie in den einzelnen für die Aussagen zitierten Quellen nachzulesen ist, gelten die vorgestellten Resultate ebenfalls für Folgen aus $L^1(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte Teilmenge ist.

Zunächst stellen wir in Kapitel 2 einige mathematische Grundlagen zusammen, die für diese Arbeit benötigt werden. Anschließend werden wir uns in Kapitel 3 der starken Konvergenz in $L^1(a,b)$ zuwenden. Grundlage dieser Arbeit ist der von Lebesgue bewiesene Satz über die majorisierte Konvergenz. Er besagt, dass bei punktweise konvergenten Folgen aus $L^1(a,b)$ die Existenz einer punktweisen Majorante hinreichend ist für die starke Konvergenz in $L^1(a,b)$. In Abschnitt 3.1 werden die Sätze von Vitali vorgestellt. Diese beinhalten ein nicht nur hinreichendes, sondern auch notwendiges Kriterium für die starke Konvergenz von punktweise konvergenten Folgen aus $L^1(a,b)$. In Abschnitt 3.2 werden wir weitere Kriterien für starke Konvergenz in $L^1(a,b)$ darlegen. Neben Folgerungen aus dem Satz von Vitali werden wir ein weiteres hinreichendes Kriterium für die starke Konvergenz in $L^1(a,b)$ vorstellen. Abschnitt 3.3 beinhaltet eine Charakterisierung von Funktionenfolgen, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzen, deren Vorstellung nur der Vollständigkeit dient. Zum Abschluss des dritten Kapitels werden wir uns mit der Existenz konvergenter Teilfolgen in $L^1(a,b)$ beschäftigen. Da insbesondere die Kompaktheit einer Folge hinreichend für die Existenz einer konvergenten Teilfolge ist, werden wir an dieser Stelle die Kompaktheitsbedingungen von Kolmogoroff vorstellen.

In Kapitel 4 werden wir uns der schwachen Konvergenz in $L^1(a,b)$ widmen. Zuerst werden wir uns mit der Frage beschäftigen, unter welchen Voraussetzungen eine schwach konvergente Folge in $L^1(a,b)$ auch stark konvergiert. Bei der Frage nach der Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge können wir nicht den bekannten Satz von Eberlein-Šmulian verwenden, da der Raum $L^1(a,b)$ nicht reflexiv ist. Jedoch gibt uns der in Abschnitt 4.2 vorgestellte Satz von Dunford-Pettis ein Kriterium für die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge in $L^1(a,b)$.

2 Grundlagen

2.1 Die L^p-Räume

In diesem Abschnitt werden wir den Raum der zur p-ten Potenz integrierbaren Funktionen und den Raum der wesentlich beschränkten Funktionen einführen. Anschließend nennen wir einige Eigenschaften dieser Räume. Es basiert auf [3]. Einige Definitionen sind [13] entnommen.

Definition 2.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$. Dann bezeichnen wir mit $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, oder kurz $L^p(\Omega)$, den Raum aller Äquivalenzklassen fast überall gleicher messbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Falls das Maß das Lebesguemaß, das wir im Folgenden mit λ bezeichnen, ist, dann schreiben wir dx anstatt $d\lambda$.

Bemerkung. Zusammen mit $\|\cdot\|_p$ bildet der Raum $L^p(\Omega)$ einen normierten Raum. Einen Beweis dazu finden wir in [3, Theorem 4.7].

Definition 2.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann bezeichnen wir mit $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, oder kurz $L^\infty(\Omega)$, den Raum aller Äquivalenzklassen fast überall gleicher messbarer und fast überall beschränkter Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, d.h. solche Funktionen, für die es ein $C > 0$ gibt, so dass $|f(x)| \leq C$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt. Die dazugehörige Norm lautet*

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Bemerkung. Einen Beweis, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist, finden wir in [3, S.91].

Definition 2.3 *Sei $[a, b]$ ein Intervall. Wir bezeichnen mit $C_c^\infty([a, b])$ den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Der Träger ist definiert als $\overline{\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq 0\}}$.*

Einige wichtige Eigenschaften dieser Räume werden in dem folgenden Satz zusammengetragen.

Satz 2.4 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $L^p(\Omega)$ ein Banachraum.

(ii) Falls Ω separabel ist und $1 \leq p < \infty$ gilt, dann ist der Raum $L^p(\Omega)$ separabel.

(iii) Für $1 < p < \infty$ ist der Raum $L^p(\Omega)$ reflexiv.

(iv) Falls Ω nicht endlich ist, dann sind die Räume $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ niemals reflexiv.

(v) Der Raum $C_c^\infty([a,b])$ liegt dicht in $L^p(a,b)$.

Beweise für die Aussagen $(i) - (iv)$ findet man in [3, S.93 ff.], für die Aussage (v) in [6, Satz 4.23].

2.2 Die Konvergenzarten in $L^1(a,b)$

Wir rufen uns die grundlegenden Konvergenzarten, die für diese Arbeit benötigt werden, in Erinnerung. Eine messbare Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

- **dem Maße nach** gegen eine messbare Funktion f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in [a,b] \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

  für alle $\varepsilon > 0$ gilt,

- **fast überall punktweise** auf $[a,b]$ gegen eine messbare Funktion f, falls

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

  für fast alle $x \in [a,b]$ gilt,

- **in $L^1(a,b)$** gegen eine Funktion f, falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$, $f \in L^1(a,b)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$

  gilt.

Bemerkung. Um die Konvergenz in $L^1(a,b)$ deutlich von der schwachen Konvergenz, die in Abschnitt 2.4 eingeführt wird, abzuheben, nennen wir sie im Folgenden auch starke Konvergenz in $L^1(a,b)$.

2.3 Die grundlegenden Konvergenzsätze

Als erstes betrachten wir nichtnegative Funktionen. In diesem Fall gibt uns der Satz von Beppo Levi, der auch Satz über die monotone Konvergenz genannt wird, eine Aussage über die Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration.

Satz 2.5 (Beppo Levi) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Folge von nichtnegativen Funktionen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fast überall in $[a,b]$ monoton wachsend.

(ii) Es gilt
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\ dx < \infty.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise in $[a,b]$ gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Einen Beweis findet man beispielsweise in [2, S. 276].

Für beliebige Folgen von nichtnegativen Funktionen bietet uns das Lemma von Fatou eine wichtige Aussage.

Satz 2.6 (Lemma von Fatou) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen mit*
$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in [a,b].$$
Dann gilt
$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx.$$

Für einen Beweis sei auf [9, S.155] verwiesen.

Jetzt betrachten wir Funktionen mit beliebigen Vorzeichen. Das bringt uns zu dem wichtigsten Konvergenzsatz aus diesem Abschnitt, dem Satz über die majorisierte Konvergenz.

Satz 2.7 (Satz von Lebesgue) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge messbarer Funktionen, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Zusätzlich gebe es eine integrierbare Funktion g mit*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und für fast alle } x \in [a,b].$$

Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Einen Beweis findet man in [2, S. 274].

Bemerkung. Der Satz von Lebesgue liefert uns nicht nur die Vertauschung von Grenzübergang und Integration, sondern auch die Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$. Dazu wendet man den Satz von Lebesgue auf $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Der folgende Satz wird auch „umgekehrter Satz von Lebesgue“ genannt. Jedoch ist dies keine echte Umkehrung. Denn für eine in $L^1(a,b)$ konvergente Funktionenfolge erhalten wir die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue nur für eine Teilfolge.

Satz 2.8 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge und $f \in L^1(a,b)$ mit der Eigenschaft*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $g \in L^1(a,b)$, so dass folgendes gilt:

(i) $(f_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen f.

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$

Für den Beweis verweisen wir auf [3, S. 94].

2.4 Die schwache Konvergenz

2.4.1 Die schwache Konvergenz in Banachräumen

Einige Folgen konvergieren nicht stark, sondern nur in einem schwächeren Sinne. Um diese schwache Konvergenz definieren zu können, benötigen wir zunächst die Definition des Raumes der stetigen linearen Funktionale.

Definition 2.9 *Sei $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann heißt*

$$U^* := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist linear und stetig}\}$$

Dualraum von U. Die Norm auf U^* ist definiert durch

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle|,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die duale Paarung auf $U^* \times U$ bezeichnet.

Mithilfe der stetigen linearen Funktionale definieren wir nun die schwache Konvergenz. Denn schwache Konvergenz ist Konvergenz bezüglich aller stetigen linearen Funktionale.

Definition 2.10 *Sei $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus U konvergiert schwach gegen $u \in U$, falls*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, u_n \rangle = \langle f, u \rangle$$

für alle $f \in U^*$ gilt.

Bevor wir im nächsten Abschnitt zu der für uns interessanten schwachen Konvergenz in $L^1(a,b)$ kommen, werden wir einige Eigenschaften von schwach konvergenten Folgen in beliebigen Banachräumen angeben.

Satz 2.11 *Sei $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U. Dann gilt:*

(i) Konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen u in der Norm, dann konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen u schwach.

(ii) Konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen u schwach, dann ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt $\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$.

Der Beweis lässt sich in [3, S. 58] nachlesen.

2.4.2 Die schwache Konvergenz in $L^1(a,b)$

Zunächst interessiert es uns, wie die stetigen linearen Funktionale in $L^1(a,b)$ aussehen. Dazu betrachten wir den folgenden Satz.

Satz 2.12 *Sei $\Phi \in (L^1(a,b))^*$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $g \in L^\infty(a,b)$ mit*

$$\langle \Phi, f \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

für alle $f \in L^1(a,b)$. Zusätzlich gilt

$$\|g\|_\infty = \|\Phi\|_{(L^1(a,b))^*}.$$

Auf den Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. Man findet ihn in [3, S. 99].

Wir folgern aus dem Satz, dass jedes stetige lineare Funktional aus $L^1(a,b)$ eindeutig als Integral dargestellt werden kann. Des Weiteren kann man zeigen, dass die Abbildung

$$T\colon (L^1(a,b))^* \to L^\infty(a,b), \qquad \Phi \mapsto g$$

surjektiv und damit ein isometrischer Isomorphismus ist [7, Satz 3.2]. Somit können wir den Dualraum von $L^1(a,b)$ mit $L^\infty(a,b)$ identifizieren. Daraus lässt sich die schwache Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ gegen ein $f \in L^1(a,b)$ ableiten.

Satz 2.13 *Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ konvergiert schwach gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)\ dx = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

für alle $g \in L^\infty(a,b)$ gilt.

An dieser Stelle belassen wir es mit der Einführung in die schwache Konvergenz. Sollte der Leser eine ausführlichere Einführung in dieses Thema wünschen, so sei auf [3, Kapitel 3] verwiesen.

3 Starke Konvergenz in $L^1(a,b)$

3.1 Die Sätze von Vitali

In diesem Abschnitt werden wir die Sätze von Vitali vorstellen. Die finale Fassung des Satzes liefert uns eine Charakterisierung der in $L^1(a,b)$ konvergenten Funktionfolgen unter der Voraussetzung der punktweisen Konvergenz. Die etwas längere Herangehensweise des Beweises ist [9] entnommen. Sie liefert uns jedoch Zwischenresultate, die für sich interessant und für spätere Beweise nützlich sind. Alternative Beweise findet man zum Bespiel in [7, Satz 5.6]. Zuerst zeigen wir einige Eigenschaften von integrierbaren Funktionen.

Satz 3.1 *Sei $f \in L^1(a,b)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$*

$$\left| \int_A f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

gilt. Diese Eigenschaft des Integrals bezeichnet man als absolute Stetigkeit.

Bemerkung. Betrachtet man die Funktion der oberen Integralgrenze $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ mit $x \in [a,b]$, so ist die absolute Stetigkeit von der Funktion Φ äquivalent zu der absoluten Stetigkeit des Integrals. Eine Funktion $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede beliebige Menge von paarweisen disjunkten Intervallen $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, $k = 1, \ldots, n$, mit der Gesamtlänge

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

die folgende Ungleichung gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon.$$

Beweis von Satz 3.1. Der Beweis richtet sich nach [9, S. 165]. Wir betrachten für $N \in \mathbb{N}$ die Abschneidefunktion

$$[\,\cdot\,]_N \colon [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad [x]_N = \begin{cases} x & \text{für } x \le N \\ N & \text{für } x > N. \end{cases}$$

Offensichtlich konvergiert $[|f(x)|]_N$ gegen $f(x)$ fast überall in $[a,b]$ für N gegen unendlich. Mit f ist auch $|f|$ integrierbar. Da $[|f(x)|]_N \le |f(x)|$ fast überall in $[a,b]$ gilt, besitzt $[|f(\cdot)|]_N$ eine integrierbare Majorante und damit gilt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b [|f(x)|]_N \; dx = \int_a^b |f(x)| \; dx.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann finden wir ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\int_a^b |f(x)| - [|f(x)|]_{N_0} \; dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Da $[|f(x)|]_N \leq |f(x)|$ für alle $N \in \mathbb{N}$ ist, gilt somit auch $[|f(x)|]_{N_0} \leq |f(x)|$ und damit ist $|f(x)| - [|f(x)|]_{N_0}$ fast überall in $[a,b]$ nichtnegativ. Sei nun $A \subset [a,b]$ eine beliebige messbare Teilmenge. Dann gilt mit der obigen Ungleichung

$$\int_A |f(x)| - [|f(x)|]_{N_0} \; dx \leq \int_a^b |f(x)| - [|f(x)|]_{N_0} \; dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weil aber $[|f(x)|]_{N_0} \leq N_0$ für fast alle $x \in A$ ist, folgt damit

$$\int_A |f(x)| \; dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_A [|f(x)|]_N \; dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \lambda(A).$$

Wir setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{2N_0}$. Ist nun $\lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2N_0}$, so gilt

$$\int_A |f(x)| \; dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0\lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \frac{\varepsilon}{2N_0} = \varepsilon.$$

Demzufolge gilt dann auch

$$\left|\int_A f(x) \; dx \right| \leq \int_A |f(x)| \; dx < \varepsilon.$$

□

Betrachten wir eine Folge von integrierbaren Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Integral von f_n absolut stetig. Die Zahl δ in der Definition der absoluten Stetigkeit hängt aber hier nicht nur von ε ab, sondern auch von n. Im Folgenden interessieren uns hauptsächlich Folgen integrierbarer Funktionen, bei denen δ nicht von n abhängt. Dies führt uns zur folgenden Definition:

Definition 3.2 *Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ besitzt gleichgradig absolut stetige Integrale, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt*

$$\left|\int_A f_n(x) \; dx\right| < \varepsilon.$$

Zur Veranschaulichung dieses Begriffs betrachen wir zwei Beispiele. Die Idee zur Konstruktion dieser Beispiele ist [1] entnommen.

Beispiel 3.3 Zuerst betrachten wir eine Funktionenfolge, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt. Im zweiten Beispiel werden wir diese Funktionenfolge nur leicht abändern, so dass sie nicht mehr gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt.

(i) Wir definieren

$$f_n \colon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } -\frac{1}{2n^2} \leq x \leq \frac{1}{2n^2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \frac{\varepsilon^2}{4}$. Anschließend betrachten wir eine beliebige messbare Teilmenge $B \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ mit $\lambda(B) < \delta$. Diese Menge zerteilen wir in den Teil, der in der $\frac{\delta}{2}$-Umgebung der Null liegt, und den Teil, der außerhalb dieser Umgebung liegt. Dann gilt

$$\int_B f_n(x)\ dx = \int_{B\setminus\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]} f_n(x)\ dx + \int_{B\cap\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]} f_n(x)\ dx. \tag{3.1}$$

Zunächst betrachten wir den linken Summanden. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $f_n(x) = 0$ fast überall in $B \setminus \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$ und für alle $n \geq n_0$ gilt. Dazu setzen wir $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right\rceil$. Damit erhalten wir für alle $n \geq n_0$

$$\int_{B\setminus\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]} f_n(x)\ dx = 0.$$

Es gibt also nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$, für die dies nicht der Fall ist. Jede dieser Funktionen $f_1, \ldots, f_{n_0-1}$ besitzt jedoch absolut stetige Integrale. Also gibt es $\delta_1, \ldots, \delta_{n_0-1} > 0$, so dass für $1 \leq k \leq n_0 - 1$

$$\int_{B\setminus\left[-\frac{\delta_k}{2},\frac{\delta_k}{2}\right]} f_k(x)\ dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist.

Wir betrachten nun den rechten Summanden der Gleichung (3.1). Zunächst untersuchen wir den Fall $n \leq \frac{2}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$\int_{B\cap[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]} f_n(x)\ dx \leq \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f_n(x)\ dx < \delta \cdot n = \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot n \leq \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{2}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für den Fall, dass $n > \frac{2}{\varepsilon}$ ist, erhalten wir

$$\int_{B\cap[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]} f_n(x)\ dx \leq \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f_n(x)\ dx \leq n \cdot \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen nun $\hat{\delta} = \min\{\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{n_0-1}\}$. Dann gilt für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \hat{\delta}$ nach Konstruktion

$$\int_A f_n(x)\ dx < \varepsilon.$$

Somit besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.

(ii) Nun betrachten wir die zweite Funktionenfolge. Hier definieren wir

$$g_n\colon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann besitzt $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine gleichgradig absolut stetigen Integrale. Um das zu zeigen, müssen wir ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass für jedes $\delta > 0$ eine messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\int_A g_n(x)\ dx\right| \geq \varepsilon.$$

Sei also $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $0 < \delta \leq 1$ beliebig. Wir wählen $A = [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$ und $n = \lceil \frac{1}{\delta} \rceil$. Dann gilt

$$\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} g_n(x)\ dx \geq n \cdot \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) = 1 > \varepsilon.$$

Somit besitzt $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine gleichgradig absolut stetigen Integrale.

Diese beiden Beispiele veranschaulichen sehr gut den Unterschied zwischen der Existenz und der Nichtexistenz gleichgradig absolut stetiger Integrale. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt gleichgradig absolut stetige Integrale, weil sich die Träger der einzelnen Funktionen f_n quadratisch verkleinern, während der Wert der Funktionen nur linear ansteigt. Betrachten wir jedoch das Integral von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, stellen wir fest, dass es den Wert $\frac{1}{n}$ hat. Somit ist für jede beliebige Teilmenge von $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ das Integral von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wie wir später in Satz 3.9 feststellen werden, ist dies ein hinreichendes, jedoch nicht notwendiges Kriterium für die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale.

Im Gegensatz zu f_n verkleinert sich der Träger der einzelnen Funktionen g_n nur linear. Da aber der Funktionswert von g_n ebenfalls linear ansteigt, führt das dazu, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Integral von g_n gleich eins ist. Da wir aber, wie in dem Beweis gezeigt, in jeder Umgebung der Null ein $n \in \mathbb{N}$ finden können, so dass das Integral von g_n größer gleich eins ist, bleibt das Integral von g_n von der Null weg beschränkt.

Bevor wir zum ersten Satz von Vitali kommen, benötigen wir das folgende Lemma, welches, wie auch der erste Satz von Vitali, aus [9, S. 169] entnommen wurde.

Lemma 3.4 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt. Dann besitzt auch $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da nach Voraussetzung $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$

$$\left| \int_A f_n(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Sei A eine solche Teilmenge mit $\lambda(A) < \delta$. Setze

$$A_+ := \{x \in A \mid f_n(x) \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad A_- := \{x \in A \mid f_n(x) < 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann sind auch $\lambda(A_+) < \delta$ sowie $\lambda(A_-) < \delta$ und damit gilt für die Integrale

$$\int_{A_+} |f_n(x)|\ dx = \left| \int_{A_+} f_n(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\int_{A_-} |f_n(x)|\ dx = \left| \int_{A_-} f_n(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen ergibt das

$$\int_A |f_n(x)|\ dx = \int_{A_+} |f_n(x)|\ dx + \int_{A_-} |f_n(x)|\ dx < \varepsilon.$$

Somit besitzt auch $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.

$\square$

Mit diesem Lemma können wir jetzt den ersten Satz von Vitali beweisen.

Satz 3.5 (Vitali) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die fast überall punktweise gegen eine messbare Funktion f konvergiert. Falls die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt, so ist $f \in L^1(a,b)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Beweis. Als erstes wollen wir zeigen, dass $f \in L^1(a,b)$ ist. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Lemma 3.4 besitzt mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale. Deswegen gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$

$$\int_A |f_n(x)|\ dx < \varepsilon$$

gilt. Mit dem Lemma von Fatou bekommen wir dann die Ungleichung

$$\int_A |f(x)|\ dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A |f_n(x)|\ dx < \varepsilon.$$

Damit ist die Grenzfunktion f auf jeder messbaren Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ integrierbar. Da aber das Intervall $[a,b]$ kompakt und somit auch totalbeschränkt ist, kann es in endlich viele Intervalle vom Maß kleiner δ zerlegt werden. Seien I_k, $k = 1,\ldots,m$, diese Intervalle, dann gilt für die Norm von f folgendes

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\ dx \leq \sum_{k=1}^{m} \int_{I_k} |f(x)|\ dx < m\varepsilon.$$

Folglich ist $f \in L^1(a,b)$. Nun muss noch die zweite Aussage des Satzes bewiesen werden. Dazu definieren wir für ein beliebiges $\eta > 0$ die folgenden zwei Mengen:

$$\begin{aligned} X_n(\eta) &:= \{x \in [a,b] \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\ \forall n \in \mathbb{N}\} \\ Y_n(\eta) &:= \{x \in [a,b] \mid |f_n(x) - f(x)| < \eta\ \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Dann ist das Intervall $[a,b]$ die disjunkte Vereinigung von $X_n(\eta)$ und $Y_n(\eta)$. Deswegen gilt für die Integrale

$$\left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx$$
$$= \int_{X_n(\eta)} |f_n(x) - f(x)|\ dx + \int_{Y_n(\eta)} |f_n(x) - f(x)|\ dx. \tag{3.2}$$

Auf der Menge $Y_n(\eta)$ ist aber $|f_n(x) - f(x)| < \eta$. Damit erhalten wir für den zweiten Summanden

$$\int_{Y_n(\eta)} |f_n(x) - f(x)|\ dx \leq \eta\lambda(Y_n(\eta)) \leq \eta(b-a).$$

Infolgedessen ergibt sich dann für die Ungleichung (3.2)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| &\leq \int_{X_n(\eta)} |f_n(x) - f(x)|\ dx + \eta(b-a) \\ &\leq \int_{X_n(\eta)} |f_n(x)|\ dx + \int_{X_n(\eta)} |f(x)|\ dx + \eta(b-a). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\eta < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Dann gilt $\eta(b-a) < \frac{\varepsilon}{3}$. Außerdem gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ ebenfalls

$$\int_A |f_n(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und} \qquad \int_A |f(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.4}$$

ist. Die erste Ungleichung folgt aus der Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale von $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Die zweite Ungleichung folgt aus der im Satz 3.1 gezeigten absoluten Stetigkeit des Integrals. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen f konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$\lambda(X_n(\eta)) < \delta$$

ist. Somit gelten die Ungleichungen (3.4) ebenfalls für $A = X_n(\eta)$. Insgesamt kann in der Ungleichung (3.3) für alle $n \geq n_0$ folgendermaßen abgeschätzt werden

$$\left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_{X_n(\eta)} |f_n(x)|\ dx + \int_{X_n(\eta)} |f(x)|\ dx + \eta \cdot (b-a) < \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt ist, folgt dann die Behauptung.

□

Der Satz von Vitali liefert uns nur die Konvergenz des Integrals von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Integral von f. Jedoch können wir mit wenig Aufwand eine stärkere Konvergenz erhalten.

Korollar 3.6 *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ *eine Funktionenfolge, die fast überall punktweise gegen eine messbare Funktion* f *konvergiert. Falls die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt, dann konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* f *in* $L^1(a,b)$.

Beweis. Als erstes wollen wir zeigen, dass unter den Voraussetzungen des Korollars auch $(|f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt nach Lemma 3.4 auch $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale. Deswegen gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$

$$\int_A |f_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und} \qquad \int_A |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Sei A eine solche Teilmenge mit $\lambda(A) < \delta$. Dann ergibt sich für das Integral die folgende Abschätzung:

$$\int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_A |f_n(x)|\,dx + \int_A |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Somit besitzt $(|f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale. Da diese Folge fast überall punktweise in $[a,b]$ gegen Null konvergiert, können wir den Satz von Vitali anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0.$$

Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$.

□

Da der Satz von Vitali, wie auch der Satz von Lebesgue, als Resultat die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung liefert, stellt sich die Frage, welcher der beiden Sätze stärkere Voraussetzungen besitzt. Mit dem folgenden Satz erhalten wir, dass die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue die Voraussetzungen des Satzes von Vitali implizieren und somit der Satz von Vitali eine stärkere Aussage liefert.

Satz 3.7 *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ *und* $g \in L^1(a,b)$ *mit* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *fast überall in* $[a,b]$, *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann besitzt* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichgradig absolut stetige Integrale.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $g \in L^1(a,b)$ gibt es nach Satz 3.1 ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$

$$\int_A g(x)\,dx < \varepsilon$$

ist. Sei also $A \subset [a, b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ eine solche Teilmenge. Dann gilt für das Integral von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left|\int_A f_n(x)\ dx\right| \leq \int_A |f_n(x)|\ dx \leq \int_A g(x)\ dx < \varepsilon.$$

Somit besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.

□

Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Dies zeigt uns das folgende Beispiel, das [11] entnommen ist.

Beispiel 3.8 Wir definieren die Funktion

$$f\colon (0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Sei nun $A_n := [2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ unterteilen wir A_n äquidistant in n Teilintervalle und erhalten somit $A_n^k = [\frac{k-1+n}{n}2^{-(n+1)}, \frac{n+k}{n}2^{-(n+1)}]$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Nun definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$

$$f_n^k\colon\ (0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n^k(x) = f(x)\chi_{A_n^k}(x).$$

Wir bilden eine Folge, indem wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Index k von 1 bis n durchlaufen, anschließend n auf $n+1$ setzen und dann den Vorgang wiederholen. Dann besitzt (f_n^k) gleichgradig absolut stetige Integrale. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon 2^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}$. Zuerst betrachten wir den Fall, dass $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Da $\lambda(A_n^k) = \frac{1}{n}2^{-(n+1)}$ ist, gilt für jede messbare Teilmenge $A \subset [a, b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ und $1 \leq k \leq n$

$$\int_A f_n^k(x)\ dx \leq \lambda(A_n^k) \max_{x\in A_n^k} f(x) \leq \frac{1}{n2^{n+1}}2^{n+1} = \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

Nun betrachten wir den Fall, dass $n < \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Sei $A \subset [a, b]$ wieder eine messbare Teilmenge mit $\lambda(A) < \delta$ und $1 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$\int_A f_n^k(x)\ dx \leq \lambda(A) \max_{x\in A_n^k} f(x) \leq \delta 2^{n+1} = \varepsilon 2^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}2^{n+1} < \varepsilon.$$

Somit besitzt (f_n^k) gleichgradig absolut stetige Integrale. Aus der Definition von (f_n^k) folgt, dass eine integrierbare Majorante von (f_n^k) auch eine integrierbare Majorante von f sein müsste. Da jedoch f bereits nicht integrierbar ist und das Integral monoton ist, kann es keine integrierbare Majorante für (f_n^k) geben.

Nun kommen wir zu dem in Beispiel 3.3 angesprochenen hinreichenden Kriterium für die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale.

Satz 3.9 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$. Falls für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx = 0 \tag{3.5}$$

gilt, dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.

Beweis. Der Beweis ist [9, S. 171] entnommen. Wir nehmen an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine gleichgradig absolut stetigen Integrale besitzt. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ eine messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left| \int_A f_n(x)\ dx \right| \geq \varepsilon_0. \tag{3.6}$$

Seien $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Wir betrachten die ersten N Funktionen der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der absoluten Stetigkeit der Integrale der einzelnen Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ finden wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq N$ ein $\delta_k > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta_k$ folgendes gilt

$$\left| \int_A f_k(x)\ dx \right| < \varepsilon_0. \tag{3.7}$$

Sei nun $\hat{\delta} = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$. Dann folgt aus Ungleichung (3.6), dass es eine messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \hat{\delta}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left| \int_A f_n(x)\ dx \right| \geq \varepsilon_0$$

ist. Jedoch gilt für diese Teilmenge $\lambda(A) < \delta_k$ und somit ist für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq N$ die Ungleichung (3.7) erfüllt. Daraus folgt, dass $n > N$ ist.

Wir haben also gezeigt, dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass zu jedem $\delta > 0$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ eine messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ existieren, für die folgendes gilt

$$\left| \int_A f_n(x)\ dx \right| \geq \varepsilon_0. \tag{3.8}$$

Im Folgenden konstruieren wir eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$, eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Folge reeller Zahlen $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i)
$$\left| \int_{A_k} f_{n_k}\ dx \right| \geq \varepsilon_0,$$

(ii)
$$\lambda(A_{k+1}) < \frac{\delta_k}{2},$$

(iii)
$$\text{für alle } A \subset [a,b] \text{ mit } \lambda(A) < \delta_k \text{ gilt } \left|\int_A f_{n_k}\ dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Dazu sei $A_1 \subset [a,b]$ eine beliebige messbare Teilmenge. Wegen der Ungleichung (3.6) gibt es einen Index $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\int_{A_1} f_{n_1}(x)\ dx\right| \geq \varepsilon_0$$

gilt. Da das Integral von f_{n_1} absolut stetig ist, existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta_1$

$$\left|\int_A f_{n_1}(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

ist. Aufgrund der Ungleichung (3.8) finden wir nun eine messbare Teilmenge $A_2 \subset [a,b]$ mit $\lambda(A_2) < \frac{\delta_1}{2}$ und einen Index $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$, für die

$$\left|\int_{A_2} f_{n_2}(x)\ dx\right| \geq \varepsilon_0 \tag{3.9}$$

gilt. Erneut gibt es ein $\delta_2 > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta_2$ folgendes gilt

$$\left|\int_A f_{n_2}(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{3.10}$$

Dann erhalten wir die Eigenschaft, dass $\delta_2 < \frac{\delta_1}{2}$ ist. Um dies zu zeigen nehmen wir an, dass $\delta_2 \geq \frac{\delta_1}{2}$ ist. Dies führt dazu, dass das Maß $\lambda(A_2) < \delta_2$ ist und somit für die Teilmenge A_2 die Ungleichung (3.10) erfüllt ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Ungleichung (3.9). Infolgedessen muss $\delta_2 < \frac{\delta_1}{2}$ sein.

Ein weiteres Mal finden wir wegen der Unlgeichung (3.8) eine messbare Teilmenge $A_3 \subset [a,b]$ mit $\lambda(A_3) < \frac{\delta_2}{2}$ und einen Index $n_3 \in \mathbb{N}$ mit $n_3 > n_2$, für die folgende Eigenschaft gilt

$$\left|\int_{A_3} f_{n_3}(x)\ dx\right| \geq \varepsilon_0.$$

Da das Integral von f_{n_3} ebenfalls absolut stetig ist, existiert ein $\delta_3 > 0$, so dass für jede Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta_3$ das Integral

$$\left|\int_A f_{n_3}(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

ist. Gleichermaßen ist die Eigenschaft $\delta_3 < \frac{\delta_2}{2}$ erfüllt.

Führen wir dieses Verfahren iterativ fort, erhalten wir eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Folge reeller Zahlen $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die nach Konstruktion die Eigenschaften (i)-(iii) erfüllen.
Aus diesen Eigenschaften folgt dann wiederum, dass $\delta_{k+1} < \frac{\delta_k}{2}$ ist und daher

$$\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda\left(A_{k+m}\right) \overset{(ii)}{<} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_{k+m}}{2} < \delta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \delta_k\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \delta_k \tag{3.11}$$

ist. Infolgedessen erhalten wir aufgrund der Eigenschaft (iii)

$$\left|\int_{A_k \cap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right)} f_{n_k}(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

Wir setzen $D_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right)$. Da $A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right) = A_k \setminus \left(A_k \cap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right)\right)$ ist, gilt wegen Eigenschaft (i) folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}
\left|\int_{D_k} f_{n_k}(x)\ dx\right| &= \left|\int_{A_k} f_{n_k}(x)\ dx - \int_{A_k \cap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right)} f_{n_k}(x)\ dx\right| \\
&\geq \left|\left|\int_{A_k} f_{n_k}(x)\ dx\right| - \left|\int_{A_k \cap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right)} f_{n_k}(x)\ dx\right|\right| \\
&= \left|\int_{A_k} f_{n_k}(x)\ dx\right| - \left|\int_{A_k \cap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{k+m}\right)} f_{n_k}(x)\ dx\right| \\
&\geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{3}{4}\varepsilon_0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Schließlich konstruieren wir uns eine Folge von Indizes $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ folgendes gilt

$$\left|\int_{\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_{k_m}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Dazu sei $k_1 = 1$. Dann gibt es aufgrund der Voraussetzung (3.5) einen Index $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_2 > k_1$, für den folgende Eigenschaft gilt

$$\left| \int_{D_{k_1}} f_{n_{k_2}}(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Analog finden wir einen Index $k_3 \in \mathbb{N}$ mit $k_3 > k_2$, der der Bedingung

$$\left| \int_{D_{k_1} \cup D_{k_2}} f_{n_{k_3}}(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

genügt. Setzen wir dieses Verfahren fort, erhalten wir eine streng monoton wachsende Folge von Indizes $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$, für die

$$\left| \int_{\bigcup_{m=1}^{i-1} D_{k_m}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4} \tag{3.13}$$

gilt. Des Weiteren erhalten wir die Ungleichung

$$\left| \int_{D_{k_i}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx \right| \geq \frac{3}{4}\varepsilon_0, \tag{3.14}$$

welche aus der Ungleichung (3.12) folgt. Da $D_k \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, ergibt sich mit der Ungleichung (3.11) die folgende Abschätzung

$$\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_{k+m} \right) \leq \lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{k+m} \right) < \delta_k.$$

Hiermit folgern wir

$$\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_{k_{i+m}} \right) \leq \lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_{k_i+m} \right) < \delta_{k_i}$$

und erhalten mit Eigenschaft (iii)

$$\left| \int_{\bigcup_{m=1}^{\infty} D_{k_{i+m}}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{3.15}$$

Mithilfe der Ungleichungen (3.13), (3.14) und (3.15) erhalten wir schlussendlich folgende Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_{k_m}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx\right| &= \left|\int_{\bigcup\limits_{m=1}^{i-1} D_{k_m}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx + \int_{D_{k_i}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx + \int_{\bigcup\limits_{m=i+1}^{\infty} D_{k_m}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx\right| \\
&\overset{(*)}{\geq} \left|\int_{D_{k_i}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx\right| - \left|\int_{\bigcup\limits_{m=1}^{i-1} D_{k_m}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx\right| \\
&\quad - \left|\int_{\bigcup\limits_{m=i+1}^{\infty} D_{k_m}} f_{n_{k_i}}(x)\ dx\right| \\
&\geq \frac{3}{4}\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{4}.
\end{aligned}
$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung (3.5). Die Abschätzung $(*)$ erhalten wir, da für jedes $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$|b| = |b + a - a + c - c| \leq |a + b + c| + |a| + |c|$$

gilt und somit

$$|b| - |a| - |c| \leq |a + b + c|$$

ist.

$\square$

Korollar 3.10 *Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ und $f \in L^1(a,b)$. Falls für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx$$

gilt, so besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wenden den Satz 3.9 auf die Differenz $f_n - f$ an und erhalten die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale. Somit gibt es ein $\delta_1 > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta_1$ folgendes gilt

$$\left|\int_A f_n(x) - f(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits ist das Integral von f absolut stetig. Deshalb gibt es ein $\delta_2 > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta_2$

$$\left|\int_A f(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann erhalten wir für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ die folgende Abschätzung

$$\left|\int_A f_n(x)\ dx\right| \leq \left|\int_A f_n(x) - f(x)\ dx\right| + \left|\int_A f(x)\ dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.

□

Mit dem Korollar 3.10 beweisen wir nun, dass stark konvergente Folgen in $L^1(a,b)$ gleichgradig absolut stetige Integrale besitzen und erhalten somit den zweiten Satz von Vitali, Satz 3.12.

Satz 3.11 *Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ und $f \in L^1(a,b)$. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$, so besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.*

Beweis. Sei $A \subset [a,b]$ eine beliebige messbare Teilmenge. Dann erhalten wir folgende Abschätzung

$$\left|\int_A f_n(x)\ dx - \int_A f(x)\ dx\right| \leq \int_A |f_n(x) - f(x)|\ dx \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx.$$

Da nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx = 0$$

ist, erhalten wir mit dem Korollar 3.10 die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Satz 3.12 (Vitali) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *besitzt gleichgradig absolut stetige Integrale.*

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen f in $L^1(a,b)$.*

Beweis. Mit dem Korollar 3.6 erhalten wir direkt, dass aus der Bedingung (i) die Bedingung (ii) folgt. Die andere Richtung haben wir bereits in Satz 3.11 gezeigt.

□

Bemerkung. Die Voraussetzung der punktweisen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f kann abgeschwächt werden. Es genügt, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem Maße nach gegen f konvergiert. [9, S. 169]

3.2 Weitere Kriterien für starke Konvergenz in $L^1(a,b)$

In diesem Abschnitt werden weitere notwendige und hinreichende Kriterien für die Konvergenz in $L^1(a,b)$ vorgestellt. Zunächst benötigen wir das folgende Lemma. Es ist [9, S. 175] entnommen.

Lemma 3.13 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine nichtnegative Funktionenfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert. Zusätzlich gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx. \tag{3.16}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx$$

für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$.

Beweis. Angenommen, die Aussage gelte nicht. Dann gibt es eine messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx \neq \int_A f(x)\ dx. \tag{3.17}$$

Also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder der Folge $(\int_A f_n(x)\ dx)_{n\in\mathbb{N}}$ außerhalb des Intervalls

$$\left(\int_A f(x)\ dx - 2\varepsilon, \int_A f(x)\ dx + 2\varepsilon\right)$$

liegen. Wir nehmen zunächst an, es gäbe unendlich viele Folgenglieder, die kleiner oder gleich $\int_A f(x)\ dx - 2\varepsilon$ sind. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\int_A f_{n_k}(x)\ dx \leq \int_A f(x)\ dx - 2\varepsilon \tag{3.18}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen f konvergiert, erhalten wir mit dem Lemma von Fatou

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A f_{n_k}(x)\ dx \geq \int_A f(x)\ dx.$$

Somit gibt es eine Teilfolge von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die wir wieder mit $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_A f_{n_k}(x)\ dx \geq \int_A f(x)\ dx - \varepsilon$$

für alle $k \geq k_0$ gilt. Zusammen mit Ungleichung (3.18) liefert uns das

$$\int_A f_{n_k}(x)\ dx \leq \int_A f(x)\ dx - 2\varepsilon < \int_A f(x)\ dx - \varepsilon \leq \int_A f_{n_k}(x)\ dx.$$

für alle $k \geq k_0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch. Also gibt es unendlich viele Folgenglieder der Folge $(\int_A f_n(x)\ dx)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\int_A f_n(x)\ dx \geq \int_A f(x)\ dx + 2\varepsilon. \tag{3.19}$$

Gehen wir wieder zu einer Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über, erhalten wir die Aussage für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch die Voraussetzung (3.16) erhalten wir, dass es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\left| \int_a^b f_{n_k}(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

für alle $k \geq k_0$. Somit gibt es eine weitere Teilfolge von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die wir wieder mit $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, mit

$$\int_a^b f_{n_k}(x)\ dx < \int_a^b f(x)\ dx + \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Subtrahieren wir dazu nun die Ungleichung (3.19), ergibt sich

$$\int_{[a,b]\setminus A} f_{n_k}(x)\ dx < \int_{[a,b]\setminus A} f(x)\ dx - \varepsilon \tag{3.20}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit dem Lemma von Fatou gelangen wir zur Ungleichung

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{[a,b]\setminus A} f_{n_k}(x)\ dx \geq \int_{[a,b]\setminus A} f(x)\ dx.$$

Somit gibt es eine Teilfolge von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die wir wieder mit $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_{[a,b]\setminus A} f_{n_k}(x)\ dx \geq \int_{[a,b]\setminus A} f(x)\ dx - \varepsilon$$

für alle $k \geq k_0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Ungleichung (3.20). Damit war die Annahme (3.17) falsch.

$\square$

Der folgende Satz liefert uns zwei Äquivalenzen zur Konvergenz in $L^1(a,b)$ unter der Voraussetzung der punktweisen Konvergenz.

Satz 3.14 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1.$$

(ii) Für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx.$$

(iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f in $L^1(a,b)$.

Beweis. Wir werden die Aussage per Ringschluss beweisen. Es sei die Bedingung (i) vorausgesetzt. Dann erhalten wir mit Lemma 3.13 die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(x)|\ dx = \int_A |f(x)|\ dx$$

für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$. Das Korollar 3.10 liefert uns die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale von $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit besitzt auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale. Mit dem Satz von Vitali, Satz 3.12, folgern wir nun, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$ konvergiert. Des Weiteren gilt für jede beliebige messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ die Abschätzung

$$\left| \int_A f_n(x)\ dx - \int_A f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx. \tag{3.21}$$

Wegen der Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx = 0.$$

Die Ungleichung (3.21) liefert uns dann die Bedingung (ii).

Nun sei die Bedingung (ii) vorausgesetzt. Dann liefert uns das Korollar 3.10 die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und mit dem Satz von Vitali, Satz 3.12, erhalten wir die Bedingung (iii).

Jetzt sei die Bedingung (iii) vorausgesetzt. Dann erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_a^b |f_n(x)|\ dx - \int_a^b |f(x)|\ dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx. \tag{3.22}$$

Da nach Voraussetzung (iii)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \ dx = 0$$

gilt, erhalten wir mithilfe der Ungleichung (3.22) die Bedingung (i).

$\square$

Im Satz von Lebesgue benötigen wir zusätzlich zur punktweisen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f eine punktweise Majorante für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, um die Konvergenz in $L^1(a,b)$ zu erhalten. Der folgende Satz liefert uns die Konvergenz in $L^1(a,b)$, falls wir eine spezielle Majorante für die Norm von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voraussetzen.

Satz 3.15 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert. Zusätzlich gelte*

$$\|f_n\|_1 \leq \|f\|_1 \tag{3.23}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$.

Beweis. Zuerst definieren wir uns die Folge von Hilfsfunktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ mit

$$g_n(x) := |f_n(x)| - |f_n(x) - f(x)|.$$

Dann gilt

$$|g_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x) - f(x)| = |f(x)|$$

für fast alle $x \in [a,b]$. Da zusätzlich noch

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = |f(x)|$$

für fast alle $x \in [a,b]$ gilt, erhalten wir mithilfe des Satzes von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x) \ dx = \int_a^b |f(x)| \ dx. \tag{3.24}$$

Insgesamt ergibt sich mit der Ungleichung (3.23) für die Norm der Differenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \ dx &= \int_a^b |f_n(x)| - g_n(x) \ dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| \ dx - \int_a^b g_n(x) \ dx. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert nach Gleichung (3.24) gegen Null. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

$\square$

Falls die Konstante vor der Norm von f in der Ungleichung (3.23) größer als eins ist, gilt die Aussage jedoch nicht. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 3.16 Wir definieren für ein $c > 0$

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ cn & \text{für} \quad -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offensichtlich fast überall punktweise gegen f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Normen von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f erhalten wir folgendes

$$\|f_n\|_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} 1\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\ dx + \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} cn\ dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + cn\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) = 1 + c,$$

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} 1\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\ dx = 1.$$

Zusammen ergibt dies

$$\|f_n\|_1 = (1+c)\|f\|_1.$$

Damit ist die Konstante vor der Norm von f in Gleichung (3.23) größer eins.

Jedoch konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen f in $L^1(a,b)$. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Differenz

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} n & \text{für} \quad -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog zu Beispiel 3.3 (ii) erhalten wir, dass $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ keine gleichgradig absolut stetigen Integrale besitzt. Da $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen Null konvergiert, liefert uns der Satz von Vitali, Satz 3.12, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen f in $L^1(a,b)$ konvergiert.

3.3 Der Satz von de la Vallée-Poussin

In diesem Abschnitt stellen wir den Satz von de la Valleée-Poussin vor. Er liefert uns eine Charakterisierung von Funktionenfolgen, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzen. Zunächst benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.17 *Sei* $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *eine Funktion mit* $\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = \infty$. *Dann gibt es zu jedem* $M > 0$ *ein* $C(M) > 0$, *so dass*

$$s \leq \frac{1}{M}\varphi(s) + C(M)$$

für alle $s \geq 0$ *gilt.*

Beweis. Sei $M > 0$ beliebig. Da $\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = \infty$ ist, gibt es ein $C(M) > 0$, so dass für alle $s \geq C(M)$ folgendes gilt

$$1 \leq \frac{1}{M}\frac{\varphi(s)}{s}.$$

Hieraus erhalten wir für alle $s \geq 0$

$$s \leq \frac{1}{M}\varphi(s) + C(M).$$

□

Nun kommen wir zum Satz von de la Valleé-Poussin. Der vorgestellte Beweis ist [1, Theorem 2.4.4] entnommen.

Satz 3.18 (de la Valleé-Poussin) *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *besitzt gleichgradig absolut stetige Integrale.*

(ii) Es existiert eine Funktion $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *mit* $\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = \infty$ *und*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \varphi(|f_n(x)|)\, dx < \infty$$

Beweis. Es gelte (ii). Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für eine Teilmenge $A \subset [a,b]$ und ein $M > 0$ erhalten wir mit Lemma 3.17 die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_A |f_n(x)|\, dx &\leq \frac{1}{M}\int_A \varphi(|f_n(x)|)\, dx + C(M)\lambda(A)\\ &\leq \frac{1}{M}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_a^b \varphi(|f_n(x)|)\, dx + C(M)\lambda(A).\end{aligned}$$

Wir wählen $M = \frac{2}{\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \varphi(|f_n(x)|)\ dx$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{2C(M)}$. Falls $\lambda(A) < \delta$ ist, gilt

$$\int_A |f_n(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.
Für die Umkehrung sei auf [4, Theorem 22] verwiesen.

□

Aus diesem Satz erhalten wir beispielweise, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b (f_n(x))^2\ dx < \infty$$

gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt. An dieser Stelle beenden wir diesen Abschnitt, da der Fokus dieser Arbeit an anderen Stellen liegt.

3.4 Die Konvergenz im Steklov-Mittel

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Existenz konvergenter Teilfolgen in $L^1(a,b)$. Hinreichend dafür ist die Kompaktheit der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$. Deswegen werden wir die Kompaktheitsbedingungen von Kolmogoroff für $L^1(a,b)$ vorstellen. Im Jahr 1931 bewies A. Kolmogoroff die Bedingung für Mengen von Funktionen aus L^p mit $p > 1$, die auf beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ definiert sind [8]. J. Tamarkin bewies die Bedingung für den unbeschränkten Fall im Jahr 1932 [12]. Im Jahr 1933 lieferte dann A. Tulajkov in [14] den Beweis für die Bedingungen im Raum $L^1(\mathbb{R}^d)$. Zunächst definieren wir die Steklov-Funktion.

Definition 3.19 *Sei $f \in L^1(a,b)$. Außerhalb von $[a,b]$ setzen wir f mit null fort. Dann heißt für $h > 0$*

$$f_h\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\ dt$$

Steklov-Funktion von f.

Bemerkung. Da $f_h(x) = \frac{1}{2h}(F(x+h) - F(x-h))$ mit $F(x) = \int_{a-h}^{x} f(t)\ dt$ gilt und F nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig ist, erhalten wir somit auch die Stetigkeit von f_h. Damit ist f_h insbesondere auch integrierbar.

Zunächst benötigen wir die folgenden Lemmata.

Lemma 3.20 *Sei $f \in L^1(a,b)$ und f_h die Steklov-Funktion von f. Dann gilt*

$$\|f_h\|_1 \leq \|f\|_1.$$

Beweis. Zuerst betrachten wir den Fall $f \geq 0$. Mit dem Satz von Fubini und der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned} 2h \int_a^b f_h(t)\ dt &= \int_a^b \int_{t-h}^{t+h} f(x)\ dx\ dt = \int_a^b \int_{-h}^{h} f(z+t)\ dz\ dt \\ &= \int_{-h}^{h} \int_a^b f(z+t)\ dt\ dz = \int_{-h}^{h} \int_{a+z}^{b+z} f(x)\ dx\ dz. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Da $f \geq 0$ ist und außerhalb von $[a,b]$ mit null fortgesetzt ist, gilt

$$\int_{a+z}^{b+z} f(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx.$$

Für die rechte Seite der Gleichung (3.25) ergibt sich somit

$$\int_{-h}^{h} \int_{a+z}^{b+z} f(x)\ dx\ dz \leq \int_{-h}^{h} \int_a^b f(x)\ dx\ dz = 2h \int_a^b f(x)\ dx$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_a^b f_h(t)\ dt \leq \int_a^b f(x)\ dx. \tag{3.26}$$

Wir betrachten nun beliebige integrierbare Funktionen. Sei also $f \in L^1(a,b)$ beliebig. Wir bezeichnen mit $|f|_h$ die Steklov-Funktion von $|f|$. Dann gilt

$$|f_h(x)| = \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\ dt \right| \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|\ dt = |f|_h.$$

und somit auch

$$\int_a^b |f_h(x)|\ dx \leq \int_a^b |f|_h(x)\ dx.$$

Aus der Ungleichung (3.26) folgt

$$\int_a^b |f|_h(x)\ dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Mithilfe unserer bisherigen Ergebnisse gelangen wir zur Ungleichung

$$\int_a^b |f_h(x)|\ dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

□

Lemma 3.21 *Sei $f \in L^1(a,b)$ und f_h die Steklov-Funktion von f. Dann gilt*

$$\lim_{h \to 0} \|f_h - f\|_1 = 0.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f \in L^1(a, b)$. Sei $x \in (a, b)$ und $h > 0$ so klein, dass $[x - h, x + h] \subset [a, b]$ ist. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhalten wir

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\ dt = f(\xi),$$

wobei $\xi \in [x - h, x + h]$ ist. Für jedes $x \in (a, b)$ gilt somit

$$\lim_{h \to 0} f_h(x) = f(x).$$

Da f als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$, so dass $|f(x)| \leq M$ für jedes $x \in [a, b]$ ist. Damit gilt auch

$$|f_h(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\ dt - f(x) \right| \leq 2M$$

für jedes $x \in [a, b]$. Der Satz von Lebesgue liefert uns somit

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)|\ dx = 0. \tag{3.27}$$

Es sei nun $f \in L^1(a, b)$ beliebig. Aufgrund der Dichtheit von $C([a, b])$ in $L^1(a, b)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C([a, b])$ mit

$$\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Da $(f - \varphi)_h = f_h - \varphi_h$ ist, erhalten wir mit Lemma 3.20 die Ungleichung

$$\|f_h - \varphi_h\|_1 = \|(f - \varphi)_h\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f_h - f\|_1 &\leq \|f_h - \varphi_h\|_1 + \|\varphi_h - \varphi\|_1 + \|\varphi - f\|_1 \\ &< 2\varepsilon + \|\varphi_h - \varphi\|_1. \end{aligned}$$

Da φ als stetige Funktion die Ungleichung (3.27) erfüllt, gibt es ein $h_0 > 0$, so dass für alle $0 \leq h \leq h_0$

$$\|\varphi_h - \varphi\|_1 < \varepsilon$$

gilt. Insgesamt ergibt sich damit für alle $h \leq h_0$ die Ungleichung

$$\|f_h - f\|_1 < 3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

$\square$

Nun kommen wir zum Satz von Kolmogoroff. Der Beweis ist [9, S. 551] sowie [14] entnommen.

Satz 3.22 (Kolmogoroff) *Sei $K \subset L^1(a,b)$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist K genau dann relativ kompakt, wenn folgendes gilt:*

(i) K ist beschränkt in $L^1(a,b)$.

(ii) $\|f_h - f\|_1$ strebt für $h \to 0$ gleichmäßig in K gegen Null, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $h_0 > 0$, so dass $\|f_h - f\|_1 < \varepsilon$ für alle $h < h_0$ und alle $f \in K$ ist.

Beweis. Sei K relativ kompakt. Dann ist die Bedingung (i) offensichtlich erfüllt. Um die Bedingung (ii) zu zeigen, führen wir eine Widerspruchsbeweis durch. Wir nehmen an, sie sei nicht erfüllt. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, eine Folge positiver reeller Zahlen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ mit

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \|f^{(n)}_{h_n} - f^{(n)}\|_1 \geq \varepsilon_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da in einem metrischen Raum Folgenkompaktheit äquivalent zur Überdeckungskompaktheit ist, genügt es zu zeigen, dass $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt, um eine Widerspruch zur relativen Kompaktheit von K zu erhalten. Angenommen $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Diese bezeichnen wir wieder mit $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es ein $g \in L^1(a,b)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f^{(n)} - g\|_1 = 0$ und es gilt die Ungleichung

$$\varepsilon_0 \leq \|f^{(n)}_{h_n} - f^{(n)}\|_1 \leq \|f^{(n)}_{h_n} - g_{h_n}\|_1 + \|g_{h_n} - g\|_1 + \|g - f^{(n)}\|_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch Anwendung des Lemmas 3.20 auf den ersten Summanden erhalten wir

$$\varepsilon_0 \leq 2\|g - f^{(n)}\|_1 + \|g_{h_n} - g\|_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 3.21 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|g_{h_n} - g\|_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Somit erhalten wir

$$\|g - f^{(n)}\|_1 > \frac{\varepsilon_0}{4}$$

für alle $n \geq n_0$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen g konvergiert. Damit besitzt $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Dies impliziert wiederum, dass K nicht relativ kompakt ist.

Wir setzen nun die Bedingungen (i) und (ii) voraus. Dann gibt es ein $M > 0$, so dass $\|f\|_1 \leq M$ für alle $f \in K$ ist. Für ein festes $h > 0$ gilt dann für $f \in K$

$$|f_h(x)| \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| \; dt \leq \frac{1}{2h} \int_a^b |f(t)| dt \leq \frac{M}{2h}, \tag{3.28}$$

da f außerhalb von $[a, b]$ nach Definiton des Steklov-Mittels mit null fortgesetzt wird. Für $f \in K$ setzen wir

$$f_{hh}(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f_h(t) \; dt$$

und bezeichnen für ein festes $h > 0$ die Menge aller f_{hh} mit K_{hh}. Es sei nun $h > 0$ fest. Dann erhalten wir für $f_{hh} \in K_{hh}$ mit der Ungleichung (3.28)

$$|f_{hh}(x)| = \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f_h(t) \; dt \right| \leq \frac{1}{2h} \int_a^b |f_h(t)| \; dt \leq \frac{M}{(2h)^2}(b-a).$$

Somit sind die Funktionen aus K_{hh} gleichmäßig beschränkt. Im Weiteren sei $B_h(x) := [x-h, x+h]$. Für $x'', x' \in [a, b]$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
|f_{hh}(x'') - f_{hh}(x')| &= \left| \frac{1}{2h} \int_{B_h(x'')} f_h(t) \; dt - \frac{1}{2h} \int_{B_h(x')} f_h(t) \; dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2h} \left(\int_{B_h(x'')} f_h(t) \; dt - \int_{B_h(x') \setminus B_h(x'')} f_h(t) \; dt - \int_{B_h(x'') \cap B_h(x')} f_h(t) \; dt \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2h} \left(\int_{B_h(x'') \setminus B_h(x')} f_h(t) \; dt - \int_{B_h(x') \setminus B_h(x'')} f_h(t) \; dt \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{2h} \int_{(B_h(x'') \setminus B_h(x')) \cup (B_h(x') \setminus B_h(x''))} |f_h(t)| \; dt.
\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung (3.28) ergibt sich somit

$$|f_{hh}(x'') - f_{hh}(x')| \leq \frac{M}{(2h)^2} \lambda((B_h(x'') \setminus B_h(x')) \cup (B_h(x') \setminus B_h(x'')))$$

Konvergiert nun x' gegen x'', so erhalten wir

$$\lim_{x' \to x''} \lambda((B_h(x'') \setminus B_h(x')) \cup (B_h(x') \setminus B_h(x''))) = 0.$$

Also konvergiert $|f_{hh}(x'') - f_{hh}(x')|$ gleichmäßig in f gegen Null. Dies wiederum impliziert, dass die Funktionen aus K_{hh} gleichgradig stetig sind. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli [3, Theorem 4.25] ist damit die Menge K_{hh} relativ kompakt im Raum der stetigen

Funktionen $C([a,b])$ und daher auch relativ kompakt in $L^1(a,b)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es nach Lemma 3.20 ein $h_0 > 0$, so dass für alle $h \leq h_0$ und für $f \in K$

$$\|f_{hh} - f\|_1 \leq \|f_{hh} - f_h\|_1 + \|f_h - f\|_1 < 2\varepsilon$$

gilt. Die Menge K lässt sich demnach beliebig genau durch die Menge K_{hh} approximieren. Damit ist auch K relativ kompakt in $L^1(a,b)$ [9, S. 534, Satz 4].

$\square$

An dieser Stelle belassen wir es mit den Kompaktheitskriterien in $L^1(a,b)$ und kommen zum nächsten Kapitel, indem wir uns der schwachen Konvergenz in $L^1(a,b)$ widmen.

4 Schwache Konvergenz in $L^1(a,b)$

4.1 Vergleich starker und schwacher Konvergenz in $L^1(a,b)$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Vergleich von schwacher und starker Konvergenz in $L^1(a,b)$. Aus der starken Konvergenz in $L^1(a,b)$ folgt die schwache Konvergenz in $L^1(a,b)$, da dies nach Satz 2.11 in beliebigen Banachräumen gilt. Nun stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen wir aus der schwachen Konvergenz in $L^1(a,b)$ die starke Konvergenz in $L^1(a,b)$ folgern können. Für punktweise konvergente Folgen in $L^1(a,b)$ erhalten wir mit dem folgenden Satz die Äquivalenz von starker und schwacher Konvergenz in $L^1(a,b)$.

Satz 4.1 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark gegen f in $L^1(a,b)$.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen f in $L^1(a,b)$.

Bevor wir zu dem Beweis des Satzes kommen, benötigen wir den folgenden Satz. Die Aussage stammt aus [9, S. 174].

Satz 4.2 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die schwach gegen ein $f \in L^1(a,b)$ konvergiert. Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale.*

Beweis. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen f konvergiert, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)\ dx = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

für alle $g \in L^\infty(a,b)$ und somit insbesondere auch für die charakteristischen Funktionen χ_A für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$. Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\chi_A(x)\ dx = \int_a^b f(x)\chi_A(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx$$

für alle messbaren Teilmengen $A \subset [a,b]$. Das Korollar 3.10 liefert uns damit die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Nun kommen wir zu dem Beweis des Satzes 4.1.

Beweis von Satz 4.1. Dass aus der starken Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$ die schwache Konvergenz folgt, erhalten wir mit Satz 2.11.

Nun setzen wir die Bedingung (ii) voraus. Dann erhalten wir mithilfe des Satzes 4.2 die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mithilfe des Satzes von Vitali, Satz 3.12, folgern wir, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(a,b)$ konvergiert.

□

Wir können die Voraussetzung der punktweisen Konvergenz im Satz 4.1, wie beim Satz von Vitali, durch die Konvergenz dem Maße nach ersetzen. Nun stellt sich die Frage, welche Aussagen wir treffen können, falls wir keine punktweise Konvergenz voraussetzen. Das folgende Beispiel zeigt uns, dass es nicht genügt, zusätzlich zur schwachen Konvergenz in $L^1(a,b)$ die Konvergenz der Normen zu fordern, um die starke Konvergenz in $L^1(a,b)$ zu erhalten. Das Beispiel ist [1, S. 49, S. 54] entnommen.

Beispiel 4.3 Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_n\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin(nx) + 1.$$

Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(0,\pi)$. Um die schwache Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen, betrachten wir zunächst die Funktion

$$g_n\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin(nx).$$

Wir wollen zeigen, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen null in $L^1(0,\pi)$ konvergiert. Da $L^\infty(0,\pi) \subset L^1(0,\pi)$ ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin(nx) z(x)\ dx = 0 \tag{4.1}$$

für jedes $z \in L^1(0,\pi)$ gilt. Da der Raum $C_c^\infty(0,\pi)$ dicht liegt in $L^1(0,\pi)$, zeigen wir die Aussage (4.1) zunächst für alle $z \in C_c^\infty(0,\pi)$. Sei $z \in C_c^\infty(0,\pi)$ beliebig. Dann gilt mit der Regel der partiellen Integration

$$\int_0^\pi \sin(nx) z(x)\ dx = \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} z'(x)\ dx.$$

Damit erhalten wir

$$\left| \int_0^\pi \sin(nx) z(x)\ dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^\pi |z'(x)|\ dx.$$

Betrachten wir nun den Grenzwert für n gegen unendlich, ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin(nx) z(x)\ dx = 0 \tag{4.2}$$

für alle $z \in C_c^\infty(0,\pi)$. Mit einem Dichtheitsargument erhalten wir nun die Aussage für alle $z \in L^1(0,\pi)$. Dazu sei $z \in L^1(0,\pi)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da der Raum $C_c^\infty(0,\pi)$ dicht in $L^1(0,\pi)$ liegt, gibt es ein $z_\varepsilon \in C_c^\infty(0,\pi)$ mit $\|z - z_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Es gilt

$$\int_0^\pi \sin(nx) z(x)\, dx = \int_0^\pi \sin(nx) z_\varepsilon(x)\, dx + \int_0^\pi \sin(nx)(z(x) - z_\varepsilon(x))\, dx.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \sin(nx) z(x)\, dx\right| &\leq \left|\int_0^\pi \sin(nx) z_\varepsilon(x)\, dx\right| + \int_0^\pi |z(x) - z_\varepsilon(x)|\, dx \\ &\leq \left|\int_0^\pi \sin(nx) z_\varepsilon(x)\, dx\right| + \varepsilon.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Da $z_\varepsilon \in C_c^\infty(0,\pi)$ ist, existiert wegen der Gleichung (4.2) ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\int_0^\pi \sin(nx) z_\varepsilon(x)\, dx\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ ist. Insgesamt erhalten wir hiermit für die Ungleichung (4.3) die Abschätzung

$$\left|\int_0^\pi \sin(nx) z(x)\, dx\right| < 2\varepsilon.$$

Dies impliziert die schwache Konvergenz von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null in $L^1(0,\pi)$. Daraus erhalten wir leicht die schwache Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in $L^1(0,\pi)$, wobei $f \equiv 1$ ist. Denn es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi (\sin(nx) + 1) g(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin(nx) g(x)\, dx + \int_0^\pi g(x)\, dx \\ &= \int_0^\pi f(x) g(x)\, dx\end{aligned}$$

für jedes $g \in L^\infty(0,\pi)$. Des Weiteren gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin(nx) + 1\, dx = \lim_{n\to\infty} \left((\pi + \frac{1}{n}(1 - \cos(n\pi))\right) = \pi = \|f\|_1.$$

Jedoch konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht stark in $L^1(0,\pi)$. Denn angenommen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark in $L^1(0,\pi)$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach in $L^1(0,\pi)$ gegen den selben Grenzwert. Somit ist f der einzige mögliche starke Grenzwert. Aber es gilt

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^\pi |\sin(nx)|\, dx = n \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\, dx = 2.$$

Somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht stark in $L^1(0,\pi)$.

Zusätzlich illustriert dieses Beispiel sehr gut den Unterschied zwischen starker Konvergenz und schwacher Konvergenz in $L^1(a,b)$. Denn konvergiert eine Folge schwach aber nicht stark in $L^1(a,b)$, dann oszilliert sie um den schwachen Grenzwert. Falls wir mit einer zusätzlichen Bedingung die Oszillation verhindern, dann erhalten wir auch starke Konvergenz in $L^1(a,b)$. Dies ergibt sich aus dem folgenden Satz, der [4, S. 28] entnommen ist.

Satz 4.4 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die schwach gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert. Für ein $A \subset [a,b]$ gelte $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ für fast alle $x \in A$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(x) - f(x)| \; dx = 0.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Grenzfunktion f gleich null ist. Andernfalls betrachten wir $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen uns für jedes Folgenglied der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen festen Repräsentanten. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen f konvergiert, erhalten wir mithilfe des Satzes 4.2 die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $B \subset [a,b]$ mit $\lambda(B) < \delta$

$$\int_B |f_n(x)| \; dx < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für ein $N \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_N := \left\{ x \in A \;\middle|\; \inf_{n\geq N} f_n(x) \geq -\varepsilon \right\}.$$

Da $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq 0$ für fast alle $x \in A$ ist, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\lambda(A \backslash A_{N_0}) < \delta$ ist und somit

$$\int_{A\backslash A_{N_0}} |f_n(x)| \; dx < \varepsilon \tag{4.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Desweiteren konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung schwach gegen null. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) g(x) \; dx = 0$$

für alle $g \in L^\infty(a,b)$ und somit insbesondere für $g = \chi_{A_{N_0}}$. Hieraus folgt, dass es ein $\hat{N} \geq N_0$ gibt, so dass für alle $n \geq \hat{N}$ folgendes gilt

$$\left| \int_{A_{N_0}} f_n(x) \; dx \right| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Außerdem erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_A |f_n(x)|\ dx &= \int_{A_{N_0}} |f_n(x)|\ dx + \int_{A\setminus A_{N_0}} |f_n(x)|\ dx \\ &\leq \int_{A_{N_0}} |f_n(x)+\varepsilon|\ dx + \int_{A_{N_0}} \varepsilon\ dx + \int_{A\setminus A_{N_0}} |f_n(x)|\ dx.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Aufgrund der Definition von A_{N_0} ist $f_n(x)+\varepsilon \geq 0$ für fast alle $x \in A_{N_0}$. Damit ergibt sich für das erste Integral der rechten Seite mithilfe der Ungleichung (4.5) für alle $n \geq \hat{N}$ die Abschätzung

$$\int_{A_{N_0}} |f_n(x)+\varepsilon|\ dx \leq \left|\int_{A_{N_0}} f_n(x)\ dx\right| + \varepsilon\lambda(A_{N_0}) \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon.$$

Für die letzten beiden Integrale der rechten Seite der Ungleichung (4.6) gelangen wir mit der Ungleichung (4.4) zu

$$\int_{A_{N_0}} \varepsilon\ dx + \int_{A\setminus A_{N_0}} |f_n(x)|\ dx < \varepsilon\lambda(AN_0) + \varepsilon \leq (b-a)\varepsilon + \varepsilon.$$

Für alle $n \geq \hat{N}$ erhalten wir somit insgesamt

$$\int_A |f_n(x)|\ dx \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon + (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (2+2(b-a))\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

□

4.2 Der Satz von Dunford-Pettis

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen eine Folge in $L^1(a,b)$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt. In reflexiven Banachräumen gilt der folgende Satz.

Satz 4.5 (Eberlein-Šmulian) *Sei U ein reflexiver Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge in U eine schwach konvergente Teilfolge.*

Den Beweis findet man in [3, S.69].

Leider ist der Raum $L^1(a,b)$ nicht reflexiv. Somit stellt sich die Frage, welche vermutlich stärkere Eigenschaft die Folgen in $L^1(a,b)$ haben müssen, damit sie schwach konvergente Teilfolgen besitzen. An dieser Stelle spielt die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale eine zentrale Rolle. Dies sehen wir an dem folgenden Satz.

Satz 4.6 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt. Dann gibt es eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert.*

Diesen Satz werden wir an späterer Stelle beweisen. Zunächst werden wir die Voraussetzungen des Satzes diskutieren und einen weiteren für den Beweis benötigten Satz beweisen.

Die Forderung der Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale an die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist stärker als die Forderung der Beschränktheit, denn es gilt das folgende Lemma.

Lemma 4.7 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^1(a,b)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Lemma 3.4 besitzt auch $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale. Damit gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ mit $\lambda(A) < \delta$

$$\int_A |f_n(x)|\, dx < \varepsilon$$

gilt. Wir unterteilen das Intervall $[a,b]$ äquidistant in m disjunkte Teilintervalle I_k, $k = 1,\ldots,m$, wobei $m \in \mathbb{N}$ so groß gewählt ist, dass $\frac{b-a}{m} < \delta$ ist. Dann gilt $\lambda(I_k) < \delta$ und somit erhalten wir

$$\int_a^b |f_n(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{I_k} |f_n(x)|\, dx < \varepsilon m.$$

Damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

□

Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Denn die Funktionenfolge aus Beispiel 3.3 (*ii*) hat die Norm eins und ist somit beschränkt. Sie besitzt aber keine gleichgradig absolut stetigen Integrale, wie in dem Beispiel gezeigt wurde.

Bevor wir zu dem Beweis des Satzes 4.6 kommen, benötigen wir den folgenden Satz. Der Beweis ist eine Ausarbeitung der Übungsaufgabe 4.22 aus [3].

Satz 4.8 *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge und $f \in L^1(a,b)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen f in $L^1(a,b)$.*

(ii) Für jede messbare Teilmenge $A \subset [a,b]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx. \tag{4.7}$$

Beweis. Es sei die Bedingung (i) vorausgesetzt. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)\ dx = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

für alle $g \in L^\infty(a,b)$ und somit insbesondere für die charakteristischen Funktionen χ_A mit messbarem $A \subset [a,b]$. Damit erhalten wir die Bedingung (ii).

Umgekehrt sei die Bedingung (ii) vorausgesetzt. Zunächst zeigen wir, dass der Vektorraum aufgespannt von den charakteristischen Funktionen χ_A, wobei $A \subset [a,b]$ die messbaren Mengen sind, dicht liegt in $L^\infty(a,b)$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ und $f \in L^\infty(a,b)$ beliebig. Wir wählen den Repräsentanten von f, so dass

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

gilt. Da die Funktion f nun überall beschränkt ist, können wir den Wertebereich von f äquidistant zerlegen. Somit gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen α_i mit $\alpha_i = \inf_{x\in[a,b]} f(x) - \frac{i\lambda(f([a,b]))}{m}, i = 0,\dots,m$ und Mengen $A_i \subset [a,b]$ mit

$$A_{i+1} := \{x \in [a,b] \mid \alpha_i < f(x) \le \alpha_{i+1}\}, \qquad i = 0,\dots,m-1$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ so groß gewählt wird, dass $|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \varepsilon$ ist. Denn dann gilt

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} \right\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}(x) \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=1}^m f(x)\chi_{A_i}(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}(x) \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=1}^m (f(x) - \alpha_i)\chi_{A_i}(x) \right| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

wegen der Definition der Mengen A_i. Damit liegt der Vektorraum aufgespannt von den charakteristischen Funktionen χ_A dicht in $L^\infty(a,b)$. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem $g \in L^\infty(a,b)$ ein $\phi_\varepsilon \in \mathit{span}\,\{\chi_A \mid A \subset [a,b] \text{ messbar}\}$ mit

$$\|g - \phi_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_n(x) - f(x))g(x)\ dx = &\int_a^b (f_n(x) - f(x))\phi_\varepsilon(x)\ dx \\ &+ \int_a^b (f_n(x) - f(x))(g(x) - \phi_\varepsilon(x))\ dx.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Für den ersten Summanden der rechten Seite gelangen wir mit der Gleichung (4.7) zu

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\phi_\varepsilon(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} f_n(x) - f(x)\ dx = 0.$$

Die Gleichung (4.7) liefert uns zusammen mit dem Korollar 3.10 und dem Lemma 4.7 die Beschränktheit von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(a,b)$. Damit erhalten wir für den zweiten Summanden der Gleichung (4.8) mit C als Beschränktheitskonstante

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))(g(x) - \phi_\varepsilon(x))\ dx \le \|f_n - f\|_1 \|g - \phi_\varepsilon\|_\infty \le (C + \|f\|_1)\varepsilon.$$

Für die Gleichung (4.8) erhalten wir somit insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))g(x)\ dx \le (C + \|f\|_1)\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung.

□

Nun kommen wir zu dem Beweis des Satzes 4.6. Er benutzt Resultate aus der Maß- und Integrationstheorie, welche im Anhang zu finden sind und ist eine Ausarbeitung des Beweises vom Satz von Dunford aus [5, S. 76]

Beweis von Satz 4.6. Wir benötigen zunächst eine abzählbare Algebra $\mathcal{F}$ über $[a,b]$, so dass f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar bezüglich der von $\mathcal{F}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F})$ ist. Wir definieren $\mathfrak{E} := \{(-\infty, \beta) \subset \mathbb{R} \mid \beta \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist $\mathfrak{E}$ ein Erzeuger der Borel σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$. Außerdem ist $\mathfrak{E}$ abzählbar, denn $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Wir betrachten für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\mathcal{F}_n := \left\{ f_n^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{E} \right\}.$$

Diese ist dann offensichtlich auch abzählbar. Es bleibt noch zu zeigen, dass f_n für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ messbar bezüglich der aus $\mathcal{F}_n$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F}_n)$ ist. Dies erhalten wir aber direkt aus Satz 6.2. Denn dieser besagt, dass $\mathcal{F}_n$ der Erzeuger der σ-Algebren $f_n^{-1}(\mathcal{B})$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist und damit f_n messbar bezüglich $\sigma(\mathcal{F}_n)$ ist. Setzen wir nun $\mathcal{F}$ gleich der kleinsten Algebra, die $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ enthält. Dann bleibt $\mathcal{F}$ abzählbar, da eine Vereinigung abzählbar vieler Mengen abzählbar ist und die Bildung der Algebra auch nur abzählbar viele Mengen hervorruft. Damit erfüllt $\mathcal{F}$ die anfangs geforderte Bedingungen.

Mithilfe eines Diagonalfolgenarguments werden wir uns nun eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren, so dass $\lim_{k\to\infty}\int_A f_{n_k}(x)\ dx$ für jedes $A \in \mathcal{F}$ existiert. Dazu sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathcal{F}$. Dann ist $(\int_{A_1} f_n(x)\ dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Mit dem Lemma 4.7 folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und somit ist $(\int_{A_1} f_n(x)\ dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Es gibt also eine Teilfolge $(f_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(\int_{A_1} f_{1,k}(x)\ dx)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Mit der gleichen Argumentation finden wir eine Teilfolge $(f_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(\int_{A_2} f_{2,k}(x)\ dx)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Wir führen dieses Verfahren fort und wählen die Diagonalfolge $(f_{k,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert nach Konstruktion $(\int_A f_{k,k}(x)\ dx)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $A \in \mathcal{F}$. Setzen wir $f_{n_k} = f_{k,k}$, dann konvergiert $(\int_A f_{n_k}(x)\ dx)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $A \in \mathcal{F}$.

Wir wollen nun zeigen, dass $(\int_A f_{n_k}(x)\ dx)_{k\in\mathbb{N}}$ dann auch für jedes $A \in \sigma(\mathcal{F})$ konvergiert. Dazu definieren wir uns für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_k\colon \sigma(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}, \qquad \mu_k(A) = \int_A f_{n_k}(x)\ dx.$$

Durch Anwendung des Prinzips der guten Mengen wollen wir zeigen, dass

$$\mathcal{D} := \left\{ A \in \sigma(\mathcal{F}) \middle| (\mu_k(A))_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \right\} = \sigma(\mathcal{F})$$

ist. Wir definieren

$$\mu\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \qquad \mu(A) = \lim_{k\to\infty} \int_A f_{n_k}(x)\ dx. \tag{4.9}$$

Als erstes zeigen wir, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System über $[a,b]$ ist. Dass $[a,b] \in \mathcal{D}$ ist, ergibt sich direkt aus der Konstruktion von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei nun $A \in \mathcal{D}$ beliebig. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(A^C) = \lim_{k\to\infty} \mu_k([a,b]) - \lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu([a,b]) - \mu(A) = \mu(A^C).$$

Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt, gibt es mithilfe von Lemma 3.4 ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Teilmenge $B \subset [a,b]$ mit $\lambda(B) < \delta$

$$\int_B |f_{n_k}|\ dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.10}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir wählen uns nun $N_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\lambda(\bigcup_{n=N_0}^{\infty} A_n) < \delta$ ist. Dies ist möglich, da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkte Teilmengen von $[a,b]$ sind. Anschließend betrachten wir für $k, l \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left|\mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu_l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right| \\ &\leq \left|\mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{N_0} A_n\right) - \mu_l\left(\bigcup_{n=1}^{N_0} A_n\right)\right| + \left|\mu_k\left(\bigcup_{n=N_0}^{\infty} A_n\right)\right| + \left|\mu_l\left(\bigcup_{n=N_0}^{\infty} A_n\right)\right|\end{aligned} \tag{4.11}$$

Da $\lambda(\bigcup_{n=N_0}^{\infty} A_n) < \delta$ ist, erhalten wir mit der Ungleichung (4.10) für die letzten beiden Summanden

$$\left|\mu_k\left(\bigcup_{n=N_0}^{\infty} A_n\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\left|\mu_l\left(\bigcup_{n=N_0}^{\infty} A_n\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Da $\bigcup_{n=1}^{N_0} A_n$ nur endlich viele Vereinigungen sind und $\mathcal{F}$ eine Algebra ist, gilt $\bigcup_{n=1}^{N_0} A_n \in \mathcal{F}$. Somit ist $\left(\mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{N_0} A_n\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Konstruktion eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Wir finden also ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq m_0$ für den ersten Summanden von Ungleichung (4.11)

$$\left|\mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{N_0} A_n\right) - \mu_l\left(\bigcup_{n=1}^{N_0} A_n\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Insgesamt erhalten wir somit für alle $k, l \geq m_0$

$$\left|\mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu_l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist $(\mu_k(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und damit konvergent. Somit gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. Damit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System über $[a, b]$. Da aber $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ ist, erhalten wir $d(\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}$, wobei $d(\mathcal{F})$ das kleinste Dynkin-System bezeichnet, dass $\mathcal{F}$ enthält. Andererseits ist $\mathcal{F}$ als Algebra durchschnittsstabil. Somit erhalten wir mit dem Satz 6.4, dass das von $\mathcal{F}$ erzeugte Dynkin-System $d(\mathcal{F})$ mit der von $\mathcal{F}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F})$ übereinstimmt. Damit gilt dann $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}$. Da jedoch offensichtlich auch $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{F})$ gilt, erhalten wir $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F})$.

Nun zeigen wir, dass μ ein signiertes Maß ist. Die erste Maßeigenschaft aus der Definition 6.5 ist trivial. Die zweite Maßeigenschaft folgt aus der vollständigen Additivität des Integrals, [9, S. 162]. Da $(\int_A f_{n_k}(x)\, dx)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $A \in \sigma(\mathcal{F})$ konvergiert, erhalten wir

$$\mu(\sigma(\mathcal{F})) \subset (-\infty, \infty)$$

und somit die dritte Eigenschaft. Des Weiteren ist μ absolut stetig bezüglich λ, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale besitzt. Somit gibt es nach dem Satz von Radon-Nikodym, Satz 6.8, ein $f \in L^1([a,b],\sigma(\mathcal{F}),\lambda)$, so dass

$$\mu(A) = \int_A f(x)\ dx$$

für alle $A \in \sigma(\mathcal{F})$ gilt. Die Definition (4.9) liefert uns somit

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_{n_k}(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx$$

für jedes $A \in \sigma(\mathcal{F})$. Mit dem Satz 4.8 erhalten wir schließlich die schwache Konvergenz von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^1([a,b],\sigma(\mathcal{F}),\lambda)$. Da $L^1([a,b],\sigma(\mathcal{F}),\lambda)$ ein Unterraum von $L^1(a,b)$ ist, erhalten wir die schwache Konvergenz von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^1(a,b)$.

□

Der Satz 4.6 liefert uns jedoch keine Äquivalenz. Um eine Äquivalenz zu erhalten, müssen wir zusätzlich zur Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge eine weitere Eigenschaft fordern. Dann erhalten wir den folgenden Satz, dessen Beweis eine Ausarbeitung der Beweisidee aus [4, Kapitel 2, S.27] ist.

Satz 4.9 (Dunford-Pettis) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ eine Funktionenfolge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt gleichgradig absolut stetige Integrale.

(ii) Jede Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge, die schwach in $L^1(a,b)$ konvergiert.

Beweis. Es sei die Bedingung (i) vorausgesetzt und $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es nach dem Satz 4.6 eine Teilfolge von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die schwach in $L^1(a,b)$ konvergiert.
Umgekehrt sei die Bedingung (ii) vorausgesetzt. Angenommen die Bedingung (i) gelte nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und messbare Teilmengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ mit $\lambda(A_k) < \frac{1}{k}$, so dass

$$\left| \int_{A_k} f_{n_k}(x)\ dx \right| \geq \varepsilon_0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Offensichtlich besitzt keine Teilfolge von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolut stetige Integrale. Jede Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also auch $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt aber nach der Voraussetzung (ii) eine in $L^1(a,b)$ schwach konvergente Teilfolge.

Somit gibt es eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen eine Funktion $f \in L^1(a,b)$ konvergiert aber keine gleichgradig absolut stetigen Integrale besitzt. Diese Teilfolge bezeichnen wir wieder mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es wieder ein $\varepsilon_0 > 0$, eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und messbare Teilmengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ mit $\lambda(A_k) < \frac{1}{k}$, so dass

$$\left| \int_{A_k} f_{n_k}(x)\ dx \right| \geq \varepsilon_0 \tag{4.12}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n \colon \mathfrak{B}([a,b]) \to \mathbb{R}, \qquad \mu_n(A) = \int_A f_n(x)\ dx,$$

wobei $\mathfrak{B}([a,b])$ die Borel σ-Algebra über $[a,b]$ bezeichnet. Dann ist μ_n ein signiertes Maß für jedes feste $n \in \mathbb{N}$. Die erste Maßeigenschaft aus der Definition 6.5 ist trivial. Die zweite Maßeigenschaft folgt aus der vollständigen Additivität des Integrals [9, S. 162]. Da f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ integrierbar ist, folgt

$$\mu_n(\mathfrak{B}([a,b])) = (-\infty, \infty)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit die dritte Maßeigenschaft. Des Weiteren erhalten wir aufgrund der schwachen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) &= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\chi_A(x)\ dx \\ &= \int_a^b f(x)\chi_A(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx \end{aligned}$$

für jedes $A \in \mathfrak{B}([a,b])$. Die absolute Stetigkeit von μ_n bezüglich λ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aus dem Satz 3.1. Mit den bisher gezeigten Aussagen sind die Voraussetzungen des Satzes von Vitali-Hahn-Saks, Satz 6.7, erfüllt. Somit gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $A \in \mathfrak{B}([a,b])$ mit $\lambda(A) < \delta$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n(A)| < \varepsilon_0$$

gilt. Zusammen mit der Ungleichung (4.12) erhalten wir für jedes $A \in \mathfrak{B}([a,b])$ mit $\lambda(A) < \delta$

$$\varepsilon_0 \leq \left| \int_A f_{n_k}(x)\ dx \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_A f_n(x)\ dx \right| < \varepsilon_0.$$

Dies ergibt einen Widerspruch.

□

Bemerkung. Die Bedingung (ii) bedeutet, dass die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ schwach folgenkompakt ist.

5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wollen wir die Vielzahl der unterschiedlichen Resultate in dieser Arbeit zusammenfassen, um einen Überblick zu geben.

Nach der Einführung in die mathematischen Grundlagen in Kapitel 2 begannen wir in Kapitel 3 mit der starken Konverenz in $L^1(a,b)$. Zunächst führten wir den Begriff der Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale für Folgen aus $L^1(a,b)$ ein. Im ersten Satz von Vitali zeigte sich, dass für fast überall punktweise konvergente Folgen aus $L^1(a,b)$ die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale ein hinreichendes Kriterium für die starke Konvergenz in $L^1(a,b)$ ist. Anschließend zeigten wir, im Vergleich zum Satz von Lebesgue, dass die Existenz einer fast überall punktweisen Majorante für eine Folge aus $L^1(a,b)$ die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale impliziert, jedoch nicht umgekehrt. Mithilfe des Satzes 3.9 erhielten wir im finalen Satz von Vitali, dass für fast überall punktweise konvergente Folgen die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die starke Konvergenz in $L^1(a,b)$ ist.

Im Abschnitt 3.2 ergab sich, dass für eine fast überall punktweise konvergente Folge aus $L^1(a,b)$ auch die Konvergenz der Normen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die starke Konvegenz in $L^1(a,b)$ ist. Des Weiteren zeigten wir, dass für fast überall punktweise konvergente Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(a,b)$ nicht nur eine punktweise Majorante, wie im Satz von Lebesgue, sondern auch die Existenz einer speziellen Majorante für die Norm von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hinreichend für die starke Konvergenz in $L^1(a,b)$ ist. In den Abschnitten 3.3 und 3.4 stellten wir kurz den Satz von de la Valleé-Poussin, eine Charakterisierung für die Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale, und den Satz von Kolmogoroff, die Kompaktheitsbedingungen in $L^1(a,b)$, vor.

Im Kapitel 4 beschäftigten wir uns dann mit der schwachen Konvergenz in $L^1(a,b)$. Zunächst einmal stellten wir fest, dass für fast überall punktweise konvergente Folgen aus $L^1(a,b)$ die starke Konvergenz und die schwache Konvergenz äquivalent sind. Anschließend zeigten wir mithilfe eines Beispiels, dass schwach konvergente Folgen, die nicht stark konvergieren, um ihren schwachen Grenzwert oszillieren. Es stellte sich heraus, dass wir die starke Konvergenz erhalten, falls wir die Oszillation mit einer zusätzlichen Bedingung verhindern.

Im Abschnitt 4.2 widmeten wir uns dem Satz von Dunford-Pettis und der Frage nach der Existenz schwach konvergenter Teilfolgen. Wir stellten fest, dass Folgen aus $L^1(a,b)$, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzen, schwach konvergente Teilfolgen haben. Des Weiteren zeigten wir, dass die Forderung der Existenz gleichgradig absolut stetiger Integrale stärker ist als die Forderung der Beschränktheit, wie im Satz von Eberlein-Šmulian. Falls wir die Folgen mit ihren Mengen identifizieren, so liefert uns abschließend der Satz von Dunford-Pettis, dass die schwach folgenkompakten Folgen genau die Folgen sind, die gleichgradig absolut stetige Integrale besitzen.

6 Anhang zur Maß- und Integrationstheorie

In diesem Kapitel werden wir die für Abschnitt 4.2 benötigten Aussagen der Maß- und Integrationstheorie zusammenstellen. Die Grundlagen aus der Maß- und Integrationstheorie setzen wir voraus. Im Folgenden sei Ω ein metrischer Raum.

Im Allgemeinen lässt sich eine σ-Algebra nicht durch unmittelbares Hinschreiben der Elemente angeben. Deswegen werden die σ-Algebren oft durch die Angabe eines sogenannten Erzeugers definiert.

Definition 6.1 *Sei $\mathfrak{E} \subset P(\Omega)$ eine beliebige Menge, wobei $P(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω bezeichnet. Der Durchschnitt aller σ-Algebren über Ω, die $\mathfrak{E}$ umfassen, heißt die von $\mathfrak{E}$ erzeugte σ-Algebra. Wir bezeichnen sie mit $\sigma(\mathfrak{E})$. Die Menge $\mathfrak{E}$ heißt Erzeuger von $\sigma(\mathfrak{E})$.*

Bemerkung. Dass der Durchschnit beliebig vieler σ-Algebren wieder eine σ-Algebra ist, folgt direkt aus der Definition einer σ-Algebra.

Satz 6.2 *Seien X, Y metrische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{E} \subset P(Y)$ ein Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{B}$ über Y. Dann erzeugt $f^{-1}(\mathfrak{E})$ die σ-Algebra $f^{-1}(\mathcal{B})$. Das heißt für jede Menge $\mathfrak{E} \subset P(Y)$ gilt*

$$\sigma(f^{-1}(\mathfrak{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathfrak{E})).$$

Einen Beweis dieser Aussage finden wir in [7, Satz 4.4].

Definition 6.3 *Eine Menge $\mathcal{D}$ von Teilmengen von Ω heißt ein Dynkin-System über Ω, falls die folgenden Eigenschaften gelten:*

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) *für jedes* $A \in \mathcal{D}$ *gilt* $A^C \in \mathcal{D}$,

(iii) *für jede Folge von paarweise disjunkten Mengen* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ *gilt*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.$$

Ein Dynkin-System ist fast eine σ-Algebra. Nach dem sogenannten Prinzip der guten Mengen können wir es und den nachfolgenden Satz nutzen, um zu zeigen, dass gewisse Eigenschaften nicht nur auf einer durchschnittsstabilen Menge, sondern auch auf der von dieser Menge erzeugten σ-Algebra gelten.

Satz 6.4 *Ist* $\mathfrak{E} \subset P(\Omega)$ *durchschnittsstabil, das heißt für je zwei Mengen* $A, B \in \mathfrak{E}$ *gilt* $A \cap B \in \mathfrak{E}$*, so gilt*

$$d(\mathfrak{E}) = \sigma(\mathfrak{E}),$$

wobei $d(\mathfrak{E})$ *das kleinste Dynkin-System bezeichnet, dass* $\mathfrak{E}$ *enthält.*

Einen Beweis finden wir in [7, Satz 6.7].

Lassen wir die Nichtnegativitätsforderung eines Maßes weg, so erhalten wir ein signiertes Maß.

Definition 6.5 *Sei* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Algebra über* Ω*. Dann heißt die Abbildung* $\mu\colon \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ *signiertes Maß auf* $\mathcal{A}$*, falls die folgenden Eigenschaften gelten:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0,$

(ii) für jede Folge von paarweisen disjunkten Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

(iii) entweder es gilt $\nu(\mathcal{A}) \subset (-\infty, \infty]$ *oder* $\nu(\mathcal{A}) \subset [-\infty, \infty)$.

Für ein signiertes Maß definieren wir nun die absolute Stetigkeit.

Definition 6.6 *Sei* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Algebra über* Ω*,* μ *ein signiertes Maß auf* $\mathcal{A}$ *und* ν *ein Maß auf* $\mathcal{A}$*. Dann heißt* μ *absolut stetig bezüglich* ν*, falls es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für jedes* $A \in \mathcal{A}$ *mit* $\nu(A) < \delta$ *folgendes gilt*

$$|\mu(A)| < \varepsilon.$$

Der folgende Satz liefert uns ein Resultat über Folgen von absolut stetigen signierten Maßen.

Satz 6.7 (Vitali-Hahn-Saks) *Sei* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Algebra über* Ω *und* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von auf* $\mathcal{A}$ *definierten signierten Maßen mit der Eigenschaft, dass* $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ *für jedes* $A \in \mathcal{A}$ *existiert. Sei weiterhin* ν *ein auf* $\mathcal{A}$ *definiertes Maß und* μ_n *absolut stetig bezüglich* ν *für jedes* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$*, so dass für jedes* $A \in \mathcal{A}$ *mit* $\nu(A) < \delta$ *folgendes gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n(A)| < \varepsilon.$$

Ein Beweis lässt sich in [4, Satz 23] finden.

Eine sehr interessante Aussage über absolut stetige signierte Maße liefert uns der folgende Satz. Man kann diese nämlich durch ein Integral darstellen.

Satz 6.8 (Radon-Nikodym) *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω, μ ein signiertes Maß auf $\mathcal{A}$ und ν ein Maß auf $\mathcal{A}$. Zusätzlich sei μ absolut stetig bezüglich ν. Dann gibt es ein $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mit der Eigenschaft*

$$\mu(A) = \int_A f(x)\ d\nu$$

für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Für einen Beweis sei auf [10, Satz 6.10] verwiesen.

Literaturverzeichnis

[1] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille: *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization*, MPS-SIAM Series on Optimization, Society for Industrial a nd Applied Mathematics, Philadelphia, 2006

[2] M. Barner, F. Flohr: *Analysis 2*, Walter de Gruyter, Berlin, 1996

[3] H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science+Business Media, New York, 2011

[4] C. Dellacherie, P.A. Meyer: *Probabilities and Potential*, Hermann, Paris, 1978

[5] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr.: *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence, 1977

[6] M. Dobrowolski: *Angewandte Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010

[7] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005

[8] A. Kolmogoroff: *Über die Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Seiten 60-63, Göttingen, 1931

[9] I. P. Natanson: *Theorie der Funktionen einer Reellen Veränderlichen*, Akademie-Verlag-Berlin, Berlin, 1969

[10] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill Book Company, New York, 1987

[11] M. Struwe: Lösung 10, ETH Zürich, `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/math/analysis3/loesung10.pdf`, abgerufen am 03.08.2013 um 20:01

[12] J. Tamarkin: *On the compactness of the space L^p*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 38, Seiten 79-84, 1932

[13] F. Tröltzsch: *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009

[14] A. Tulajkov: *Zur Kompaktheit im Raum L^p für $p = 1$*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Seiten 167-170, Göttingen, 1933