

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
FG Differentialgleichungen

Eine Einführung in Zwei-Skalen-Konvergenz und ihre Anwendung auf lineare Probleme

Bachelorarbeit

Sommersemester 2013

Betreuer: Dr. Hans-Christian Kreuzler

vorgelegt von

Vincent Schicktanz

5. November 2013

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den

(Vincent Schicktanz)

Danksagung

Ich bedanke mich an erster Stelle bei meinen Eltern, die mich während meines Studiums finanziell unterstützt haben, sodass es mir möglich war, bis zum heutigen Tag diese Arbeit zu schreiben. Ich bedanke mich bei ihnen für ihr Interesse an meinen Studieninhalten und -abläufen sowie die Zeit und den Platz in unserer Wohnung, die ich mir immer zum Arbeiten nehmen durfte. Ich bedanke mich bei meinem Betreuer Dr. Hans-Christian Kreuzler für die Zeit und Mühe, die er in mich und diese Arbeit investiert hat. Ich weiß es sehr zu schätzen, dass er mir als Ansprechpartner bei Fragen immer zur Verfügung stand. Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Etienne Emmrich für die Auswahl dieses Themas. Er erleichterte mir damit den Einstieg in meine erste wissenschaftliche Arbeit enorm.

Großer Dank gilt meinen Kommilitonen Mathieu Rosière, André Eikmeier, Thomas Jan-kuhn, Rico Weiske, Jonas Röhm, Judith Böhlert, Isabell Vorkastner, Fabian Clauß und Paulo Yañez. Ich konnte in den letzten drei Jahren viel von ihnen lernen und es bereitete mir eine große Freude mit ihnen zusammen zu arbeiten. Insbesondere für die Bachelorarbeit war der Mehrwert euch zu kennen unglaublich groß.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei Viktoria Häberle und Robert Pietschmann für ihre Motivation, ihr Durchhaltevermögen und ihre Inspiration.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Exkurs in die Funktionalanalysis	3
2.2	Bochner-Integral	4
2.3	Periodische Funktionen	5
2.4	Distributionen	8
3	Eindimensionale Einführung in die Homogenisierungstheorie	11
4	Einführung in die Zwei-Skalen-Konvergenz	14
4.1	Benötigte Räume und ihre Eigenschaften	14
4.2	Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz	16
4.3	Wichtige Resultate der Zwei-Skalen-Konvergenz	24
5	Homogenisierung eines linearen elliptischen Problems zweiter Ordnung	33
5.1	Lineare elliptische Randwertprobleme	33
5.2	Einführung in die Homogenisierungstheorie	35
5.3	Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz auf das Homogenisierungsproblem	38
6	Zusammenfassung und Ausblick	43
	Literaturverzeichnis	46

Kapitel 1

Einleitung

Das Konzept der Zwei-Skalen-Konvergenz wurde erstmals von Gabriel Nguetseng im Jahr 1989 eingeführt [Ngu89]. Neben der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz konnte Nguetseng einen Kompaktheitssatz (siehe Satz 4.11) formulieren, der besagt, dass jede in L^2 beschränkte Folge eine Teilfolge besitzt, die im Zwei-Skalen-Sinne konvergiert. Drei Jahre später wurden viele der wichtigsten Aussagen von Grégoire Allaire in [All92] bewiesen. Er führte auch die Bezeichnung „Zwei-Skalen-Konvergenz“ ein. Ein weiterer wesentlicher Schritt in der Theorie der Zwei-Skalen-Konvergenz erfolgte durch Dag Lukkassen, Gabriel Nguetseng und Peter Wall im Jahr 2002. In ihrem Artikel [LNW02] wurden alle Ergebnisse neu aufgearbeitet, verallgemeinert und alternative Beweise vorgestellt. Außerdem wurden neue Resultate eingebracht und Ungenauigkeiten ausgeräumt.

Die Entwicklung der Zwei-Skalen-Konvergenz ist in der periodischen Homogenisierungstheorie begründet. Die Homogenisierungstheorie gehört zum Teilgebiet der asymptotischen Analysis und beschäftigt sich mit der Frage, wie wir kompliziert strukturierte Objekte durch einfachere Modelle beschreiben können. In der periodischen Homogenisierungstheorie geht es ausschließlich um Materialien mit periodischer Struktur. Die Periodizität ist dabei tief im Konzept der Zwei-Skalen-Konvergenz verankert. Das erkennen wir unter anderem an der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz. Dafür sei Ω eine beschränkte und offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , $Y = [0, 1]^n$ der abgeschlossene Einheitswürfel im \mathbb{R}^n und (ε) eine Nullfolge¹. Die Folge $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ konvergiert im Zwei-Skalen-Sinne gegen $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, falls

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx \quad (1.1)$$

für gewisse Funktionen ψ , die periodisch im zweiten Eingang sind, gilt. Jede Testfunktion für die Zwei-Skalen-Konvergenz muss also eine gewisse Periodizität aufweisen. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass es heutzutage eine breite Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz gibt, die sich nicht mehr auf die periodische Homogenisierungstheorie beschränkt.

¹Präziser formuliert ist $(\varepsilon_n)_n$ eine Zahlenfolge aus \mathbb{R} echt größer Null, die für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Wir werden zum Zweck der Übersichtlichkeit in Zukunft aber nur (ε) zur Bezeichnung der Folge verwenden. Um an einigen Stellen die Formulierungen etwas schlanker halten zu können, werden wir gegebenenfalls auf die Erklärung „für $\varepsilon \rightarrow 0$ “ verzichten, da dieses durch die Bezeichnungsweise mit ε impliziert wird.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, dem Leser einen ausführlichen Einstieg in die Thematik der Zwei-Skalen-Konvergenz zu geben. Dabei werden grundlegende Kenntnisse aus dem Bereich der Differentialgleichungen und der Funktionalanalysis vorausgesetzt. Weitere mathematische Grundlagen, die für unsere Zwecke notwendig sind, werden wir in dieser Arbeit für den Leser bereitstellen (siehe Kapitel 2). Durch eine Betrachtung des Homogenisierungsprozesses im Eindimensionalen werden wir die Anschaulichkeit für den Leser erhöhen, um ihm die Möglichkeit zu geben, eine konkrete Vorstellung von den Objekten zu erlangen (siehe Kapitel 3). Das Kapitel 4 wird den Kern dieser Arbeit darstellen. Wir werden uns nach der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz ausführlich mit möglichen Testfunktionen ψ aus (1.1) beschäftigen. Neben dem Kompaktheitstheorem Satz 4.11 werden viele weitere wichtige Aussagen zur Zwei-Skalen-Konvergenz im Abschnitt 4.3 bewiesen. Im Kapitel 5 wollen wir zum Homogenisierungsprozess zurückkehren. Nach einer ausführlichen mathematischen Einführung in diese Thematik werden wir eine mögliche Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz bei einem Homogenisierungsprozess darlegen. Zum Ende möchten wir in Kapitel 6 eine Zusammenfassung dieser Arbeit geben und einige Bemerkungen zur verwendeten Literatur machen, um dem interessierten Leser einen leichteren Einstieg in weitere Quellen zu ermöglichen.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Exkurs in die Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt wollen wir einige bekannte Sätze der Funktionalanalysis wiedergeben, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigt werden. Die Aussagen werden in den Kursen Differentialgleichungen und Funktionalanalysis behandelt und sollten somit dem Leser bekannt sein, sodass wir für die Beweise meistens auf das Standardwerk von Alt [Alt80] verweisen können.

Satz 2.1

Es sei X ein reeller reflexiver Banachraum und $(x_n) \subset X$ eine beschränkte Folge. Dann

- (i) existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x \in X$, die schwach gegen x für $k \rightarrow \infty$ konvergiert ($x_{n_k} \rightharpoonup x$).
- (ii) Wenn jede schwach konvergente Teilfolge von (x_n) den gleichen Grenzwert x hat, dann konvergiert auch die gesamte Folge (x_n) schwach gegen x .

Beweis. (i) Siehe [Alt80, Satz 5.7], (ii) Mittels Widerspruch. □

Satz 2.2

Es sei X ein reeller Banachraum und es seien $(x_n) \subset X$ und $(y_n) \subset X^*$ Folgen, sodass (x_n) schwach gegen x und (y_n) stark gegen y konvergieren ($y_n \rightarrow y$). Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x_n \rangle_{X^*, X} = \langle y, x \rangle_{X^*, X}.$$

Beweis. Siehe [CD99, Proposition 1.19]. □

Satz 2.3

Es sei X ein separabler reeller Banachraum und $(y_n) \subset X^*$ eine beschränkte Folge. Dann gibt es eine Teilfolge (y_{n_k}) und ein $y \in X^*$, sodass (y_{n_k}) schwach* gegen y in X^* konvergiert ($y_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} y$).

Beweis. Siehe [Alt80, Satz 5.4]. □

2.2 Bochner-Integral

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Eigenschaften von abstrakten Funktionen $u : \Omega \rightarrow X$ zu untersuchen und einen geeigneten Integralbegriff einzuführen. Dabei sei Ω eine beschränkte und offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banachraum. Unsere Vorgehensweise orientiert sich an [Emm04, Kapitel 7.1]. Eine ausführliche Einführung in diese Thematik lässt sich in [Mik78] nachlesen. Wir beginnen mit dem Begriff der einfachen Funktion.

Definition 2.4

Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow X$, heißt einfache Funktion, falls es endlich viele paarweise disjunkte und Lebesgue-messbare Teilmengen $E_1, \dots, E_N \subset \Omega$ und Elemente $u_1, \dots, u_N \in X$ mit

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \mathbb{1}_{E_i}$$

gibt.

Mit Hilfe der einfachen Funktionen lässt sich der Begriff der Bochner-Messbarkeit definieren.

Definition 2.5

Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow X$ heißt Bochner-messbar, falls es eine Folge einfacher Funktionen (u_n) gibt, die fast überall punktweise gegen u konvergiert, also

$$u_n(x) \rightarrow u(x)$$

für $n \rightarrow \infty$ und fast alle $x \in \Omega$ gilt.

Nachdem wir den Begriff der Bochner-messbaren Funktionen eingeführt haben, werden wir das Bochner-Integral definieren.

Definition 2.6

Es sei $u : \Omega \rightarrow X$ Bochner-messbar. Dann heißt u Bochner-integrierbar, falls es eine Folge einfacher Funktionen (u_n) gibt, so dass $u_n(x) \rightarrow u(x)$ fast überall und

$$\int_{\Omega} \|u_n(x) - u(x)\| dx \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Dabei ist das Integral $\int_{\Omega} \|u_n(x) - u(x)\| dx$ als Lebesgue-Integral einer nichtnegativen Lebesgue-messbaren Funktion definiert.

Somit können wir folgende Räume definieren.

Definition 2.7

Es sei $1 \leq p < \infty$. Dann bezeichnet $L^p(\Omega; X)$ die Menge (von Äquivalenzklassen fast überall gleicher) von Bochner-messbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow X$, für die

$$\|u\|_{L^p(\Omega; X)} := \left(\int_{\Omega} \|u(x)\|_X^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

ist. Für $p = \infty$ setzen wir

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|u(x)\|.$$

Mit $L^\infty(\Omega; X)$ bezeichnen wir folglich die Menge der Bochner-messbaren Funktionen mit $\|u\|_{L^\infty(\Omega; X)} < \infty$.

Diese Räume besitzen diverse aus dem Fall $X = \mathbb{R}$ bekannte Eigenschaften.

Satz 2.8

Es gelten die folgenden Aussagen.

- (i) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\Omega; X)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega; X)}$ ein Banachraum.
- (ii) Für $1 \leq p < \infty$ liegen die einfachen Funktionen dicht in $L^p(\Omega; X)$.
- (iii) Gilt $1 \leq p < \infty$ und X ist separabel, so ist auch $L^p(\Omega; X)$ separabel.
- (iv) Gilt $1 < p < \infty$ und X ist reflexiv, so ist auch $L^p(\Omega; X)$ reflexiv.

Beweis. Ist analog zum Fall $X = \mathbb{R}$. □

2.3 Periodische Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit periodischen Funktionen, die für den Homogenisierungsprozess von Differentialgleichungen von Bedeutung sind. Wir definieren einige grundlegende Begriffe und betrachten ein Beispiel einer periodischen Funktion in \mathbb{R} , die zwar schwach aber nicht stark gegen Null konvergiert. Wir möchten mit diesem Beispiel uns gedanklich auf die verschiedenen Konvergenzarten einstellen, die im Weiteren auftreten werden. Wir behandeln Funktionen der Form

$$a_\varepsilon(x) := a(x/\varepsilon),$$

wobei $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Funktion ist und $(\varepsilon) > 0$ eine Folge von Zahlen, die gegen Null konvergiert. Konkret interessiert uns, wie sich die Folge (a_ε) im Grenzprozess für $\varepsilon \rightarrow 0$ verhält.

Im Folgenden bezeichnen wir mit Y den Einheitswürfel im \mathbb{R}^n , das heißt

$$Y = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n\text{-mal}} = [0, 1]^n. \tag{2.1}$$

Die Theorie lässt sich auch auf

$$Y = [0, l_1] \times \dots \times [0, l_n],$$

mit $l_1, \dots, l_n > 0$, aufbauen. Allerdings ersparen wir uns in vielen Definitionen und Sätzen den Normierungsfaktor $1/|Y|$ durch die Definition in (2.1), wobei $|\cdot|$ im Weiteren immer das Lebesguemaß beschreibt. Nun betrachten wir periodische Funktionen im \mathbb{R}^n [CD99, Definition 2.1].

Definition 2.9

Es sei Y wie in (2.1) und f eine Funktion, die fast überall auf \mathbb{R}^n definiert ist. Die Funktion f heißt Y -periodisch, falls

$$f(x + ke_i) = f(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n ist.

Sind die Funktionswerte einer Y -periodischen Funktion auf Y gegeben, so ist die Funktion auf \mathbb{R}^n eindeutig fortsetzbar. Das ist gut in folgender Abbildung 2.1 zu erkennen.

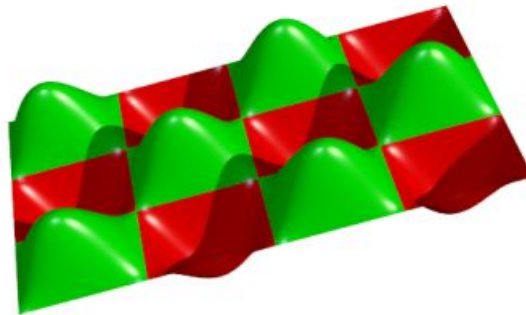


Abbildung 2.1: Y -periodische Funktion (siehe [Bild1])

Als Nächstes definieren wir den Durchschnittswert einer Funktion im \mathbb{R}^n (siehe auch [CD99, Definition 2.2]).

Definition 2.10

Es sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n und $f \in L^1(\Omega)$. Mit

$$\mathcal{M}_\Omega(f) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy$$

bezeichnen wir den Durchschnittswert von f über Ω .

Mit Hilfe des Durchschnittswertes einer Funktion können wir die Poincaré-Ungleichung (siehe auch [CD99, Proposition 3.38]) für Funktionen aus $H^1(\Omega)$ einführen.

Satz 2.11

Es sei Ω eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\|u - \mathcal{M}_\Omega(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$. Die Konstante C hängt dabei nur von der Größe des Gebiets Ω ab.

Beweis. Dies ist meist eine Übungsaufgabe in der Veranstaltung DGL IIA. □

Wir betrachten folgendes klassisches Beispiel aus [CD99, Beispiel 2.4]. Dabei diskutieren wir eine Funktion, die schwach, aber nicht stark konvergiert. Außerdem ist auch die punktweise Konvergenz fast überall nicht gegeben.

Beispiel 2.12

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $a : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(x) = \sin(2\pi x).$$

Diese hat Periodenlänge Eins. Wir setzen

$$a_\varepsilon(x) := a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sin\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Für $\alpha = 0, \beta = 2$ und $(\varepsilon)_n = (1/2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ergeben sich in Abbildung 2.2 für $n = 0, 1, 2$ Sinusfunktionen mit unterschiedlicher Periodenlänge¹.

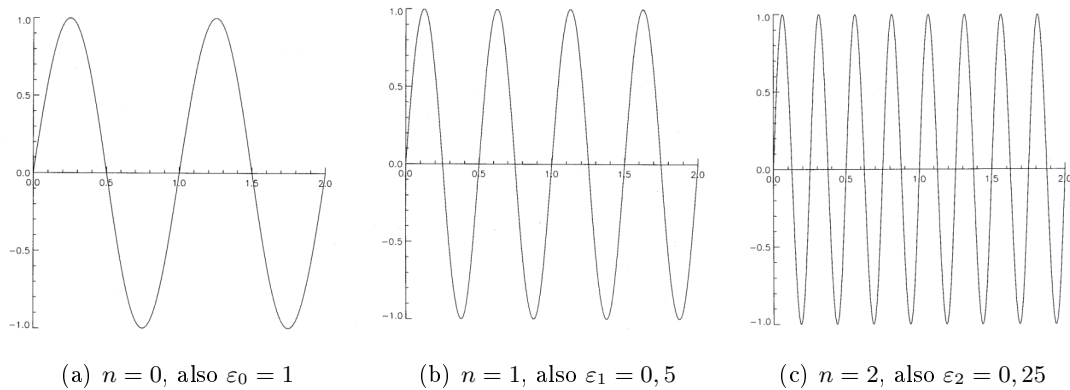


Abbildung 2.2: Sinusfunktion mit verschiedenen Periodenlängen (siehe [CD99, Seite 29/30])

Aus Abbildung 2.2 erkennen wir, dass (a_ε) für kein $x \in (0, 2)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ punktweise konvergiert. Aber wir erhalten

$$a_\varepsilon \rightharpoonup 0$$

in $L^2(0, 2)$. Dies lässt sich durch folgende Vorgehensweise nachvollziehen. Da $C^\infty(0, 2)$ dicht in $L^2(0, 2)$ (siehe [Bre11, Theorem 4.12]), testen wir mit Funktionen $\varphi \in C^\infty(0, 2)$. Daher können wir einmal partiell integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^2 \varphi(x) \sin\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \left[\varphi(x) \cos\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right) \right]_0^2 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^2 \varphi'(x) \cos\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} (\varphi(2) - \varphi(0)) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^2 \varphi'(x) \cos\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \end{aligned}$$

Da $\varphi(2) - \varphi(0)$ ein fester Wert ist, konvergiert der erste Term für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null. Die Konvergenz des zweiten Terms gegen Null folgt mit der Beschränktheit des Integrals. Somit

¹Denkbar wäre auch die Notation (u_n) mit $n \rightarrow \infty$. Da hinter (u_ε) eine Diskretisierungsidee steckt, verwenden wir aber (u_ε) mit $\varepsilon \rightarrow 0$.

gilt $a_\varepsilon \rightharpoonup 0$.

Weiter zeigen wir, dass die Folge (a_ε) nicht stark in $L^2(0, 2)$ gegen Null konvergiert. Hierfür substituieren wir $y = 2\pi\frac{x}{\varepsilon}$ und verwenden anschließend die trigonometrische Identität $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|a_\varepsilon - 0\|_{L^2(0,2)}^2 &= \int_0^2 \sin^2\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi \cdot 2}{\varepsilon}} \sin^2(y) dy \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\varepsilon}} \frac{1 - \cos(2y)}{2} dy = \underbrace{\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{4\pi}{\varepsilon}}_{=1} + \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(\underbrace{-\sin\left(\frac{8\pi}{\varepsilon}\right)}_{|\cdot| \leq 1} + \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right). \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt

$$\|a_\varepsilon - 0\|_{L^2(0,2)}^2 \rightarrow 1 \neq 0.$$

Da Null der eindeutige schwache Grenzwert ist und (a_ε) nicht stark gegen Null konvergiert, konvergiert die Folge (a_ε) nicht stark in $L^2(0, 2)$.

Wie wir im Beispiel 2.12 erkennen konnten, konvergiert die Folge (a_ε) schwach gegen Null. Dies stimmt mit $0 = \mathcal{M}_{[0,2]}(a) = \frac{1}{|[0,2]|} \int_0^2 a(y) dy$ überein. Daher lässt sich der folgende Satz (siehe auch [CD99, Theorem 2.6]) vermuten.

Satz 2.13

Es sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Y -periodische Funktion. Wir setzen

$$f_\varepsilon(x) := f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$f_\varepsilon \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für $p = \infty$ erhalten wir die schwach Konvergenz in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt*

$$f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{M}_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Beweis. Wir verweisen an dieser Stelle auf [CD99, Theorem 2.6]. □

2.4 Distributionen

In diesem Abschnitt werden wir den Ableitungsbegriff verallgemeinern und eine Einführung in die Theorie der Distributionen geben. Wir halten uns dabei an [CD99, Kapitel 3.1]. Wir werden nur die grundlegenden Begriffe erläutern, die für unsere Zwecke wichtig sind. Eine ausführliche Einführung können wir in [ABM06, Kapitel 2.2.1] nachlesen. Im Folgenden sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Definition 2.14

Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}(\Omega)$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, deren Träger² eine kompakte Menge im \mathbb{R}^n ist, die in Ω enthalten ist³.

Wir wollen einen Konvergenzbegriff in der Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ einführen. Dafür verwenden wir folgende Notation. Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ sei

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \in \mathbb{N},$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

wobei wir für $|\alpha| = 0$ mit ∂^α die Identität bezeichnen.

Definition 2.15

Es sei (φ_n) eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$. Die Folge (φ_n) konvergiert gegen ein Element $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, wenn

- (i) eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ existiert, sodass $\text{supp } \varphi_n \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\partial^\alpha \varphi_n$ gleichmäßig gegen $\partial^\alpha \varphi$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ in K konvergiert.

Als Nächstes werden wir den Begriff der Distribution definieren.

Definition 2.16

Eine Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir eine Distribution auf Ω , wenn

- (i) T linear ist. Also wenn für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2) \text{ gilt.}$$

- (ii) Wenn T folgenstetig ist, also wenn

$$(\varphi_n \rightarrow \varphi) \Rightarrow (T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)) \text{ gilt.}$$

Mit $\mathcal{D}^*(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge der Distributionen auf Ω .

Bemerkung 2.17

Die Motivation in der Bezeichnung $\mathcal{D}^*(\Omega)$ besteht darin, dass wir zeigen können, dass $\mathcal{D}^*(\Omega)$ der Dualraum von $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Das ist nicht sofort klar, weil wir auf der Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ bisher keine passende Topologie definiert haben, mit der die Menge einen topologischen oder sogar einen normierten Raum bildet. Aufgrund der Dualraum-Beziehung ist auch die Notation

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)},$$

für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ üblich.

Wir werden im Raum der Distributionen $\mathcal{D}^*(\Omega)$ einen Konvergenzbegriff einführen.

²Der Träger einer Funktion φ ist die abgeschlossene Menge $\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \cap \Omega$.

³Wir wählen die Bezeichnung $\mathcal{D}(\Omega)$ anstelle von $C_0^\infty(\Omega)$.

Definition 2.18

Eine Folge von Distributionen $(T_n) \subset \mathcal{D}^*(\Omega)$ konvergiert gegen $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, wenn

$$\langle T_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \rightarrow \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt.

Abschließend definieren wir einen Ableitungsbegriff für Distributionen.

Definition 2.19

Es sei $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Wir definieren die Ableitung im distributionellen Sinne in Richtung x_i , für $i = 1, \dots, n$, als

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Die Ableitung einer Distribution wird über die Ableitung der Testfunktion definiert. Diese Vorgehensweise ähnelt der Regel der partiellen Integration, da in beiden Fällen die Ableitung von einer Funktion auf eine andere übertragen wird.

Kapitel 3

Eindimensionale Einführung in die Homogenisierungstheorie

Wir knüpfen an die einleitenden Sätze aus Kapitel 1 an und beschäftigen uns zunächst mit dem Homogenisierungsprozess im Allgemeinen. Dazu betrachten wir ein konkretes Beispiel (siehe auch [Fre11, Seite 3]). Es sei $\varepsilon > 0$, $\Omega = (-\pi, \pi)$ und $a_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + 1 + \varepsilon \cos(\frac{x}{\varepsilon})$. Die folgende Abbildung 3.1 zeigt den Graph von a_ε für verschiedene Werte von ε .

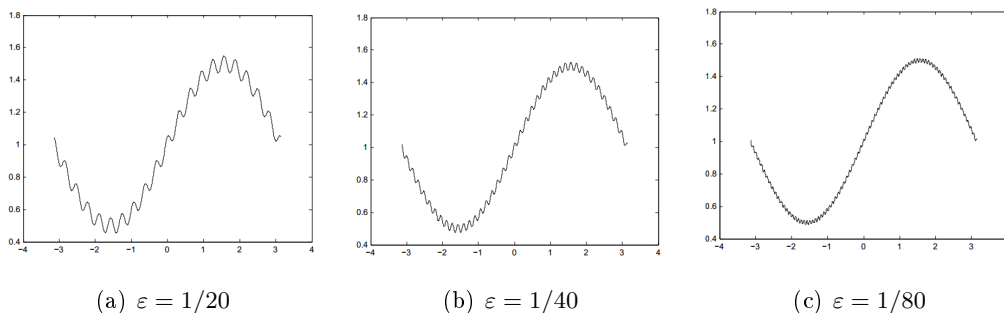


Abbildung 3.1: Graph von a_ε für verschiedene Werte von ε (siehe [Fre11, Seite 3])

In den drei Diagrammen erkennen wir das makroskopische Verhalten von a_ε , das durch $\frac{1}{2} \sin(x) + 1$ beschrieben wird, und das mikroskopische Verhalten, welches durch den Summand $\varepsilon \cos(\frac{x}{\varepsilon})$ entsteht. Der Homogenisierungsprozess beschreibt die Suche nach einer Funktion \bar{a} , die eine Annäherung an (a_ε) für $\varepsilon \rightarrow 0$ beschreibt. Das Wort Annäherung verwenden wir allgemein für eine bestimmte Konvergenz in einem bestimmten Raum. In unserem Fall ergibt sich $\bar{a}(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + 1$ und (a_ε) konvergiert punktweise für jedes $x \in \Omega$ gegen \bar{a} .

An dieser Stelle wollen wir auf den Sinn und Zweck des Homogenisierungsprozesses eingehen. Angenommen, wir hätten die Aufgabe, die Temperaturverteilung auf Ω zu bestimmen. Ohne das wir es wissen, sei diese durch die Funktion a_ε beschrieben. Unsere Vorgehensweise könnte wie folgt aussehen: Wir würden Stützpunkte x_1, \dots, x_n aus Ω wählen und an diesen Stellen die Temperatur messen, um anschließend mit einem numerischen Verfahren

die Funktionswerte zwischen x_i und x_{i+1} für $i = 1, \dots, n - 1$ zu bestimmen. Um den Verlauf realistisch darstellen zu können, müssten wir eine Schrittweite deutlich kleiner als $2\pi\varepsilon$ wählen, um das mikroskopische Verhalten zu erfassen. Für kleines ε steigt der Rechenaufwand damit an. In diesem Fall würde uns die homogenisierte Funktion \bar{a} deutlich schneller zum Ziel führen, da aufgrund der fehlenden mikroskopischen Struktur das makroskopische Verhalten auch bei größeren Schrittweiten erfasst werden kann. Somit ist die homogenisierte Gleichung für das schnelle Finden einer Lösung von Nutzen.

Im nächsten Schritt möchten wir unser konkretes Beispiel verlassen und uns einer allgemeinen Funktion zuwenden. Wir bleiben zunächst weiter im Eindimensionalen und wenden uns dem Homogenisierungsprozess bei Differentialgleichungen zu (siehe auch [Hom, Seite 433]). Es sei $\Omega = (0, b) \subset \mathbb{R}$ und $0 < \alpha, \beta < \infty$. Wir betrachten

$$\begin{cases} (a(\frac{x}{\varepsilon}) u'_\varepsilon(x))' = f(x), & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

wobei $a : \mathbb{R} \rightarrow [\alpha, \beta]$ eine periodische Funktion mit Periode Eins ist. Für $x \in \Omega$ setzen wir $a_\varepsilon(x) := a(\frac{x}{\varepsilon})$. Des Weiteren sei $f \in L^1(0, b)$.

Im eindimensionalen Fall lassen sich die einzelnen Lösungen u_ε und der homogenisierte Operator als Integrale angeben. Wir integrieren die Gleichung (3.1) über $(0, x)$ und erhalten

$$a_\varepsilon(x) u'_\varepsilon(x) = F(x) + c,$$

wobei $F : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ und $c \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstante ist. Hieraus folgt

$$u'_\varepsilon(x) = \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})} (F(x) + c)$$

und nach nochmaliger Integration erhalten wir mithilfe der linken Randbedingung $u_\varepsilon(0) = 0$

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a(\frac{\xi}{\varepsilon})} (F(\xi) + c) d\xi.$$

Die Funktion $\frac{1}{a}$ ist ebenso periodisch mit Periodenlänge Eins, da a eine periodische Funktion mit Periode Eins ist und $\alpha \leq a(x) \leq \beta$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Somit konvergiert nach Satz 2.13 die Folge $(a(\frac{\cdot}{\varepsilon}))_\varepsilon$ schwach gegen $\int_0^1 \frac{1}{a(y)} dy = \bar{a} \in \mathbb{R}$ in $L^2(0, b)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Da der Dualraum von $L^2(0, b)^*$ mit $L^2(0, b)$ übereinstimmt und F eine feste Funktion aus $L^2(0, b)$ ist, erhalten wir

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a(\frac{\xi}{\varepsilon})} (F(\xi) + c) d\xi \rightarrow \int_0^x \frac{1}{\bar{a}} (F(\xi) + c) d\xi =: u(x) \quad (3.2)$$

punktweise für alle $x \in (0, b)$. Wir betrachten die rechte Seite von (3.2), leiten diese im schwachen Sinne ab, multiplizieren mit \bar{a} und gelangen zu

$$\bar{a} u' = F + c$$

und durch nochmaliges Differenzieren zu

$$(\bar{a}u)' = f.$$

Wir haben für die Grenzfunktion u von (u_ε) eine Differentialgleichung mit einer Koeffizientenfunktion \bar{a} gefunden, sodass u die Lösung dieser Gleichung ist. An dieser Stelle ist der Homogenisierungsprozess abgeschlossen.

Kapitel 4

Einführung in die Zwei-Skalen-Konvergenz

4.1 Benötigte Räume und ihre Eigenschaften

Zunächst werden wir alle Räume definieren, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit von Bedeutung sind. Wir verwenden das $\#$ -Zeichen als Index, wenn es sich um einem Raum mit periodischen Funktionen handelt. Anschließend werden wir grundlegende Eigenschaften dieser Räume beweisen, um später auf diese Aussagen zurückgreifen zu können. Im Folgenden sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n und $Y = [0, 1]^n$ der abgeschlossene n -dimensionale Einheitswürfel im \mathbb{R}^n .

Definition 4.1

Es sei $1 \leq p < \infty$. Für die nächsten Kapitel sind folgende Räume für uns von Bedeutung.

- $C_{\#}(Y)$, der Teilraum von $C(\mathbb{R}^n)$, der alle Y -periodischen Funktionen enthält,
- $C_{\#}^{\infty}(Y)$, der Teilraum von $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, der alle Y -periodischen Funktionen enthält,
- $L_{\#}^p(Y)$, der Raum, der durch den Abschluss von $C_{\#}^{\infty}(Y)$ mit der $L^p(Y)$ -Norm entsteht,
- $H_{\#}^1(Y)$, der Raum, der durch den Abschluss von $C_{\#}^{\infty}(Y)$ mit der $H^1(Y)$ -Norm entsteht,
- $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$, der Raum der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $u \sim v \Leftrightarrow (u - v \text{ ist konstant})$, für alle $u, v \in H_{\#}^1(Y)$,
- $L^p(\Omega; C_{\#}(Y))$, siehe Definition 2.7 von $L^p(\Omega; X)$,
- $\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$, der Raum der messbaren Funktionen auf $\Omega \times \mathbb{R}^n$, sodass $u(x, \cdot) \in C_{\#}^{\infty}(Y)$ für jedes $x \in \Omega$ und die Abbildung $x \mapsto u(x, \cdot) \in C_{\#}^{\infty}(Y)$ unendlich oft differenzierbar ist mit kompaktem Träger in Ω .

Wir möchten an dieser Stelle betonen, dass die Elemente des Raumes $L_{\#}^p(Y)$ (oder anderer Räume mit periodischen Funktionen) auf Ω definiert sind und nicht ausschließlich auf Y . Wir verwenden diese Bezeichnung, um die Periode der Funktionen angeben zu können.

Bemerkung 4.2

Der Raum $L^2_{\#}(Y)$ stimmt mit dem Raum überein, der entsteht, wenn wir $L^2(Y)$ Y -periodisch auf \mathbb{R}^n erweitern. Diese Aussage werden wir nicht beweisen. Die Beweisidee kann aus dem Beweis über die Charakterisierung von $H_0^1(a, b)$ als $\{u \in H^1(a, b) \mid u(a) = u(b) = 0\}$ aus der Vorlesung DGL 2A entnommen werden.

Jede Funktion $f \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ oder $f \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ können wir vermöge $f(x, y) = f(x)(y)$ mit der Funktion $f = f(x, y)$, definiert auf $\Omega \times Y$, identifizieren. Wir vermeiden dabei die korrektere Bezeichnung $f(x)(y)$, um die Übersichtlichkeit der Darstellung zu erhöhen. Diese Bezeichnungsweise finden wir in sämtlicher Literatur.

Wir wollen einige Eigenschaften dieser Räume zeigen, die wir im Folgenden verwenden werden (siehe auch [CD99, Proposition 3.61]).

Satz 4.3

Der Raum $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ ist separabel.

Beweis. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz¹ ist der Raum $C(\mathbb{R}^n)$ separabel, da die Polynome mit rationalen Koeffizienten eine abzählbare dichte Teilmenge von $C(\mathbb{R}^n)$ bilden. Der Raum $C_{\#}(Y)$ ist ein Unterraum von $C(\mathbb{R}^n)$ und nach [Bre11, Proposition 3.25] auch separabel. Somit folgt die Aussage aus Satz 2.8. \square

Bemerkung 4.4

Es gilt $L^2(\Omega; L^2(Y)) \cong L^2(\Omega \times Y)$. Eine Beweis für $\Omega = [0, T]$ finden wir in [Emm04, Satz 7.1.24]. Eine Verallgemeinerung auf Ω ist ohne weiteres durch das Ersetzen von Ω anstelle von $(0, T)$ möglich.

Lemma 4.5

Es seien X, Y Vektorräume, sodass X dicht in Y liegt. Dann liegt auch $L^2(\Omega, X)$ dicht im Raum $L^2(\Omega, Y)$.

Beweis. Für jedes $f \in L^2(\Omega, Y)$ finden wir nach Satz 2.8 eine Folge von einfachen Funktionen (f_n) , die gegen f in $L^2(\Omega, Y)$ konvergiert. Da X dicht in Y liegt, existiert für jedes n eine Folge $(g_{nm}) \subset L^2(\Omega, X)$, die gegen f_n in $L^2(\Omega, Y)$ konvergiert. Wir wählen die Diagonalfolge $(h_j) = (g_{j_j})$ aus. Diese konvergiert in $L^2(\Omega, X)$ gegen f . \square

Satz 4.6

Der Raum $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ liegt dicht im Raum $L^2(\Omega; L^2(Y)) \cong L^2(\Omega \times Y)$.

Beweis. Da der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt (siehe auch [Bre11, Theorem 4.12]), folgt die Dichtheit von $L^2(\Omega; \mathcal{D}(Y))$ in $L^2(\Omega; L^2(Y))$ nach Lemma 4.5. Somit folgern wir die Aussage aus der Inklusion $L^2(\Omega; \mathcal{D}_{\#}(Y)) \subset L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. \square

Als Nächstes benötigen wir eine Charakterisierung der Funktionen aus $f \in L^1(\Omega; C_{\#}(Y))$.

¹Zu jedem $f \in C(\Omega)$ gibt es eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig gegen f in $C(\Omega)$ konvergiert. Nachzulesen in [Alt80], Satz 7.17

Satz 4.7

Eine Funktion f liegt genau dann in $L^1(\Omega; C_{\#}(Y))$, wenn eine Menge $E \subset \Omega$ mit Maß Null existiert, sodass

- (i) für jedes $x \in \Omega \setminus E$, die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ stetig und Y -periodisch ist,
- (ii) für jedes $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ messbar ist
- (iii) und die Funktion $x \mapsto \sup_{y \in Y} |f(x, y)|$ eine endliche Norm in $L^1(\Omega)$ hat.

Beweis. Da dieser Beweis etwas länglich ist und wir uns nicht weiter mit dieser Thematik aufhalten wollen, verweisen wir auf [LNW02, Theorem 1]. Eine Beweisskizze mit weiteren Literaturverweisen finden wir in [All92, Lemma 5.3]. \square

4.2 Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz

Nach der Vorarbeit sind wir in der Lage den Begriff der Zwei-Skalen-Konvergenz einzuführen. Wir werden in diesem Abschnitt das zentrale Lemma 4.9 beweisen, welches ein gängiges Hilfsmittel für weitere Beweise sein wird. Außerdem beschäftigen wir uns ausführlich mit möglichen Räumen für die Testfunktionen. Wir beginnen mit der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz.

Definition 4.8

Die Funktionenfolge $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ konvergiert im Zwei-Skalen-Sinne gegen $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, falls für jede Funktion $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx \quad (4.1)$$

gilt.

Konvergiert die Folge (u_ε) im Zwei-Skalen-Sinne gegen u , so werden wir die Notation $u_\varepsilon \xrightarrow{2} u$ verwenden. Um die Übersichtlichkeit über die auftretenden Funktionen und ihre Räume zu gewähren, werden wir Funktionen aus $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ mit ψ bezeichnen und φ für Funktionen aus $D^\infty(\Omega; C_{\#}(Y))$ verwenden, solange dies möglich ist.

Wir wollen zeigen, dass der Zwei-Skalen-Grenzwert eindeutig ist. Angenommen, es gebe eine Folge $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$, die im Zwei-Skalen-Sinne gegen u beziehungsweise $v \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx &\rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \varphi(x, y) dy dx, \\ \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx &\rightarrow \int_{\Omega} \int_Y v(x, y) \psi(x, y) dy dx, \end{aligned}$$

für jedes $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. Somit folgt

$$\int_{\Omega} \int_Y [u(x, y) - v(x, y)] \psi(x, y) dy dx = 0. \quad (4.2)$$

Da $D(\Omega; C_{\#}(Y)) \subset L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$, gilt Aussage (4.2) auch für alle $\psi \in D(\Omega; C_{\#}(Y))$ und wir erhalten nach dem Lemma der Variationsrechnung

$$u(x, y) - v(x, y) = 0$$

fast überall in $\Omega \times Y$. Damit ist die Eindeutigkeit des Zwei-Skalen-Grenzwerts gezeigt.

Oft finden wir in der Literatur (zum Beispiel in [LNW02, Definition 6]) auch eine Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz für eine Folge $(u_{\varepsilon}) \subset L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$. Dann ist $u_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ und die Testfunktionen $\psi \in L^q(\Omega; C_{\#}(Y))$ mit $1/p + 1/q = 1$. Alle folgenden Eigenschaften und Sätze lassen sich auch für diesen allgemeineren Fall zeigen. Wir werden uns auf den speziellen Fall $p = q = 2$ beschränken, weil dieser für unsere Anwendungsfälle ausreicht und sich einige Beweise etwas verkürzen werden.

Wir betrachten ein sehr wichtiges Lemma, das uns in den zukünftigen Beweisen oft eine große Hilfe sein wird (siehe auch [CD99, Lemma 9.1], [All92, Lemma 1.3] und [LNW02, Theorem 2]).

Lemma 4.9

Es sei $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. Dann ist $\psi(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine messbare Funktion auf Ω und es gilt

$$(i) \quad \left\| \psi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \psi(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))} = \left(\int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\psi(x, y)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$(ii) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \psi(x, y)^2 dy dx.$$

Beweis. Wir werden dieses Lemma in der abgeänderten Form $\psi \in L^1(\Omega; C_{\#}(Y))$ anstelle von $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ beweisen. Wir zeigen demnach die beiden Aussagen

$$(i) \quad \left\| \psi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \left\| \psi(\cdot, \cdot) \right\|_{L^1(\Omega; C_{\#}(Y))} = \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\psi(x, y)| dx,$$

$$(ii) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \psi(x, y) dy dx.$$

Diese Vorgehensweise finden wir auch in [All92, Lemma 5.2] und [LNW02, Theorem 2]. Sie ermöglicht einen kürzeren Beweis. In [CD99] wird die Aussage für $1 \leq p < \infty$ behauptet, sodass sie speziell für $p = 2$ stimmt. Allerdings finden wir an dieser Stelle in [CD99, Lemma 9.1] keinen Beweis, sodass wir auf die genannte Quelle vertrauen müssen. Um die Beweisidee nachvollziehen zu können, wenden wir uns dem Beweis für die abgewandelte L^1 -Formulierung zu.

Nach [AV05, Seite 210] überführen Nemytskij-Operatoren messbare Funktionen in messbare Funktionen, wenn die erzeugende Funktion eine Carathéodorybedingung erfüllt. Da ψ dieser Bedingung genügt, ist die Messbarkeit von $\psi(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon})$ gegeben. Es gilt

$$\left\| \psi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left| \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx \leq \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\psi(x, y)| dx.$$

Somit ist die Behauptung (i) gezeigt. Für (ii) sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ und $(Y_i^{(k)})$ eine Zerlegung

von Y , sodass jedes $Y_i^{(k)}$ ein Würfel mit Seitenlänge $1/k$ ist und

$$|Y_i^{(k)} \cap Y_j^{(k)}| = 0 \text{ für alle } i \neq j, |Y_i^{(k)}| = \frac{1}{k^n} \text{ für alle } i \text{ und } Y = \cup_{i=1}^{k^n} Y_i^{(k)}$$

gilt. Wir bezeichnen mit $\chi_i^{(k)}$ die charakteristische Funktion auf $Y_i^{(k)}$, die wir Y -periodisch auf \mathbb{R}^n fortgesetzt haben. Außerdem wählen wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ einen beliebigen Punkt $y_i^{(k)} \in Y_i^{(k)}$. Nun zeigen wir die Behauptung (ii) zunächst für Funktionen ψ_k der Form

$$\psi_k(x, y) = \sum_{i=1}^{k^n} \psi(x, y_i^{(k)}) \chi_i^{(k)}(y)$$

für $x \in \Omega$ und $y \in Y$. Die Funktion $y \mapsto \psi_k(x, y)$ ist konstant auf jedem $Y_i^{(k)}$ für alle $x \in \Omega$. Daher ist $y \mapsto \psi_k(x, y)$ stetig auf jedem $Y_i^{(k)}$ und Y -periodisch. Das ist Bedingung (i) aus Satz 4.7. Die Bedingung (ii) folgt aus der Messbarkeit von $x \mapsto \psi_k(x, y)$ und (iii) nach der Voraussetzung $\psi \in L^1(\Omega; C_{\#}(Y))$ und mit Hilfe der Konstanz von $y \mapsto \psi_k(x, y)$ auf $Y_i^{(k)}$. Daher liegt die Funktion ψ_k nach Satz 4.7 in $L^1(\Omega)$. Da außerdem $\chi_i^{(k)}$ eine periodische Funktion aus $L^\infty(\Omega)$ ist, erhalten wir nach Satz 2.13, dass die Funktion $\chi_i^{(k)}(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ schwach* gegen ihren Mittelwert Eins auf jedem $Y_i^{(k)}$ konvergiert. Somit gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \sum_{i=1}^{k^n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi(x, y_i^{(k)}) \chi_i^{(k)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \psi_k(x, y) dy dx.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y \psi(x, y) dy dx \right| \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right| \\ & \quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y \psi_k(x, y) dy dx \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} \int_Y \psi_k(x, y) dy dx - \int_{\Omega} \int_Y \psi(x, y) dy dx \right| \\ & \leq 2 \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\psi(x, y) - \psi_k(x, y)| dx = 2 \|\psi_k - \psi\|_{L^1(\Omega; C_{\#}(Y))} \end{aligned}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$. Wenn wir zeigen können, dass $\|\psi_k - \psi\|_{L^1(\Omega; C_{\#}(Y))}$ für $k \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, folgt die Behauptung (ii). Dafür wollen wir den Satz von Lebesgue anwenden. Hierzu zeigen wir die punktweise Konvergenz und finden eine integrierbare Majorante. Nach Voraussetzung ist $y \mapsto \psi(x, y)$ stetig für fast alle $x \in \Omega$ und somit gilt

$$g_k(x) = \sup_{y \in Y} |\psi_k(x, y) - \psi(x, y)| \rightarrow 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega \text{ und für } k \rightarrow \infty.$$

Nach der Definition von ψ_k erhalten wir die Abschätzung $|\psi_k(x, y)| \leq |\psi(x, y)|$ für alle $(x, y) \in \Omega \times Y$. Es gilt

$$g_k(x) \leq 2 \sup_{y \in Y} |\psi(x, y)|.$$

Dann liegt g_k nach obiger Argumentation in $L^1(\Omega)$. Damit sind die beiden Voraussetzungen für den Satz von Lebesgue erfüllt und wir erhalten

$$\|\psi_k - \psi\|_{L^1(\Omega; C_{\#}(Y))} = \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\psi_k(x, y) - \psi(x, y)| dx \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Nach der obigen Argumentation folgt die Behauptung. \square

Die Voraussetzung $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ ist relativ stark, da wir die Stetigkeit der Funktion $\psi(x, \cdot)$ für alle $x \in \Omega$ fordern. Bisher ist unbekannt, wie genau die Minimalanforderung an ψ aussieht, damit das für die Zwei-Skalen-Konvergenz wichtige Lemma 4.9 erfüllt ist. Wir werden zeigen, dass die Voraussetzung $\psi \in L^\infty(\Omega \times Y)$ nicht ausreicht, indem wir ein Gegenbeispiel diskutieren. Damit kann die Voraussetzung $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ nicht allzu stark abgeschwächt werden (siehe auch [CD99, Remark 9.2] und [All92, Proposition 5.8]).

Beispiel 4.10

Es sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir definieren die Mengen

$$B_k = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \sim kx + c \pmod{1}, |c| < \eta_k\},$$

wobei $\eta_k = (4\sqrt{2}k2^k)^{-1}$ und $a \sim b \pmod{1}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit Hilfe von

$$a \sim b \pmod{1} \Leftrightarrow \text{es existiert ein } z \in \mathbb{Z}, \text{ sodass } a - b = z$$

definiert ist. Eine obere Abschätzung für das Lebesgue-Maß $|B_k|$ ergibt sich aus der maximalen Länge der Streifen $\sqrt{2}$ (das ist die Diagonale des Quadrates, wie bei B_1 in Abbildung 4.1 zu erkennen) multipliziert mit der Breite der Streifen $2\eta_k$ und deren Anzahl k . Folglich gilt

$$|B_k| \leq 2k\eta_k\sqrt{2} = \frac{2k\sqrt{2}}{4\sqrt{2}k2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Wir definieren die Menge $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Somit ergibt sich

$$|B| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Wir betrachten die Funktion $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert vermöge

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{wenn } (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus B. \end{cases}$$

Da B als Vereinigung messbaren Mengen wieder messbar ist, ist h eine messbare Funktion. Außerdem gilt $|h(x, y)| \leq 1$ für alle $(x, y) \in [0, 1]^2$ und somit $h \in L^\infty([0, 1]^2)$. Wir erweitern h periodisch im zweiten Eingang von $[0, 1] \times [0, 1]$ auf $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Genügt h der Bedingung (ii) aus Lemma 4.9, so erhalten wir für jede Folge (ε_k) mit $\varepsilon_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^1 h\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) dx = \int_0^1 \int_0^1 h(x, y) dx dy = \int_B 1 dx = |B| < \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

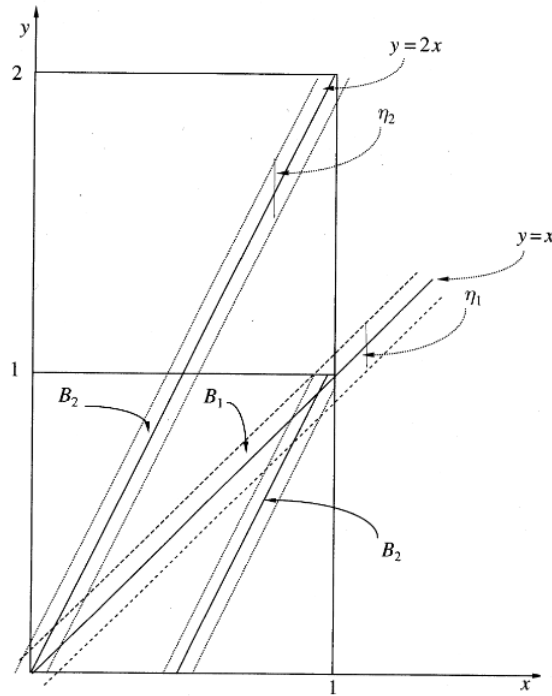


Abbildung 4.1: B_k für $k = 1$ und $k = 2$ (siehe [CD99, Seite 175]).

Wir wählen die spezielle Folge $\varepsilon_k = 1/k$. Wie wir in Abbildung 4.1 erkennen können, gilt

$$h\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) = h(x, kx) = 1$$

für $x \in [0, 1]$ und damit

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^1 h\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) dx = 1.$$

Das steht im Widerspruch zu Abschätzung (4.3).

Abschließend bemerken wir, dass die Funktion h aus Beispiel 4.10 mehr Regularität als $L^\infty(\Omega \times Y)$ aufweist. Allaire zeigte, dass $h \in C([0, 1], L^1_{\#}(Y))$ (siehe [All92, Kapitel 5]). Somit zeigt das Beispiel 4.10, dass sogar die Voraussetzung $\psi \in L^\infty((0, 1) \times \Omega) \cap C([0, 1], L^1_{\#}(Y))$ nicht für Lemma 4.9 genügt.

Mit dem folgenden Satz (siehe auch [CD99, Theorem 9.7], [All92, Theorem 1.2] und [LNW02, Theorem 14]) erhalten wir, dass für beschränkten Folgen eine Teilfolge existiert, die in Zwei-Skalen-Sinne konvergiert. Somit gibt es Folgen, die der Definition (4.8) genügen.

Satz 4.11

Aus jeder beschränkten Folge $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ können wir eine Teilfolge auswählen, sodass diese im Zwei-Skalen-Sinne gegen einen Grenzwert $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert.

Beweis. Es sei (u_ε) eine beschränkte Folge in $L^2(\Omega)$ und sei $C > 0$ mit $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C$. Somit erhalten wir mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Behauptung (i) aus

Lemma 4.9 die Abschätzung

$$\left| \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right| \leq C \left\| \psi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\psi(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))} \quad (4.4)$$

für alle $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. Für ein festes ε ist $\psi \mapsto \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx$ ein lineares und beschränktes Funktional auf $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ und daher ein Element des Dualraums von $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. Demnach finden wir ein $\mu_{\varepsilon} \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))^*$, sodass

$$\langle \mu_{\varepsilon}, \psi \rangle_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))^*, L^2(\Omega; C_{\#}(Y))} = \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \quad (4.5)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))^*, L^2(\Omega; C_{\#}(Y))}$ die duale Paarung von $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ und dem zugehörigen Dualraum $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))^*$. Diese Argumentation lässt sich für jedes feste $\varepsilon > 0$ anwenden. Wir erhalten eine beschränkte Folge (μ_{ε}) in $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))^*$, denn mit Hilfe der Gleichung (4.5) und Abschätzung (4.4) folgt

$$\|\mu_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))^*} = \sup_{\|\psi\|=1} |\langle \mu_{\varepsilon}, \psi \rangle| = \sup_{\|\psi\|=1} \left| \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right| \leq C$$

für $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. Nach Satz 4.3 ist $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ ein separabler Raum. Mit der Beschränktheit von (μ_{ε}) und Satz 2.3 können wir eine Teilfolge (μ_{ε}) auswählen, die schwach* konvergiert. Außerdem existiert ein $\mu_0 \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))^*$, sodass

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \langle \mu_{\varepsilon}, \psi \rangle \rightarrow \langle \mu_0, \psi \rangle \quad (4.6)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ und alle $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ gilt. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass

$$\langle \mu_0, \psi \rangle = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx$$

gilt. Denn dann folgt aus der Konvergenz in (4.6) die Zwei-Skalen-Konvergenz der Teilfolge (μ_{ε}) und die Behauptung ist bewiesen. Daher führen wir (4.5) und (4.6) zusammen und erhalten mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Lemma 4.9 die Ungleichungskette

$$\langle \mu_0, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \leq C \left\| \psi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

für jedes $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. Nach Satz 4.6 liegt $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$. Daher finden wir zu jedem $\varphi \in L^2(\Omega \times Y)$ eine Folge $(\varphi_h) \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$, sodass (φ_h) gegen φ in $L^2(\Omega \times Y)$ für $h \rightarrow 0$ konvergiert. Somit können wir die Fortsetzung $\tilde{\mu}_0$ von μ_0 auf $L^2(\Omega \times Y)$ definieren. Dann gilt

$$\langle \tilde{\mu}_0, \varphi \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \langle \mu_0, \varphi_h \rangle.$$

Nach dem Darstellungssatz von Riesz erhalten wir ein $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, sodass

$$\langle \tilde{\mu}_0, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx$$

für jedes $\varphi \in L^2(\Omega \times Y)$ gilt. Gilt insbesondere $\varphi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$, so erhalten wir

$$\langle \mu_0, \varphi \rangle = \langle \tilde{\mu}_0, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx.$$

□

Dieser Satz ist eine Analogie zu dem Resultat, dass wir aus jeder beschränkten Folge in $L^2(\Omega)$ eine schwach konvergente Teilfolge auswählen können.

Mit der nächsten Aussage (siehe auch [All92, S. 1487, Beispiel (**)]) erhalten wir viele Beispiele für im Zwei-Skalen-Sinne konvergierende Folgen, da jede stark konvergierende Folge auch im Zwei-Skalen-Sinne konvergiert.

Satz 4.12

Es konvergiere (u_ε) gegen u in $L^2(\Omega)$. Dann konvergiert (u_ε) auch im Zwei-Skalen-Sinne gegen $u_1 \in L^2(\Omega \times Y)$ mit $u_1(x, y) = u(x)$ für alle $(x, y) \in \Omega \times Y$.

Beweis. Es sei $\psi \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$. Dann folgt mit einer Nullergänzung und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_1(x, y) \psi(x, y) dy dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} [u_\varepsilon(x) - u(x)] \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx + \int_{\Omega} u(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_1(x, y) \psi(x, y) dy dx \right| \\ &\leq \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} u(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u(x) \psi(x, y) dy dx \right|. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.9 ist $\|\psi(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)}$ beschränkt, sodass nach Voraussetzung $(u_\varepsilon \rightarrow u)$ der erste Term gegen Null konvergiert. Da sowohl u als auch ψ in $L^2(\Omega)$ beziehungsweise in $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ liegen, ist das Produkt $u\psi$ ein Element aus $L^1(\Omega; C_\#(Y))$, da u die Periodizität im zweiten Eingang nicht verstört. Wir verwenden die L^1 -Formulierung von Lemma 4.9 und wählen $\psi(x, y) = u(x)\psi(x, y)$ in der Bedingung (ii). Somit erhalten wir, dass auch der zweite Term gegen Null konvergiert. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_1(x, y) \psi(x, y) dy dx \right| = 0.$$

Da ψ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Der nächste Satz verknüpft die Zwei-Skalen-Konvergenz mit der schwachen Konvergenz (siehe auch [All92, Proposition 1.6] und [LNW02, Theorem 10]).

Satz 4.13

Es sei (u_ε) eine Folge in $L^2(\Omega)$, die im Zwei-Skalen-Sinne gegen $u \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert. Dann gilt

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v$$

in $L^2(\Omega)$ mit $v(x) = \int_Y u(x, y) dy$ für fast alle $x \in \Omega$ und die Folge (u_ε) ist beschränkt.

Beweis. Nach der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz von (u_ε) gegen u gilt

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \psi(x, y) dy dx$$

für jedes $\psi \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$. Wir wählen ψ unabhängig von y und erhalten

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) dy \psi(x) dx.$$

Das ist genau die schwache Konvergenz von (u_ε) gegen $\int_Y u(\cdot, y) dy$, da jede Funktion aus $L^2(\Omega)$ mit einer von y unabhängigen Funktion aus $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ identifiziert werden kann. Die Beschränktheit der Folge (u_ε) in $L^2(\Omega)$ folgt aus dem Resultat, dass jede schwach konvergente Folge beschränkt ist. \square

An dieser Stelle möchten wir anmerken, dass die Wahl des Raumes der Testfunktionen, $L^2(\Omega; C_\#(Y))$, in der Definition 4.8 essentiell für Satz 4.13 ist. In verschiedener Literatur wie zum Beispiel in [CD99] oder [All92] wird anstelle von $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ der Raum $\mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ verwendet. In diesem Fall ist der Satz 4.13 nicht mehr gültig. Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir eine Beispielfolge $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$, die der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ genügt, aber weder beschränkt noch schwach konvergent gegen den adaptierten Zwei-Skalen-Grenzwert in $L^2(\Omega)$ ist (siehe auch [LNW02, Example 11]).

Beispiel 4.14

Es sei $\varepsilon > 0$, $\Omega = (0, 1)$, $u : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega \times Y$ und $u_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ definiert vermöge

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{wenn } 0 < x \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{wenn } \varepsilon < x < 1. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \rightarrow \int_\Omega \int_Y u(x, y) \varphi(x, y) dy dx = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$, da Funktionen aus $\mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ in einer Umgebung des Randes den Wert Null annehmen. Allerdings konvergiert die Folge (u_ε) nicht schwach gegen Null. Dafür wählen wir $g \equiv 1$ mit $g \in [L^2(\Omega)]^* = L^2(\Omega)$ und erhalten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 u_\varepsilon(x) g(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} = 1.$$

Außerdem ist die Folge (u_ε) nicht beschränkt in $L^2(\Omega)$, denn es gilt

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^1 |u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Der folgende Satz (siehe auch [LNW02, Proposition 13]) zeigt, dass es durchaus möglich ist, den Testraum $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ durch den Raum $\mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ zu ersetzen. Allerdings muss in diesem Fall die Beschränktheit der Folge (u_ε) vorausgesetzt werden. Damit können wir die Folge (u_ε) aus Beispiel 4.14 auch nicht mehr als Gegenbeispiel wählen.

Satz 4.15

Es sei (u_ε) eine beschränkte Folge aus $L^2(\Omega)$, sodass

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \rightarrow \int_\Omega \int_Y u(x, y) \varphi(x, y) dy dx$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ und jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ gilt. Dann konvergiert (u_ε) im Zwei-Skalen-Sinne gegen u .

Beweis. Es sei $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ und (φ_m) eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$, die gegen ψ in $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ für $m \rightarrow \infty$ konvergiert. Da der Raum $\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ dicht in $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ liegt, ist das möglich. Wir betrachten die folgende Gleichung zunächst für jedes m und gehen anschließend auf der rechten Seite zum Grenzwert $m \rightarrow \infty$ über. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \left[\psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \varphi_m \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx + \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \varphi_m \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite von (4.7) gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \varphi_m \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \varphi_m(x, y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \psi(x, y) dy dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Den letzten Schritt aus (4.8) werden wir durch die folgende Ungleichungskette erläutern. Dabei verwenden wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, die Beschränktheit von (u_{ε}) und die Tatsache, dass $\int_{\Omega} \int_Y |\varphi_m - \psi|^2 dy dx \leq \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\varphi_m - \psi|^2 dx$ gilt. Wir erhalten

$$\left| \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) [\varphi_m(x, y) - \psi(x, y)] dy dx \right| \leq c \|\varphi_m - \psi\|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq c \|\varphi_m - \psi\|_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))} \rightarrow 0$$

für $m \rightarrow \infty$. Abschließend müssen wir noch zeigen, dass der erste Term von (4.7) für $m \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Wir betrachten zunächst die einzelnen Folgenglieder wenden erneut die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, die Beschränktheit von (u_{ε}) und die Aussage (i) aus Lemma 4.9 an. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \left[\psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \varphi_m \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx \\ & \leq c \left\| \psi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) - \varphi_m \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq c \|\psi - \varphi_m\|_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))}. \end{aligned}$$

Nun gehen wir zum Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $m \rightarrow \infty$ über und erhalten

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c \|\psi - \varphi_m\|_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))} = \lim_{m \rightarrow \infty} c \|\psi - \varphi_m\|_{L^2(\Omega; C_{\#}(Y))} = 0.$$

Somit folgt aus Gleichung (4.7) die Behauptung. \square

4.3 Wichtige Resultate der Zwei-Skalen-Konvergenz

In diesem Abschnitt werden wir die wichtigsten Resultate zur Zwei-Skalen-Konvergenz untersuchen. Für viele dieser Aussagen gibt es vergleichbare Resultate in Bezug auf die starke oder schwache Konvergenz. Wir erinnern uns an die Definition der folgenunterhalbstetigen

Funktionale. Es sei $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ eine Folge, die schwach gegen $u \in L^2(\Omega)$ konvergiert, dann gilt (siehe auch [Emm04, Lemma A.2.15])

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mit dem folgenden Satz (siehe auch [All92, Proposition 1.6] und [LNW02, Theorem 17]) erhalten wir ein ähnliches Resultat für die Zwei-Skalen-Konvergenz.

Satz 4.16

Es sei (u_ε) eine Folge von Funktionen in $L^2(\Omega)$, die im Zwei-Skalen-Sinne gegen $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert. Dann gilt

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.9)$$

wobei $u \in L^2(\Omega)$ der schwache Grenzwert der Folge (u_ε) ist, also $u(x) = \int_Y u_0(x, y) dy$ für fast alle $x \in \Omega$.

Beweis. Die schwache Konvergenz von (u_ε) gegen u folgt mit Satz 4.13. Es sei $\psi \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$. Wir betrachten

$$0 \leq \int_\Omega \left[u_\varepsilon(x) - \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]^2 dx = \int_\Omega u_\varepsilon(x)^2 dx + \int_\Omega \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx - 2 \int_\Omega u_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx.$$

Mit Hilfe der Zwei-Skalen-Konvergenz von (u_ε) gegen u erhalten wir die Konvergenz des letzten Terms gegen $2 \int_\Omega \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy$. Da ψ ein Element aus $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ ist, gilt nach Lemma 4.9

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)^2 dx \geq 2 \int_\Omega \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy - \int_\Omega \int_Y \psi(x, y)^2 dx dy$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Da ψ bisher beliebig war, können wir für ψ eine Folge $(\psi_m) \subset L^2(\Omega; C_\#(Y))$ wählen, die stark gegen $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)^2 dx \geq \int_\Omega \int_Y u_0(x, y)^2 dx dy.$$

Das ist die erste Ungleichung von (4.9). Die zweite folgt mittels der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und $|Y| = 1$, wobei $|\cdot|$ das Lebesgue-Maß einer Menge bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega u(x)^2 dx = \int_\Omega \left(\int_Y u_0(x, y) dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \left(\int_Y 1^2 dy \right) \left(\int_Y u_0(x, y)^2 dy \right) dx \\ &= \int_\Omega \int_Y u_0(x, y)^2 dy dx = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2. \end{aligned}$$

Damit sind beide Ungleichungen aus (4.9) gezeigt. □

Der Satz 4.16 besagt, dass der Zwei-Skalen-Grenzwert u_0 mehr Informationen² über die Oszillationen der Folge enthält als der schwache Grenzwert u . Allerdings enthält die Folge

²„Mehr Informationen“ leiten wir aus der größeren Norm von u_0 gegenüber von u ab. Wir können uns das wie folgt vorstellen: Es sei $f \in H^1(\Omega)$. Dann gilt $\|f\|_{H^1(\Omega)} \geq \|f\|_{L^2(\Omega)}$, weil in der H^1 -Norm die Norm der Ableitung von f auftritt. Somit enthält die H^1 -Norm in gewisser Weise mehr Informationen als die L^2 -Norm.

selbst nochmal mehr Informationen als der Zwei-Skalen-Grenzwert. Der geringere Informationsverlust des Zwei-Skalen-Grenzwertes in Bezug auf den schwachen Grenzwert ist für die Theorie der Homogenisierung von Bedeutung, denn diese größere Informationsmenge ermöglicht es, einige Homogenisierungsprobleme zu lösen. Eine ausführliche Einführung in die Homogenisierungstheorie bietet die Monografie von Cioranescu und Donato [CD99].

Ein weiterer Vorteil der Zwei-Skalen-Konvergenz wird im folgenden Satz (siehe auch [CD99, Theorem 9.8], [All92, Theorem 1.8] und [LNW02, Theorem 18]) deutlich. Bisher war es uns nicht möglich, Aussagen über die Konvergenz des Produktes von zwei schwach konvergierenden Folgen zu treffen. Für zwei im Zwei-Skalen-Sinne konvergierende Folgen erhalten wir eine schwache Konvergenz.

Satz 4.17

Es sei (u_ε) eine Folge von Funktionen aus $L^2(\Omega)$, die im Zwei-Skalen-Sinne gegen $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert. Des Weiteren nehmen wir die Konvergenz der Normen in den jeweiligen Räumen an. Also gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}. \quad (4.10)$$

Dann erhalten wir für jede Folge $(v_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$, die im Zwei-Skalen-Sinne gegen $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert, dass

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon(x)v_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi(x) \int_Y u_0(x,y)v_0(x,y)dydx \quad (4.11)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ und alle $\varphi \in D(\Omega)$ gilt. Ist zusätzlich $u_0 \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$, so gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_\varepsilon(\cdot) - u_0\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (4.12)$$

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, wollen wir noch auf zwei Auffälligkeiten hinweisen. Erstens, schreiben wir die Voraussetzung (4.10) ausführlich aus, so erkennen wir, dass es genau die Bedingung (ii) aus Lemma 4.9 ist. Daher erfüllt jede Funktionenfolge aus $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ die Bedingung (4.10). Zweitens, das Resultat (4.12) ist eine Art starke Konvergenz von (u_ε) gegen u in $L^2(\Omega)$. Da ε auch in der Grenzfunktion u_0 auftritt, können wir nur von einer Art starker Konvergenz sprechen.

Beweis. Nach Satz 4.6 liegt der Raum $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$. Somit existiert eine Folge $(\psi_n) \subset L^2(\Omega; C_\#(Y))$, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} = 0 \quad (4.13)$$

gilt. Wir betrachten folgenden Term, multiplizieren diesen aus und wenden auf die drei entstehenden Terme die Voraussetzung (4.10), die Zwei-Skalen-Konvergenz von (u_ε) gegen

u_0 und Lemma 4.9 an. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}(x) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right]^2 dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x)^2 dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y)^2 dx dy - 2 \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi_n(x, y) dx dy + \int_{\Omega} \int_Y \psi_n(x, y)^2 dx dy \\
&= \int_{\Omega} \int_Y [u_0(x, y) - \psi_n(x, y)]^2 dx dy.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Wir gehen auf beiden Seiten zum Grenzwert $n \rightarrow \infty$ über und gelangen nach (4.13) zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}(x) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right]^2 dx = 0. \tag{4.15}$$

Des Weiteren sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt mit einer Nullergänzung

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) v_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}(x) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] v_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) v_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx. \tag{4.16}$$

Wir betrachten den ersten Term der rechten Seite von (4.16). Dann folgt mit der Beschränktheit der Folge (v_{ε}) nach Satz 4.13 und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz die Abschätzung

$$\left| \int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}(x) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] v_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \right| \leq C \left(\int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}(x) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Als Nächstes vollführen wir den Grenzübergang für $\varepsilon \rightarrow 0$ und erhalten anschließend mit Hilfe des Dreifolgensatzes und der Konvergenz der Folge $\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}(x) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right]^2 dx \right)_n$ gegen Null aus (4.15) die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \left[u_{\varepsilon}(x) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right]^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

Wir betrachten den zweiten Term der rechten Seite von (4.16) und gelangen mit der Annahme $v_{\varepsilon} \xrightarrow{2} v_0$ und der starken Konvergenz von (ψ_n) gegen u_0 zu

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) v_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \psi_n(x, y) \varphi(x) dy dx \\
&= \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) u_0(x, y) \varphi(x) dy dx.
\end{aligned}$$

Abschließend setzen wir die beiden Termumformungen wieder in die Gleichung (4.16) ein. Dann folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) v_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \varphi(x) \int_Y u_0(x, y) v_0(x, y) dy dx.$$

Das ist genau die Behauptung (4.11). Gilt zusätzlich $u_0 \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$, so ergibt sich (4.12) aus (4.14) durch Ersetzen von ψ_n durch u_0 . Die zusätzliche Voraussetzung $u_0 \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ wird dabei für die Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz von (u_{ε}) gegen u_0 in (4.14) benötigt. \square

Der Satz 4.17 ist ein analoges Resultat für die Zwei-Skalen-Konvergenz zu folgende Aussage aus der Funktionalanalysis: Konvergiert eine Folge $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ schwach gegen $u_0 \in L^2(\Omega)$ und gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

so erhalten wir starke Konvergenz von (u_ε) gegen u_0 in $L^2(\Omega)$ (siehe auch [Bre11, Proposition 3.32]).

Der folgende Satz (siehe auch [All92, Lemma 1.13] und [LNW02, Theorem 19]) zeigt, dass jedes Element aus $L^2(\Omega \times Y)$ ein Zwei-Skalen-Grenzwert einer zugehörigen Folge ist. Damit haben Zwei-Skalen-Grenzwerte keine zusätzlichen Eigenschaften, insbesondere auch keine zusätzliche Regularität.

Satz 4.18

Jede Funktion $u \in L^2(\Omega \times Y)$ ist der Zwei-Skalen Grenzwert einer Folge von Funktionen aus $L^2(\Omega)$.

Beweis. Nach Satz 4.6 liegt $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$. Daher finden wir eine Folge von Funktionen (u_n) in $L^2(\Omega; C_\#(Y))$, für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega \times Y)} = 0$$

gilt. Der Raum $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ ist nach Satz 4.3 separabel, sodass eine abzählbare Familie $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ existiert, die dicht in $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ liegt. Erneut argumentieren wir mit der Dichtheit von $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ in $L^2(\Omega \times Y)$ und erhalten für jedes $\psi \in L^2(\Omega \times Y)$ und jedes $\delta > 0$ ein $\eta \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$ und ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} \|\psi_k - \psi\|_{L^2(\Omega \times Y)} &\leq \|\psi_k - \eta\|_{L^2(\Omega \times Y)} + \|\eta - \psi\|_{L^2(\Omega \times Y)} \\ &\leq \underbrace{\|\eta - \psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}}_{\text{wähle zuerst } \eta \text{ so, dass } \|\cdot\| \leq \delta} + \underbrace{\|\psi_k - \eta\|_{L^2(\Omega; C_\#(Y))}}_{\text{wähle danach } k \text{ so, dass } \|\cdot\| \leq \delta} \leq 2\delta \end{aligned}$$

gilt. Daher liegt die Familie (ψ_m) auch dicht im Raum $L^2(\Omega \times Y)$. Nach Satz 4.12 konvergiert für festes n die Folge $(u_n(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}))$ im Zwei-Skalen-Sinne gegen $u_n(\cdot, \cdot)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Somit existiert für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon(n)$ aus der Folge (ε) , sodass für alle $\varepsilon < \varepsilon(n)$

$$\left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_n(x, y) \varphi(x, y) dy dx \right| \leq \delta$$

für alle $\varphi \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$ gilt. Wir wählen für δ die Werte

$$\delta_n = \|u_n - u\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

Dann konvergiert die Folge (δ_n) gegen Null für $n \rightarrow \infty$, da (u_n) gegen u in $L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert. Daher existiert eine Teilfolge $(\varepsilon(n))_n$ von (ε) mit $(\varepsilon(n))$ gegen Null für $n \rightarrow \infty$ und

$$\left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_n(x, y) \psi_k(x, y) dy dx \right| \leq \delta_n \quad (4.17)$$

für $k \in \mathbb{N}$. Anstelle von $\psi_k \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ setzen wir $u_n \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ ein und erhalten³

$$\left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right)^2 dx - \int_{\Omega} \int_Y u_n(x, y)^2 dy dx \right| \leq \delta_n. \quad (4.18)$$

Unser Ziel ist es, die Zwei-Skalen-Konvergenz von $(u_n(x, \frac{x}{\varepsilon(n)}))_n$ gegen u zu zeigen. Dann sind wir fertig. Aufgrund der Dichtheitseigenschaft der Folge (ψ_m) existiert für jedes $\delta > 0$ und jedes $\varphi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|\psi_k - \varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \varphi(x, y) dy dx \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx - \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_n(x, y) \psi_k(x, y) dy dx \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} \int_Y u_n(x, y) \psi_k(x, y) dy dx - \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \psi_k(x, y) dy dx \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \psi_k(x, y) dy dx - \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \varphi(x, y) dy dx \right|. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Wir werden die Konvergenz gegen Null für $n \rightarrow \infty$ von jedem der vier Terme auf der rechten Seite von (4.19) zeigen. Wir beginnen mit dem ersten Term. Aus (4.18) folgt die Beschränktheit von $u_n(\cdot, \cdot/\varepsilon(n))$ in $L^2(\Omega)$, denn es gilt

$$\left| \left\| u_n \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon(n)} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right| \leq \delta_n.$$

Da $\|u_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}$ konvergiert und (δ_n) eine Nullfolge ist, folgt die Beschränktheit von $(u_n(\cdot, \cdot/\varepsilon(n)))_n$. Somit erhalten wir mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx - \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx \right|^2 \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c \int_{\Omega} \left| \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) - \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \right|^2 dx \\ & = c \int_{\Omega} \int_Y |\varphi(x, y) - \psi_k(x, y)|^2 dy dx \leq c\delta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Für den zweiten Term folgt nach (4.17)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} u_n \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) \psi_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon(n)} \right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_n(x, y) \psi_k(x, y) dy dx \right| = 0. \quad (4.21)$$

Mittels der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir für den dritten Term

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} \int_Y u_n(x, y) \psi_k(x, y) dy dx - \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \psi_k(x, y) dy dx \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega \times Y)} \|\psi_k\|_{L^2(\Omega \times Y)} = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

³Für die Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz in (4.18) benötigen wir $\psi_k \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. In [All92, Lemma 1.13] wurde in diesem Beweis nur $\psi_k \in L^2(\Omega \times Y)$ vorausgesetzt. Das ist an dieser Stelle unsauber.

da $u_n \rightarrow u$ in $L^2(\Omega \times Y)$. Für den letzten Term gilt erneut mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \psi_k(x, y) dy dx - \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \varphi(x, y) dy dx \right| \\ & \leq \|u\|_{L^2(\Omega \times Y)} \|\psi_k - \varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq c\delta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da δ beliebig war, konvergieren alle vier Terme (4.20)-(4.23) gegen Null und somit folgt mit (4.19) die Behauptung. \square

Bisher haben wir ausschließlich die Zwei-Skalen-Konvergenz in $L^2(\Omega)$ betrachtet. Für den Homogenisierungsprozess bei Differentialgleichungen benötigen wir oft den Raum $H^1(\Omega)$. In diese Richtung führt uns auch der folgende Satz (siehe [CD99, Theorem 9.9], [All92, Proposition 1.14 (i)] und [LNW02, Theorem 20]).

Satz 4.19

Es sei $(u_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u$$

in $H^1(\Omega)$. Dann konvergiert (u_ε) im Zwei-Skalen-Sinne gegen u und es existieren eine Teilfolge (ε) und ein $u_1 = u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R})$, sodass

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u + \nabla_y u_1.$$

Beweis. Die Folgen (u_ε) und (∇u_ε) sind beschränkt in $L^2(\Omega)$ und $[L^2(\Omega)]^n$, da schwach konvergente Folgen beschränkt sind. Nach Satz 4.11 existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit (ε) bezeichnen, ein $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ und ein $U \in [L^2(\Omega \times Y)]^n$, sodass $u_\varepsilon \xrightarrow{2} u_0$ und $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} U$. Das bedeutet

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{\Omega} \int_Y U(x, y) \cdot \Phi(x, y) dy dx \end{aligned} \quad (4.24)$$

für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; C^{\infty}_{\#}(Y))$ und jedes $\Phi \in [\mathcal{D}(\Omega; C^{\infty}_{\#}(Y))]^n$. Da $u_\varepsilon \xrightarrow{2} u_0$ folgt mit Satz 4.13 die schwache Konvergenz von (u_ε) gegen $\tilde{u}(\cdot) = \int_Y u_0(\cdot, y) dy$. Aufgrund der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes gilt $u = \tilde{u}$.

Im Weiteren wollen wir zeigen, dass u_0 nicht von y abhängt. Ist das gezeigt, so gilt

$$u(x) = \tilde{u}(x) = \int_Y u_0(x) dy = u_0(x)$$

für alle $x \in \Omega$. Da der schwache Grenzwert u eindeutig ist, konvergiert die gesamte Folge (u_ε) im Zwei-Skalen-Sinne gegen u . Denn angenommen, das ist nicht der Fall. Dann existiert eine Teilfolge und eine Umgebung um u , sodass keine Folgenglieder in dieser Umgebung liegen. Nach obiger Argumentation finden wir eine Teilfolge der Teilfolge, die gegen u im Zwei-Skalen-Sinne konvergiert. Das ist ein Widerspruch.

Nun betrachten wir für festes ε die zweite Gleichung von (4.24) und wenden die distributionelle Ableitung aus Definition 2.19 auf die linke Seite an. Dann ergibt sich

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \cdot \Phi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx. \quad (4.25)$$

Wir stellen die Gleichung um, multiplizieren beide Seiten mit ε und erhalten

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \varepsilon \left[\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \cdot \Phi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right].$$

Als Nächstes gehen wir zum Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ über. Mit Hilfe der Zwei-Skalen-Konvergenz von (u_{ε}) gegen u_0 und (∇u_{ε}) gegen U sowie der Tatsache, dass $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ und $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i}(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ für alle $i = 1, \dots, n$, gilt, folgt

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i}(x, y) dy dx = 0.$$

Mit der Regel der partiellen Integration gelangen wir zu

$$\int_{\Omega} \int_Y \nabla_y u_0(x, y) \cdot \Phi(x, y) dy dx = 0$$

für jedes $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))^n$. Somit erhalten wir nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$\nabla_y u_0(x, y) = 0$$

für fast alle $(x, y) \in \Omega \times Y$. Wir wenden die Poincaré-Ungleichung aus Satz 2.11 mit Bezug auf y an und gelangen zu

$$u_0(x, y) = \mathcal{M}_Y(u_0(x, \cdot))$$

für fast alle $(x, y) \in \Omega \times Y$. Daher hängt u_0 nicht von y ab. Somit konvergiert die gesamte Folge (u_{ε}) im Zwei-Skalen-Sinne gegen u .

Abschließend werden wir zeigen, dass $U(x, y) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$ gilt. Dafür wählen wir $\Phi \in [\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))]^n$ mit $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i}(x, y) = 0$. Wir betrachten die zweite Gleichung von (4.24) und wenden die Regel der partiellen Integration an. Dann folgt mit der Zwei-Skalen-Konvergenz von (u_{ε}) gegen u

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y U(x, y) \cdot \Phi(x, y) dy dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}(x) \cdot \Phi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx \\ &= - \int_{\Omega} \int_Y u(x) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x, y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y \nabla u(x) \cdot \Phi(x, y) dy dx. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Wir betrachten die erste und die letzte Gleichung von (4.26), stellen diese um und erhalten

$$\int_{\Omega} \int_Y (U(x, y) - \nabla u(x)) \cdot \Phi(x, y) dy dx = 0.$$

für jedes $\Phi \in [\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))]^n$ mit $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i}(x, y) = 0$. Als Nächstes greifen wir auf das Resultat [Tem79, Proposition 1.1] zurück. Dieses besagt, dass aus $(F, \Phi)_{L^2(\Omega \times Y)} = 0$ für alle $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{div} \Phi = 0$, folgt, dass F ein Potential besitzt. Für festes x betrachten wir $F(y) = U(x, y) - \nabla u(x)$ und erhalten ein Potential $\tilde{u}_1(x) \in H_{\#}^1(\Omega)$. Da in diesem Fall auch $\tilde{u}_1(x) + c$ mit einer Konstanten c ein Potential ist, wählen wir $u_1(x) \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ und gelangen somit zur Eindeutigkeit des Potentials. Dann gilt

$$\nabla_y u_1(x, y) = U(x, y) - \nabla u(x)$$

mit $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$. Die Funktion u_1 liegt im Raum $L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$, weil $u \in H^1(\Omega)$, also $\nabla u \in [L^2(\Omega)]^n$ und $U \in [L^2(\Omega \times Y)]^n$ gilt. \square

Kapitel 5

Homogenisierung eines linearen elliptischen Problems zweiter Ordnung

5.1 Lineare elliptische Randwertprobleme

Wir geben zunächst eine Einführung in Randwertprobleme mit elliptischen partiellen Differentialgleichungen, bevor wir uns im nächsten Abschnitt dem Homogenisierungsprozess zuwenden. Dafür betrachten wir das Problem (5.4) und finden mit Hilfe von Satz 5.1 eine eindeutige Lösung.

Hierzu sei Ω eine beschränkte und offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Außerdem sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine $n \times n$ Matrix mit $A \in L^\infty(\Omega)^{n \times n}$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \beta$ nehmen wir an, dass A die Voraussetzungen

$$\begin{cases} (A(x)\xi, \xi) \geq \alpha|\xi|^2 \\ |A(x)\xi| \leq \beta|\xi| \end{cases} \quad (5.1)$$

für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ und für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt. Dabei bezeichnen wir mit $|\cdot|$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^n . Des Weiteren definieren wir den Operator \mathcal{A} vermöge

$$\mathcal{A} = -\operatorname{div}(A\nabla) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (5.2)$$

Ist die Matrix A die Identitätsabbildung, so vereinfacht sich (5.2) zum negativen Laplace-Operator, denn es gilt

$$\mathcal{A} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = -\Delta.$$

Operatoren, die die erste Bedingung von (5.1) erfüllen, nennen wir elliptisch. Wir werden diese Bedingung noch einmal in der Summenschreibweise formulieren, damit wir im Weiteren darauf zurückgreifen können. Es gilt

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (5.3)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten folgendes Problem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Die zugehörige schwache Formulierung lautet:

$$\begin{cases} \text{Zu } f \in H^{-1}(\Omega) \text{ finde } u \in H_0^1(\Omega), \text{ sodass} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (5.4)$$

wobei

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} (A\nabla u) \cdot \nabla v dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.5)$$

Die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung liefert uns der folgende Satz (siehe auch [CD99, Theorem 4.16]).

Satz 5.1

Die Matrix A erfülle die Bedingungen aus (5.1). Dann gibt es für jedes $f \in H^{-1}(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Problems (5.4). Für die Lösung u gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad (5.6)$$

wobei $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ und α wie in (5.1).

Beweis. Die Idee des Beweises ist es, das Lemma von Lax-Milgram anzuwenden. Dafür werden wir die Bilinearität, Beschränktheit und starke Positivität von a zeigen. Die Bilinearität erkennen wir aus (5.5).

Als Nächstes widmen wir uns der starken Positivität. Mit Hilfe von (5.5) und (5.3) gelangen wir zu

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &\geq \alpha \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Damit ist die starke Positivität von a gezeigt. Somit bleibt zu verifizieren, dass a beschränkt ist. Hierfür verwenden wir (5.1) und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Dann gilt

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &= \left| \int_{\Omega} (A\nabla v) \cdot \nabla w dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |(A\nabla v) \cdot \nabla w| dx \leq \int_{\Omega} |A\nabla v| |\nabla w| dx \\ &\leq \beta \int_{\Omega} |\nabla v| |\nabla w| dx \leq \beta \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \beta \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v, w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Daher ist a eine beschränkte Form auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Der Raum $H_0^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum. Somit können wir das Lemma von Lax-Milgram anwenden und erhalten die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung vom Problem (5.4). Die Abschätzung (5.6) folgt mit (5.7), denn es gilt

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq a(u, u) = \langle f, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ \iff \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden neben homogenen Dirichlet-Randbedingungen auch periodische Randbedingungen eine Rolle spielen. Wir nehmen die Y -Periodizität der Koeffizientenfunktionen a_{ij} und f an und betrachten folgendes Problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u & Y\text{-periodisch.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Da wir keine Angaben für die Funktionswerte von u am Rand von Ω haben und auch nichts über die Funktionswerte der Ableitung von u wissen, wie zum Beispiel bei Neumannschen Randbedingungen, brauchen wir einen neuen Lösungsraum, in dem die Funktionen u liegen. In dem gesuchten Raum müssen die Elemente mindestens eine schwache Ableitung besitzen und Y -periodisch sein. Ist u eine klassische Lösung des Problems (5.8), so auch $u + c$ für jede Konstante c , da in diesem Fall $u + c$ die Gleichung $\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ und die Randbedingung erfüllt. Um trotzdem eindeutige Lösungen erhalten zu können, bietet sich an dieser Stelle der Raum $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ an, den wir in Definition 4.1 eingeführt haben. Die schwache Formulierung von (5.8) lautet:

$$\begin{cases} \text{Für } f \in (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^* \text{ finde } \tilde{u} \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}, \text{ sodass} \\ \tilde{a}_Y(\tilde{u}, \tilde{v}) = \langle f, \tilde{v} \rangle_{(H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^*, H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}} \quad \text{für alle } \tilde{v} \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.9)$$

wobei

$$\tilde{a}_Y(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_Y (A\nabla u) \cdot \nabla v \, dy, \quad \text{für alle } u \in \tilde{u}, v \in \tilde{v}. \quad (5.10)$$

Da u und v in der schwachen Formulierung ausschließlich als ∇u und ∇v auftreten, ist (5.10) wohldefiniert, weil Konstanten beim Ableiten entfallen.

5.2 Einführung in die Homogenisierungstheorie

Wir untersuchen den Homogenisierungsprozess bei einem linearen elliptischen Problem zweiter Ordnung. Dieses Kapitel ist an [CD99, Kapitel 5.1] angelehnt. Am Beispiel des Problems mit Dirichlet-Randbedingungen wollen wir die Gedankengänge, mit denen wir zur homogenisierten Gleichung gelangen, darlegen. Außerdem werden wesentliche Schritte aus diesem Beispiel im nächsten Abschnitt erneut verwendet. Hierzu sei $\varepsilon > 0$, $A \in L^\infty(\Omega)^{n \times n}$ und A^ε definiert via

$$A^\varepsilon(x) := A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Die Einträge bezeichnen wir mit $A^\varepsilon(x) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1 \leq i, j \leq n}$. Wir fordern, dass $A^\varepsilon(x)$ für jedes feste $\varepsilon > 0$ die Bedingungen (5.1) erfüllt. Nun können wir das Problem mit Dirichlet-Randbedingungen aufstellen. Es hat die Form

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{in } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

Die zugehörige schwache Formulierung lautet:

$$\begin{cases} \text{Zu } f \in H^{-1}(\Omega) \text{ finde } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \text{ sodass} \\ a(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (5.12)$$

wobei

$$a(u_\varepsilon, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} (A \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla v dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Nach Satz 5.1 existiert für jedes feste ε eine eindeutige Lösung $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, die der schwachen Formulierung (5.12) genügt. Mit der Abschätzung (5.6) erhalten wir die Beschränktheit von (u^ε) , da

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad (5.13)$$

gilt. Nach Satz 2.1 existiert eine Teilfolge $(u^{\varepsilon'})$ von (u^ε) und eine Funktion $u^0 \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$u^{\varepsilon'} \rightharpoonup u^0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega) \quad (5.14)$$

gilt. A priori hängt u^0 von der speziellen Teilfolge $(u^{\varepsilon'})$ ab. An dieser Stelle können wir uns zwei Fragen stellen. Erstens, gibt es ein Randwertproblem, dessen Lösung genau der postulierte Grenzwert u^0 ist? Und zweitens, wenn das so ist, hängt dann der Grenzwert u^0 von der Wahl der Teilfolge $(u^{\varepsilon'})$ ab?

Wir suchen im Folgenden Antworten auf diese beiden Fragen. Dafür führen wir den Vektor $\xi^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ ein. Wir definieren

$$\xi^\varepsilon = (\xi_1^\varepsilon, \dots, \xi_n^\varepsilon) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) = A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon.$$

Dieser genügt nach (5.12) der Gleichung

$$\int_{\Omega} \xi^\varepsilon \cdot \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.15)$$

Mit Hilfe von (5.1) und (5.13) ergibt sich

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \beta \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Nun wenden wir erneut Satz 2.1 an und erhalten eine Teilfolge $(\xi^{\varepsilon'})$ und eine Funktion $\xi^0 \in (L^2(\Omega))^n$, sodass

$$\xi^{\varepsilon'} \rightharpoonup \xi^0 \quad \text{in } (L^2(\Omega))^n \quad (5.16)$$

gilt. Da $\nabla v \in (L^2(\Omega))^n$ können wir auf der linken Seite von (5.15) zum Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ übergehen (mit $\xi^{\varepsilon'}$ anstelle von ξ^ε) und erhalten

$$\int_{\Omega} \xi^0 \cdot \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Das ist genau die schwache Formulierung aus (5.12) und es gilt

$$-\operatorname{div} \xi^0 = f \quad \text{in } \Omega. \quad (5.17)$$

Damit ist der Homogenisierungsprozess abgeschlossen, denn wir haben gezeigt, dass der schwache Grenzwert ξ^0 das Differentialgleichungsproblem löst. Somit wäre die erste der beiden Fragen positiv beantwortet, wenn wir den Vektor ξ^0 durch den Grenzwert u^0 ausdrücken könnten. Hierfür betrachten wir folgenden Spezialfall.

Wir nehmen an, (A^ε) konvergiere gegen \hat{A} in $(L^\infty(\Omega))^{n \times n}$. Dann ist es möglich, einen expliziten Zusammenhang zwischen u^0 und ξ^0 herzustellen. Wir bezeichnen mit ${}^t B$ die transponierte Matrix einer beliebigen Matrix B und mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(L^2(\Omega))^n, (L^2(\Omega))^n}$ das Skalarprodukt in $(L^2(\Omega))^n$. Dann folgt aus Satz 2.2 und (5.14) für $\varphi \in (L^2(\Omega))^n$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\varepsilon'} \nabla u^{\varepsilon'} \varphi dx \\ &= \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \langle A^{\varepsilon'} \nabla u^{\varepsilon'}, \varphi \rangle_{(L^2(\Omega))^n, (L^2(\Omega))^n} \\ &= \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \langle \nabla u^{\varepsilon'}, {}^t A^{\varepsilon'} \varphi \rangle_{(L^2(\Omega))^n, (L^2(\Omega))^n} \\ &= \langle \nabla u^0, {}^t \hat{A} \varphi \rangle_{(L^2(\Omega))^n, (L^2(\Omega))^n} \\ &= \langle \hat{A} \nabla u^0, \varphi \rangle_{(L^2(\Omega))^n, (L^2(\Omega))^n} \\ &= \int_{\Omega} \hat{A} \nabla u^0 \varphi dx. \end{aligned}$$

Das ist die schwache Konvergenz von $\xi^{\varepsilon'} = A^{\varepsilon'} \nabla u^{\varepsilon'}$ gegen $\hat{A} \nabla u^0$. Mit (5.16) und der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes folgt

$$\xi^0 = \hat{A} \nabla u^0.$$

Somit ist eine explizite Beziehung zwischen u^0 und ξ^0 gefunden und die erste Frage in diesem speziellen Fall positiv beantwortet. Nach (5.17) ist u^0 die schwache Lösung von

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\hat{A} \nabla u^0) = f & \text{in } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Da \hat{A} als starker Grenzwert von (A^ε) wieder die Bedingungen (5.1) erfüllt, ist der Satz 5.1 anwendbar. Somit ist u^0 die einzige Lösung und nach Satz 2.1 konvergiert die gesamte Folge (u^ε) gegen u^0 . Damit ist auch die zweite Frage für diesen speziellen Fall beantwortet.

Leider ist die starke Konvergenz von (A^ε) gegen A im Allgemeinen nicht gegeben, sodass wir bei der Beantwortung der beiden Fragen noch nicht wesentlich weiter sind. Da allerdings der Raum $(L^1(\Omega))^{n \times n}$ separabel ist und die Folge (A^ε) nach (5.1) und der Beschränktheit von Ω in $(L^\infty(\Omega))^{n \times n}$ beschränkt ist, liefert uns Satz 2.3 eine schwach* konvergente Teilfolge in $(L^\infty(\Omega))^{n \times n}$ mit Grenzwert \tilde{A} .

Andererseits wird in [CD99, Kapitel 13] gezeigt, dass für jede Folge (A^ε) , die (5.1) für jedes feste ε genügt, eine Matrix A^0 existiert (die von der Teilfolge (ε') abhängt), sodass $\xi^0 = A^0 \nabla u^0$ gilt. Die Funktion u^0 ist dabei die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{in } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.18)$$

Allerdings ist im Allgemeinen A^0 verschieden von \tilde{A} . Außerdem ist A^0 nicht eindeutig und es lässt sich nicht zeigen, dass die gesamte Folge (u^ε) gegen u^0 konvergiert. Sind die Koeffizientenfunktionen der Matrizen A^ε periodisch, so lässt sich zeigen, dass A^0 und somit auch u^0 unabhängig von der Teilfolge (ε') ist. Genauere Ausführungen finden wir hierzu in [BLP78, Chapter 1, Abschnitt 9]. Damit ist u^0 im periodischen Fall eindeutig und aus Satz 2.1 folgt, dass die gesamte Folge (u^ε) gegen u^0 konvergiert. In diesem Fall sind beide Fragen positiv beantwortet und wir nennen (5.18) das homogenisierte Problem, A^0 die homogenisierte Matrix und u^0 die homogenisierte Lösung. An dieser Stelle möchten wir den Leser auf die genannte Literatur verweisen und uns der Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz zuwenden.

5.3 Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz auf das Homogenisierungsproblem

In diesem Abschnitt beweisen wir einen wichtigen Satz aus der Homogenisierungstheorie mit Hilfe der von uns eingeführten Zwei-Skalen-Konvergenz. Dabei stellt unser Beweis nur eine von verschiedenen Möglichkeiten dar. Schon 1978 lieferte Tartar in [Tar78] einen Beweis über die Methode der oszillierenden Testfunktionen (siehe auch [CD99, Kapitel 8]). Da diese Aussage aber in mehreren Quellen über die Zwei-Skalen-Konvergenz (siehe [CD99, Abschnitt 9.3], [All92, Theorem 2.3] und [LNW02, Theorem 21]) als wichtige Anwendung der Zwei-Skalen-Konvergenz beschrieben wird, werden wir das Resultat hier beweisen. Hierfür untersuchen wir den Grenzprozess für $\varepsilon \rightarrow 0$ von folgendem Problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.19)$$

Dabei ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet im \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $A = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n} \in L^\infty(\Omega)^{n \times n}$ eine Y -periodische Matrix, die die Bedingungen (5.1) erfüllt. Dann definieren wir die ebenso Y -periodischen Matrizen $A^\varepsilon(x)$ vermöge

$$A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten die schwache Formulierung von (5.19). Für $f \in H^{-1}(\Omega)$ suchen wir $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon(x)) \cdot \nabla w(x) dx = \int_{\Omega} f(x) w(x) dx \quad \text{für alle } w \in H_0^1(\Omega). \quad (5.20)$$

Nun können wir den zentralen Satz dieses Abschnittes formulieren.

Satz 5.2

Die Folge der Lösungen (u^ε) von (5.20) konvergiert schwach gegen u in $H_0^1(\Omega)$ und die Folge (∇u^ε) konvergiert im Zwei-Skalen-Sinne gegen $\nabla u + \nabla_y u_1$, wobei $(u, u_1) = (u(x), u_1(x, y)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$ die eindeutige Lösung des homogenisierten Problems

$$\int_{\Omega} \int_Y (A(y)(\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y))) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)) dy dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx,$$

für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$ und $v_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$ ist.

Für den Beweis werden wir eine Greensche Formel benötigen. Wir verwenden die Formulierung aus [CD99, Theorem 3.33].

Satz 5.3

Es sei Ω ein Lipschitzgebiet im \mathbb{R}^n und $u, v \in H^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u) \gamma(v) \eta_i ds$$

für $1 \leq i \leq n$. Mit $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ bezeichnen wir den äußeren Normalvektor und mit $\gamma(u)$ die Spur von u bezüglich Ω . Also gilt $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$.

Beweis. Die Beweisidee finden wir im [Heu81, Seite 524]. □

Beweis von Satz 5.2. Wir argumentieren zunächst wie bei (5.11)-(5.14) und erhalten eine Teilfolge, die wie jetzt mit (u^ε) bezeichnen, sodass

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{in } H_0^1(\Omega).$$

Mit Satz 4.19 folgt die Existenz einer weiteren Teilfolge, die wir wieder mit (u^ε) bezeichnen, und einer Funktion $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$, sodass

$$\begin{cases} u^\varepsilon \xrightarrow{2} u, \\ \nabla u^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u + \nabla_y u_1 \end{cases}$$

gilt. Wir wollen die schwache Formulierung aus (5.20) mit der Lösung selbst testen. Daher definieren wir $w^\varepsilon(x) = v(x) + \varepsilon v_1(x, x/\varepsilon)$ mit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $v_1 \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$, setzen w^ε in (5.20) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon(x)) \cdot \left(\nabla v(x) + \nabla_y v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx + \varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon(x)) \cdot \nabla_x v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) \left(v(x) + \varepsilon v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Um die Zwei-Skalen-Konvergenz von ∇u^ε anwenden zu können, dürfen $A^\varepsilon(x)$ und $\nabla u^\varepsilon(x)$ nicht mehr über die Matrix-Vektor-Multiplikation verknüpft sein. Daher transponieren wir die Matrix $A^\varepsilon(x)$ auf die andere Seite des Skalarproduktes und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \left[{}^t A^\varepsilon(x) \left(\nabla v(x) + \nabla_y v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right] dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \left[{}^t A^\varepsilon(x) \nabla_x v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) \left(v(x) + \varepsilon v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Nun können wir zum Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ übergehen. Wir wollen die Zwei-Skalen-Konvergenz von ∇u^ε anwenden. Daher identifizieren wir $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit einer Funktion $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ indem wir $\tilde{v}(x, y) = v(x)$ setzen. Damit ist $\tilde{v}(x, \cdot)$ eine konstante und somit periodische Funktion in $C_{\#}^\infty(Y)$. Da ${}^t A^\varepsilon$ genau wie A^ε eine periodische Funktion aus $L^\infty(\Omega)^{n \times n}$ ist, können wir hier genauso wie bei $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ vorgehen. Somit ist $[{}^t A^\varepsilon(x) (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))]$ eine möglich Testfunktion und wir können nach der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz 4.8 auf der linken Seite zum Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ übergehen. Die Konvergenz der rechten Seite folgt nach Lemma 4.9. Es gilt

$$\int_{\Omega} \int_Y [\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)] \cdot [{}^t A(y) (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y))] dy dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Wir transponieren die Matrix $A(y)$ wieder zurück auf die andere Seite und erhalten

$$\int_{\Omega} \int_Y (A(y) [\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)]) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)) dy dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (5.21)$$

Da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ und auch dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, liegt der Raum $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ dicht in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$ und die Gleichung (5.21) gilt somit auch für $(u, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$.

Damit haben wir das gewünschte Resultat für Teilfolgen bereits gezeigt. Unsere Aufgabe ist es, die Eindeutigkeit von $(u, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$ zu zeigen, denn in diesem Fall würden die gesamten Folgen gegen die beiden Grenzwerte konvergieren und wir wären fertig. Denn angenommen, die Eindeutigkeit von (u, u_1) sei gegeben, aber nicht die gesamten Folgen würden konvergieren. Dann könnten wir eine Teilfolge auswählen, die keine Folgenglieder in einer kleinen Umgebung von u beziehungsweise u_1 besitzt. Auf diese Teilfolge können wir die gleichen Argumente wie oben anwenden und würden wiederum eine Teilfolge erhalten, die konvergiert. Das wäre ein Widerspruch.

Um die Eindeutigkeit der Lösung (u, u_1) zu zeigen, wenden wir das Lemma von Lax-Milgram an. Hierzu definieren wir den Raum $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$, der als Produkt zweier Hilberträume ein Hilbertraum ist. Für $U = (u, u_1) \in \mathcal{H}$ definieren wir die Norm auf \mathcal{H} via

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)}^2 + \|\nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2.$$

Weiter definieren wir die Bilinearform $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe von $U = (u, u_1)$ und $V = (v, v_1)$ vermöge

$$b(U, V) = \int_{\Omega} \int_Y (A(y) [\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)]) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)) dy dx.$$

Die Bilinearität von b folgt sofort aus der Bilinearität des Skalarproduktes und der Linearität des Integrals. Als Nächstes definieren wir das Funktional $\tilde{f} \in \mathcal{H}^*$ via

$$\langle \tilde{f}, V \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Somit lautet die schwache Formulierung des homogenisierten Problems (5.21) wie folgt:

$$\begin{cases} \text{Zu } \tilde{f} \in \mathcal{H}^* \text{ finde } U \in \mathcal{H}, \text{ sodass} \\ b(U, V) = \langle \tilde{f}, V \rangle \quad \text{für alle } V \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

Das Lemma von Lax-Milgram garantiert die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung U , wenn b bilinear, beschränkt und stark positiv ist. Die Beschränktheit folgt aus den Bedingungen (5.1) an A und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Es gilt

$$\begin{aligned} |b(U, V)| &= \left| \int_{\Omega} \int_Y (A(y)[\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)]) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)) dy dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \int_Y |A(y)[\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)]| |\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)| dy dx \\ &\leq \beta \int_{\Omega} \int_Y |\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)| |\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)| dy dx \\ &\leq \beta \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)|^2 dy dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)|^2 dy dx \right)^{1/2} \\ &\leq \beta \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla u(x)|^2 dy dx + \int_{\Omega} \int_Y |\nabla_y u_1(x, y)|^2 dy dx \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla v(x)|^2 dy dx + \int_{\Omega} \int_Y |\nabla_y v_1(x, y)|^2 dy dx \right)^{1/2} \\ &= \beta \|U\|_{\mathcal{H}} \|V\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Damit ist die Beschränktheit gezeigt. Für die starke Positivität verwenden wir erneut die Bedingungen (5.1), sodass

$$\begin{aligned} b(U, U) &= \int_{\Omega} \int_Y (A(y)[\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)]) \cdot (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dy dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \int_Y |\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)|^2 dy dx \\ &= \alpha \left(\int_{\Omega} \int_Y |\nabla u(x)|^2 dy dx + \int_{\Omega} \int_Y |\nabla_y u_1(x, y)|^2 dy dx \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{\Omega} \int_Y (\nabla u(x), \nabla_y u_1(x, y)) dy dx \right) \end{aligned}$$

folgt. Wir wenden auf den dritten Term einmal die Greensche Formel (siehe Satz 5.3) an und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_Y \nabla u(x) \cdot \nabla_y u_1(x, y) dy dx \\ &= - \int_{\Omega} \int_Y \nabla_y (\nabla u(x) u_1(x, y)) dy dx + \int_{\Omega} \left(\int_{\partial Y} u_1(x, y) \nabla u(x) \cdot \eta(y) ds_y \right) dx \\ &= - \underbrace{\int_{\Omega} \int_Y \nabla u(x) \cdot \nabla_y u_1(x, y) dy dx}_{=0} + \underbrace{\int_{\Omega} \left(\int_{\partial Y} u_1(x, y) \nabla u(x) \cdot \eta(y) ds_y \right) dx}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Y -Periodizität von $u_1(x, \cdot)$ für jedes $x \in \Omega$, wird der erste Term Null, weil wir im Integral alle Ableitungen einer ganzen Periode aufsummieren und $\nabla u(x)$ nicht von y abhängt. Der zweite Term ist ebenso gleich Null, da die Y -periodische Funktion $u_1(x, \cdot)$ an gegenüberliegenden Seiten von Y die gleichen Funktionswerte besitzt, aber der äußere Normalenvektor $\eta(y)$ in entgegengesetzte Richtungen weist. Somit folgt

$$b(U, U) \geq \alpha \|U\|_{\mathcal{H}}^2$$

und daher die starke Positivität. Damit ist das Lemma von Lax-Milgram anwendbar und wir erhalten die Eindeutigkeit von $(u, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$. Nach obiger Argumentation konvergiert die gesamte Folge (u_ε) schwach gegen u und die gesamte Folge (∇u^ε) im Zwei-Skalen-Sinne gegen $\nabla u + \nabla_y u_1$. Das ist die Behauptung. □

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Zum Ende dieser Arbeit werden wir die wichtigsten Aussagen zur Zwei-Skalen-Konvergenz wiederholen und auf die Zusammenhänge zum Homogenisierungsprozess eingehen. Wir wollen damit einen Überblick über die große Anzahl von Aussagen geben, die in dieser Arbeit bewiesen wurden.

Nach einiger Vorarbeit gelangten wir zur Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz (4.8) für Testfunktionen $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$. Die Eindeutigkeit des Grenzwertes zu zeigen, war ohne größere Hilfestellungen möglich. Als Nächstes untersuchten wir, inwieweit eine Abschwächung der Voraussetzungen an ψ möglich ist. Es zeigte sich in Beispiel 4.10, dass die Minimalanforderung $\psi \in L^{\infty}(\Omega \times Y)$ nicht ausreicht. Wie bewiesen den Kompaktheitssatz 4.11 und erhielten für jede beschränkte Folge in $L^2(\Omega)$ eine im Zwei-Skalen-Sinne konvergierende Teilfolge. Danach stellten wir eine Verbindung zwischen der starken Konvergenz in $L^2(\Omega)$ und der Zwei-Skalen-Konvergenz her, da aus starker Konvergenz die Zwei-Skalen-Konvergenz folgt (Satz 4.12). Auch ein Zusammenhang zur schwachen Konvergenz in $L^2(\Omega)$ ließ sich zeigen, da diese eine Implikation aus der Zwei-Skalen-Konvergenz ist (Satz 4.13). Dabei konnten wir das Zwei-Skalen-Konzept zwischen der starken und der schwachen Konvergenz einordnen. Anschließend widmeten wir uns erneut den Testfunktionen und stellten fest, dass wir für beschränkte Folgen auch den Raum $\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ als Testraum verwenden können (Satz 4.15).

Im Abschnitt 4.3 beschäftigten wir uns mit den Vorteilen, die uns das Konzept der Zwei-Skalen-Konvergenz einbrachte. Zunächst bemerkten wir, dass im Zwei-Skalen-Grenzwert mehr Informationen über die Folge erhalten bleiben als im schwachen Grenzwert (Satz 4.16). Mit gewissen Zusatzvoraussetzungen konnten wir die schwache Konvergenz des Produktes von zwei im Zwei-Skalen-Sinne konvergierenden Folgen zeigen und erhielten gleichzeitig eine Art starke Konvergenz (Satz 4.17). Eine Regularitätsaussage konnten wir mit Hilfe von Satz 4.18 treffen. Es zeigte sich, dass jede Funktion aus $L^2(\Omega \times Y)$ der Zwei-Skalen-Grenzwert einer Folge von Funktionen aus $L^2(\Omega)$ ist und damit Zwei-Skalen-Grenzwerte keine zusätzliche Regularität aufweisen. Satz 4.19 führte uns in Richtung des Homogenisierungsprozesses. Wir erhielten für schwache konvergente Folgen (u_{ε}) in $L^2(\Omega)$ die Zwei-Skalen-Konvergenz von (u_{ε}) und $(\nabla u_{\varepsilon'})$.

In Kapitel 5 wandten wir uns dem Homogenisierungsprozess zu. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 5.1 vollzogen wir an einem Beispiel den Homogenisierungsprozess am linearen elliptischen Problem zweiter Ordnung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen mit Hilfe gewisser Zusatzvoraussetzungen, um eine Vorstellung von der Thematik zu erlangen. Abschließend konnten wir in Satz 5.2 den Homogenisierungsprozess vollführen und dabei die Zwei-Skalen-Konvergenz geschickt zum Einsatz bringen.

Als letzten Teil dieser Arbeit möchte ich meine Erfahrung im Umgang mit meinen wichtigsten Quellen weitergeben, um dem interessierten Leser einen schnelleren Einstieg in die Literaturvielfalt zu geben.

Ich beschäftigte mich ausführlich mit dem Artikel von Allaire [All92] aus dem Jahr 1992, in dem der Begriff „Zwei-Skalen-Konvergenz“ eingeführt wurde. Im Großen und Ganzen ist das Paper recht verständlich geschrieben und gibt einen guten Überblick über alle Resultate und die zugehörigen Beweisideen. Allerdings gibt es einige Ungenauigkeiten. Insbesondere wird in der Notation nicht zwischen der Funktion $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ und $\psi(x, y) \in \mathbb{R}$ unterschieden, sodass wir hier vorsichtig sein sollten. Außerdem ist die Herangehensweise eine andere, denn die Zwei-Skalen-Konvergenz wird für Testfunktionen aus $\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ eingeführt und erst später wird der Testraum abgeschwächt. Die Beweise sind meistens auf das Nötigste beschränkt. Bei unseren Resultaten Satz 4.18 und Satz 4.19 werden große Teile des Beweises komplett weggelassen.

Eine zweite wichtige Quelle für mich war das Paper von Lukkassen,Nguetseng und Wall [LNW02]. Es erschien im Jahr 2002 und ist eine gute Überarbeitung der Inhalte von [All92]. Insbesondere wurden die Ungenauigkeiten bei der Unterscheidung zwischen der Funktion ψ und $\psi(x, y)$ entfernt und die Zwei-Skalen-Konvergenz für $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ eingeführt. Weiterhin finden wir hier einige funktionalanalytische Grundlagen aufgearbeitet, die das Verständnis erhöhen. Allerdings werden viele verschiedene Räume für die Testfunktionen eingeführt, die zumindest für eine erste Einführung in die Thematik nicht alle notwendig sind. Die Beweise sind in der Regel vollständig ausgeführt, nur an einigen wenigen Stellen gibt es Verkürzungen. Insgesamt ist hervorzuheben, dass Unterschiede zu anderen Literaturquellen offen angesprochen werden. Dazu zählt zum Beispiel der Unterschied beim Raum der Testfunktionen in der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz. Das gibt dem Leser einen guten Überblick über die verschiedenen Herangehensweisen.

Meine dritte wichtige Quelle war die Monografie von Cioranescu und Donato [CD99]. Ich war oft sehr angetan von der Ausführlichkeit der Darstellung. Insbesondere finden wir hier eine breite funktionalanalytische Einführung. Aber auch die einzelnen Beweise sind fast immer detailliert dargelegt. Da die Monografie eine Einführung in die Homogenisierungstheorie darstellt und kein Artikel über die Zwei-Skalen-Konvergenz ist, eröffnet sich uns als Leser ein anderer Blickwinkel auf die Zwei-Skalen-Konvergenz als in den beiden vorherigen Quellen. Wir erkennen das Zwei-Skalen-Konzept mehr als Teil eines Werkzeugkastens für Homogenisierungsprobleme, da zum Beispiel für Satz 5.2 auch andere Möglichkeiten des Beweises aufgezeigt werden. Auf der anderen Seite sind nur wenige Resultate zur Zwei-Skalen-Konvergenz aufgeführt, sodass wir an dieser Stelle wieder auf die oben genannte

Literatur zurückgreifen müssen. Insgesamt ist die Monografie eine sehr gutes Werk, wenn der Leser eine Einführung in die Homogenisierungstheorie sucht.

Literaturverzeichnis

- [All92] Grégoire Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal., 23(6): 1482-1518, 1992.
- [Alt80] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokio, 1985.
- [AV05] Jürgen Appell und Martin Väh, *Elemente der Funktionalanalysis*, Vieweg, Wiesbaden, 2005.
- [ABM06] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo und Gérard Michaille, *Variational analysis in sobolev and BV spaces*, MPS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia, 2006.
- [BLP78] Alain Bensoussan, Pierre-Louis Lions und George Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford, 1978.
- [Bre11] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.
- [CD99] Doina Cioranescu und Patrizia Donato, *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, New York, 1999.
- [Emm04] Etienne Emmrich, *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*, Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [Fre11] Emmanuel Frénod, *Two-Scale Convergence*, 2011, <http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs11/doc/TscEFCemracs.pdf>, abgerufen am 22.10.2013 um 11.20 Uhr.
- [Heu81] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 2*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [LNW02] Dag Lukkassen, Gabriel Nguetseng und Peter Wall, *Two-scale convergence*, Int. J. of Pure and Appl. Math., 2(1), 35-86, 2002.
- [Mik78] Jan Mikusinski, *The Bochner Integral*, Birkhäuser, Basel, 1978.
- [Ngu89] Gabriel Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM Math. Anal., 20(3), 608-629, 1989.
- [Rud95] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, 1975.

- [Tar78] Luc Tartar, *Quelques remarques sur l'homogénéisation*, Functional Analysis and Numerical Analysis, 468-482, 1978.
- [Tem79] Roger Temam, *Navier-stokes equations*, Studies in Mathematics and its Applications, North Holland Publishing Company, 1979.
- [Hom] *Homogenisierungstheorie*,
<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lisi/schweizer/Skripte/pde-homogen.pdf>, abgerufen am 23.10.2013 um 11.45 Uhr.
- [Bild1] http://www.hib-wien.at/leute/wurban/informatik/POV/supershapes/pics/2/3_SphericalHarmonics_s2dots3rect.jpg,
abgerufen am 30.10.13 um 10.00 Uhr.