Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik

Bachelorarbeit
im Studiengang Mathematik

Das div-curl-Lemma und kompensierte Kompaktheit

Martin Plonka (337266)

betreut von Dr. Hans-Christian Kreusler

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung dieser Arbeit versichert an Eides statt:

Berlin, den

Martin Plonka

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Grundlagen 2
1.2 Schwache Konvergenz und Nichtlinearität 8

2 Das div-curl-Lemma **11**
2.1 Fourier-Transformation 11
2.2 Das klassische div-curl-Lemma 17

3 Kompensierte Kompaktheit **23**
3.1 Notwendige Kriterien 23
3.2 Hinreichende Kriterien 29
3.3 Zusammenfassung 35

4 Ausblick **37**

A Anhang **38**
A.1 Schwache Konvergenz 38
A.2 Funktionenräume 39

Literaturverzeichnis **41**

1 Einführung

In der modernen Physik werden viele Probleme mit Hilfe von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen modelliert. Bei der mathematischen Behandlung solcher Problemstellungen betrachtet man häufig eine Folge von Ersatzproblemen mit zugehörigen Lösungen. Mit Hilfe von a-priori Abschätzungen erhält man eine schwach konvergente Teilfolge der Lösungen. Die zentrale Frage ist nun, ob der schwache Grenzwert der Teilfolge eine Lösung des Grenzproblems ist. Diese Frage kann unter Umständen mit klassischen Monotonie-, Konvexitäts- oder Kompaktheitsargumenten positiv beantwortet werden. Allgemein werden dabei im nichtlinearen Fall mehr Abschätzungen benötigt als im linearen Fall.
In dieser Bachelorarbeit wird die in den siebziger Jahren entstandene Theorie der kompensierten Kompaktheit vorgestellt. Diese liefert unter anderem alternative Kriterien für die Verträglichkeit von schwacher Konvergenz und Nichtlinearität. Die Resultate, die hier präsentiert werden, nutzen gegebene Informationen über partielle Ableitungen der Funktionenfolgen aus, um die Nichtlinearität gerade soweit einzuschränken, dass die mangelnde Kompaktheit kompensiert wird.
Der Hauptaspekt dieser Arbeit liegt auf dem historisch ersten Resultat, dem klassischen div-curl-Lemma (Satz 2.10), und dem Hauptsatz (Satz 3.6) der kompensierten Kompaktheit. Diese liefern hinreichende Kriterien für die Verträglichkeit des euklidischen Skalarproduktes und allgemeiner quadratischer Formen mit bestimmten schwach konvergenten Funktionenfolgen. Die Kernidee der kompensierten Kompaktheit ist, dass die relevanten Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen eventuell mehr Struktur besitzen, die man verwenden kann. Mit dieser zusätzlichen Struktur erhält man eine gewisse Kontrolle, sodass man die Nichtlinearität nur noch in unkontrollierbare Richtungen einschränken muss. Die Hauptaussagen samt Beweisskizzen und die Beispiele sind in [Tar79] und [Tar09, Kap. 9,17] zu finden.
Im ersten Kapitel werden für den Verlauf dieser Arbeit wichtige Begriffe und Ergebnisse der Analysis und Funktionalanalysis eingeführt. Außerdem wird die Problemstellung anhand von zwei Beispielen illustriert. Das Ziel des zweiten Kapitels ist es, das klassische div-curl-Lemma zu beweisen. Hierzu werden die Fourier-Transformation als Hauptwerkzeug dieser Arbeit und einige ihrer Eigenschaften vorgestellt. Im dritten Kapitel werden weitere Aussagen der kompensierten Kompaktheit bewiesen. In dem Abschnitt 3.3 werden diese neuen Resultate der kompensierten Kompaktheit mit klassischen Konvexitäts- und Kompaktheitsargumenten verglichen. Abschließend wird ein Überblick über die Möglichkeiten und Weiterentwicklungen der Theorie der kompensierten Kompaktheit gegeben.

1.1 Grundlagen

Die Theorie der kompensierten Kompaktheit beschäftigt sich mit schwach konvergenten Folgen von Funktionen und deren Ableitungen. Deshalb werden in diesem Abschnitt zunächst einige relevante Definitionen und Sätze aus der Analysis und Funktionalanalysis präsentiert. Insbesondere werden zwei verallgemeinerte Ableitungsbegriffe und spezielle Konvergenzbegriffe vorgestellt. In dieser Arbeit werden weitere Resultate verwendet, die nicht Teil dieser kurzen Einführung sein sollen. Diese sind im Anhang aufgeführt. Bei Verwendung wird auf die entsprechende Stelle des Anhangs verwiesen.

Definition 1.1: Schwache und Schwach$*$ Konvergenz
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $(X', \|\cdot\|_{X'})$ bezeichne den topologischen Dualraum von X.

*(a) Eine Folge $(x^n)_n \subset X$ heißt **schwach konvergent** gegen $x \in X$ (symbolisch: $x^n \rightharpoonup x$), falls $f(x^n) = \langle f, x^n \rangle_{X',X} \xrightarrow{n\to\infty} \langle f, x \rangle_{X',X} = f(x)$ für alle $f \in X'$ gilt.*

*(b) Eine Folge $(f^n)_n \subset X'$ heißt **schwach$*$ konvergent** gegen $f \in X'$ (symbolisch: $f^n \overset{*}{\rightharpoonup} f$), falls $f^n(x) = \langle f^n, x \rangle_{X',X} \xrightarrow{n\to\infty} \langle f, x \rangle_{X',X} = f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.*

Bemerkung:

- In dieser Arbeit wird im Allgemeinen symbolisch nicht zwischen der Menge X und dem normierten Vektorraum X $(= (X, \|\cdot\|_X))$ unterschieden. Es sollte aus dem Kontext stets deutlich werden, ob die Menge oder der Raum gemeint ist.
- Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$ wird auch duale Paarung genannt. In der Literatur wird der Dualraum von X auch mit X^* bezeichnet.
- Schwache und schwach$*$ Grenzwerte sind eindeutig (Satz A.1).
- Man kann die Begriffe schwache und schwach$*$ Konvergenz auch von einem topologischen Standpunkt aus definieren. Für die entsprechenden Definitionen von schwacher und schwach$*$ Konvergenz und deren Äquivalenz zu Definition 1.1 sei an dieser Stelle bei Interesse auf [Bre11, Kap. 3] verwiesen.

Im Folgenden werden meist separable und reflexive Banach- oder gar Hilbert-Räume (siehe Definition A.2) betrachtet. Für eine Folge $(f^n)_n$ aus dem Dualraum X' eines reflexiven Raumes X gilt

$$f^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

für alle $x \in X$ genau dann, wenn für alle $\varphi \in (X')'$ gilt:

$$\varphi(f^n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(f) \ .$$

Außerdem ist ein Raum X genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum X' reflexiv ist. Deshalb wird nun nur noch in Räumen, die nicht reflexiv sind, explizit zwischen schwacher und schwach$*$ Konvergenz unterschieden.
Im Verlauf dieser Arbeit sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, stets nichtleer und offen und wie üblich mit dem Lebesgue-Maß versehen. Das Maß einer messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ wird mit $\operatorname{meas}(A)$ bezeichnet. Der Raum $C_c(\Omega; \mathbb{C})$ der stetigen, möglicherweise komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω und der Raum $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω werden als bekannt vorausgesetzt. Für $\varphi \in C_c(\Omega; \mathbb{C})$ wird der Träger mit $\operatorname{supp}(\varphi)$ bezeichnet.
Die Aussagen der kompensierten Kompaktheit betreffen meist Funktionenfolgen aus den sogenannten L^p-Räumen.

Definition 1.2: L^p−Räume
Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ der normierte Vektorraum der Äquivalenzklassen fast überall identischer Lebesgue-messbarer Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit endlicher Norm

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \;\; \text{und} \;\; \|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f| \quad \text{für } p = \infty\ .$$

Diese Räume sind, abhängig von p, separable, reflexive Banach-Räume (Satz A.11). Eine umfassende Einführung in die L^p−Räume, welche auch, wie hier benötigt, komplexwertige Funktionen zulässt, findet sich in [AF03, Kap. 2]. An dieser Stelle soll noch explizit ein Resultat aus der Theorie der L^p−Räume angegeben und erweitert werden, welches in mehreren Beweisen dieser Arbeit verwendet wird.

Satz 1.3: Satz von Lebesgue zur dominierten Konvergenz in L^p
Es sei $p \geq 1$ und $(f^n)_n \subset L^p(\Omega;\mathbb{R})$. Die Folge $(f^n)_n$ erfülle die folgenden Voraussetzungen.

(a) Die Folge $(f^n)_n$ konvergiert fast überall punktweise gegen ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(b) Es gibt eine Funktion $h \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ mit $|f^n(x)| \leq h(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für fast alle $x \in \Omega$.

Dann gilt $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ und $\|f^n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis. Diese Aussage wird bewiesen in [For11, S.132]. □

Bemerkung:

- Das Symbol i bezeichnet die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$.
- Der Satz von Lebesgue lässt sich auf komplexwertige Funktionen verallgemeinern, denn es gilt für $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$ mit $f = u + iv$ die Abschätzung

$$\max\{\|u\|_{L^p}, \|v\|_{L^p}\} \leq \|f\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}\ . \tag{1.1}$$

Somit ist $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$ genau dann, wenn $u, v \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ sind. Es sei nun eine Folge $(f^n)_n \subset L^p(\Omega;\mathbb{C})$ mit $f^n = u^n + iv^n$ und $u^n, v^n \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Folge $(f^n)_n$ konvergiere punktweise gegen ein $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ und $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann konvergieren auch die Folgen $(u^n)_n$ und $(v^n)_n$ punktweise gegen u und v. Es gebe eine Funktion $h \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ mit $|f^n(x)| \leq h(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann erfüllen $(u^n)_n$ und $(v^n)_n$ mit (1.1) die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue. Somit gilt $u, v \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$ und folglich $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$. Weiterhin folgt mit der Konvergenz von $(u^n)_n$ und $(v^n)_n$ und der Abschätzung (1.1)

$$\|f^n - f\|_{L^p} \leq \|u^n - u\|_{L^p} + \|v^n - v\|_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0\ .$$

Nun sollen Beziehungen zwischen verschiedenen L^p−Räumen erläutert werden. Zu diesem Zweck ist es für $1 \leq p < \infty$ sinnvoll, den zu p konjugierten Exponenten p' zu definieren

$$p' := \begin{cases} \infty & \text{falls } p = 1 \\ \dfrac{p}{p-1} & \text{sonst} \end{cases}\ .$$

Die nachfolgende Version des Rieszschen Darstellungssatzes bietet eine Möglichkeit, schwache und schwach∗ Konvergenz in L^p−Räumen einfacher zu handhaben.

Satz 1.4: Rieszscher Darstellungssatz in L^p
Es sei $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es für alle $\ell \in (L^p(\Omega;\mathbb{C}))'$ genau ein $g \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{C})$, sodass gilt:

$$\langle \ell, f\rangle_{(L^p)',L^p} = \ell(f) = \int_\Omega f \cdot g\, dx \qquad \text{für alle } f \in L^p(\Omega;\mathbb{C}).$$

Der Dualraum von $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ kann also als normierter Vektorraum isometrisch isomorph mit dem Raum $L^{p'}(\Omega;\mathbb{C})$ identifiziert werden.

Beweis. Der Beweis ist zu finden in [AF03, S.47]. □

Bemerkung:

- Das Symbol $\cdot$ bezeichnet für $M \in \mathbb{N}$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^M$ und $|\cdot|$ die dadurch induzierte Norm

$$\cdot\, :\, \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M \to \mathbb{C} \quad , \quad (u,v) \mapsto u \cdot v := \sum_{i=1}^{M} u_i\, \overline{v_i} \quad , \quad |u| := \left(\sum_{i=1}^{M} |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \; .$$

- Für den Hilbert-Raum $L^2(\Omega;\mathbb{C})$, mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_\Omega f \cdot g\, dx \; ,$$

  stimmt Satz 1.4 auch mit dem Rieszschen Darstellungsatz in Hilbert-Räumen (Satz A.3) überein.

- Analog zu den L^p-Räumen definiert man die $L^p_{\text{loc}}-$Räume, wobei χ_A die charakteristische Funktion einer messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ sei, wie folgt:

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{C}) := \{f\, :\, \Omega \to \mathbb{C} \,|\, \chi_K f \in L^p(\Omega;\mathbb{C}) \text{ für jedes kompakte } K \subset \Omega\} \; .$$

- Der Raum $L^p(\Omega;\mathbb{C}^M)$ ist als der Raum der vektorwertigen Funktionen f, für welche $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_M(x))^T$ und $f_i \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$ für alle $i = 1, \ldots, M$ gilt, zu verstehen. Insbesondere sind Aussagen wie der Satz von Lebesgue (Satz 1.3) stets koordinatenweise zu interpretieren.

Wenn im Folgenden nun eine Folge $(f^n)_n \subset L^p(\Omega;\mathbb{C}^M)$ gegen $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C}^M)$ in $L^p(\Omega;\mathbb{C}^M)$ schwach für $1 \leq p < \infty$ konvergiert, dann bedeutet dies nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz 1.4)

$$\int_\Omega f^n \cdot g\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega f \cdot g\, dx \qquad \text{für alle } g \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^M) \; .$$

Analog konvergiert $(g^n)_n \subset L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^M)$ schwach$*$ in $L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^M)$ gegen $g \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^M)$, falls gilt:

$$\int_\Omega f \cdot g^n\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega f \cdot g\, dx \qquad \text{für alle } f \in L^p(\Omega;\mathbb{C}^M).$$

Weiterhin genügt es für die schwache Konvergenz in L^p für $1 < p < \infty$ und die schwach$*$ Konvergenz in L^∞ die duale Paarung mit Treppenfunktionen oder $C_c^\infty-$Funktionen zu betrachten, da diese für $1 \leq p < \infty$ dicht in L^p liegen (siehe Satz A.11 und Satz A.9).
Die schwache beziehungsweise schwach$*$ Konvergenz von Funktionenfolgen in L^p-Räumen wird eine zentrale Voraussetzung in den zu beweisenden Aussagen der kompensierten Kompaktheit sein. Allerdings lassen insbesondere das div-curl-Lemma und der Hauptsatz der kompensierten Kompaktheit nur Folgerungen zu, die eine andere Art von Konvergenz beinhalten. Diese soll in der folgenden Definition erläutert werden.

Definition 1.5: Der Raum der Radon-Maße
*Ein **Radon-Maß** μ in Ω ist ein lineares Funktional auf $C_c(\Omega;\mathbb{R})$, wobei es für jedes kompakte $K \subset \Omega$ eine Konstante C_K gibt, sodass gilt:*

$$|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq C_K \, \|\varphi\|_\infty \quad \textit{für alle } \varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}) \textit{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K \, .$$

Der Raum der Radon-Maße wird bezeichnet mit $\mathcal{M}(\Omega)$. Eine Folge von Radon-Maßen $(\mu^n)_n \subset \mathcal{M}(\Omega)$ konvergiert $\mathcal{M}(\Omega)-$schwach$*$ gegen $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, falls gilt:

$$\langle \mu^n, \varphi \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle \mu, \varphi \rangle \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}) \, .$$

Bemerkung:

- Diese Definition für Radon-Maße und den Raum $\mathcal{M}(\Omega)$ ist ungewöhnlich, aber für diese Arbeit praktischer, und stammt aus [Tar07, S.18]. Eine maßtheoretische Definition findet sich in [Bau92, S.176], wobei dann eine Version des Rieszschen Darstellungssatzes ([Bau92, §.29]) die Äquivalenz dieser beiden Definitionen zeigt.
- Man kann den Raum $L^1_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R})$ mit einem Unterraum von $\mathcal{M}(\Omega)$ identifizieren, da jedes $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R})$ eine lineares Funktional μ_f auf $C_c(\Omega;\mathbb{R})$ definiert

$$\mu_f(\varphi) := \int_\Omega f \, \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}) \text{ und } C_K := \int_K |f| \, dx < \infty \, .$$

- Nach [AF03, S.28 f.] gelten für beschränktes Ω und alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ die stetigen Einbettungen (Definition A.5)

$$L^q(\Omega;\mathbb{C}) \hookrightarrow L^p(\Omega;\mathbb{C}) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{C}) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{C}).$$

  Die letzten beiden Einbettungen gelten auch für unbeschränktes Ω.

Man möchte in der kompensierten Kompaktheit eine gewisse Kontrolle über einige partielle Ableitungen der Funktionenfolgen ausnutzen. Dabei ist der klassische Ableitungsbegriff nicht ausreichend für L^p-Funktionen. Eine erste Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes liefert die folgende Definition. Es sei $\boldsymbol{\alpha}$ ein Multiindex mit folgenden Konventionen

$$\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N \, , \; |\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^N \alpha_i \, , \; x^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N} \text{ für } x \in \mathbb{R}^N \, , \; \partial^{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \, .$$

Definition 1.6: Schwache partielle Ableitung
*Für einen Multiindex $\boldsymbol{\alpha}$ und eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ heißt $u_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ die $\boldsymbol{\alpha}-$te **schwache partielle Ableitung** von u, falls gilt:*

$$\int_\Omega u_\alpha \cdot \varphi \, dx = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_\Omega u \cdot \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \, .$$

Zur Illustration dieses Ableitungsbegriffes soll die folgende Definition verallgemeinert werden.

Definition 1.7: Divergenz und Rotation
Es sei $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ein einmal stetig (klassisch) differenzierbares Vektorfeld.

*(a) Die **Divergenz** von u ist definiert als*

$$\operatorname{div} u := \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, .$$

(b) Man definiert die ***Rotation*** *von u als die Matrix*

$$\operatorname{curl} u := (\nabla u - (\nabla u)^T) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]_{i,j=1,\ldots,N} .$$

Bemerkung:

- Für eine differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}^M$ bezeichnet das Symbol $\nabla\varphi$ den Gradienten von φ.
- Die $\boldsymbol{\alpha}$−te schwache partielle Ableitung ist im L^1_{loc} Sinne eindeutig. Für $\boldsymbol{\alpha}$−mal klassisch differenzierbare Funktionen stimmen klassische und schwache Ableitung überein ([Zei90, S.232]).

Für eine Funktion $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^N)$ soll nun (im schwachen Sinne) $\operatorname{div} u \in L^p(\Omega; \mathbb{C})$ die Funktion bezeichnen, für die gilt:

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \cdot \varphi \, dx = -\int_\Omega u \cdot \nabla\varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) .$$

Mit Hilfe der schwachen partiellen Ableitung kann man nun die sogenannten Sobolew-Räume definieren. Diese spielen nicht nur bei klassischen Kompaktheitsargumenten, sondern auch in der kompensierten Kompaktheit eine große Rolle.

Definition 1.8: Sobolew-Räume
Für $m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$ und $1 \leq p < \infty$ ist der Sobolew-Raum $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ definiert als der Raum aller Funktionen $v \in L^p(\Omega; \mathbb{C})$, deren schwache partielle Ableitungen $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} v$ für alle Multiindizes $\boldsymbol{\alpha}$ mit $0 \leq |\boldsymbol{\alpha}| \leq m$ auch in $L^p(\Omega; \mathbb{C})$ liegen. Man definiert die Norm

$$\|f\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Der Fall $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$ bezeichnet dabei die Funktion selbst und analog $m = 0$ den entsprechenden L^p−Raum. Weiterhin definiert man für $1 \leq p < \infty$ die Sobolew-Räume $W_0^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ als den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$.

Auch diese Räume sind, abhängig von p, separable und reflexive Banach- oder Hilbert-Räume (Satz A.12).

Bemerkung:

- Der Raum $W^{m,2}(\Omega; \mathbb{C}) =: H^m(\Omega; \mathbb{C})$ ist ein Hilbert-Raum.
- Man kann auch für $p = \infty$ Sobolew-Räume definieren, diese werden hier aber nicht benötigt.
- In der Literatur (z.B. [Dob10]) wird auch die Bezeichnung $H^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ für $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ verwendet.
- Man kann die Räume $W^{m,p}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{C})$ definieren, indem man in der Definition L^p mit L^p_{loc} ersetzt.
- Für $\Omega = \mathbb{R}^N$ gilt $W^{m,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$.
- Eine detaillierte Einführung in Sobolew-Räume und ihre Eigenschaften bietet [AF03].

Um dem Ausdruck $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u$ für eine beliebige L^p-Funktion u eine Interpretation geben zu können, kann man einen noch allgemeineren Ableitungsbegriff einführen.

Definition 1.9: Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$
Den Dualraum von $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, symbolisch dargestellt durch $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}))' =: \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, bezeichnet man als den ***Raum der Distributionen****. Eine Folge $(v^n)_n \subset \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ konvergiert im Sinne von Distributionen gegen $v \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ (symbolisch: $v^n \to v$ in $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$), falls gilt:*

$$v^n(\varphi) \xrightarrow{n\to\infty} v(\varphi) \quad \textit{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \; .$$

Eine Distribution u besitzt die $\boldsymbol{\alpha}-$te distributionelle Ableitung $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u = u_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, falls gilt:

$$u_\alpha(\varphi) = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_\Omega u \cdot \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \; .$$

Bemerkung:

- Die Definition von $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ als Dualraum von $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ ist keineswegs trivial. Eine Einführung in die Theorie der Distributionen bieten [Hör83] und [Dob10, Kap. 9].
- Jedes Radon-Maß induziert eine Distribution. Falls eine Folge im $\mathcal{M}(\Omega)-$schwach$*$ Sinne konvergiert, so konvergiert sie auch im Sinne von Distributionen.
- Bei entsprechender Regularität stimmt die distributionelle mit der schwachen Ableitung überein.

Für jede Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ und jeden Differentialoperator $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}$ lässt sich $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u$ mit einer Distribution identifizieren:

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\varphi) := (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_\Omega u \cdot \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \; .$$

Somit sind div, curl und weitere Differentialoperatoren auf $L^1_{\text{loc}}-$Funktionen stets im Sinne von Distributionen wohldefiniert.
Mit Hilfe von Distributionen kann man nun die Dualräume der Sobolew-Räume $W_0^{m,p}$ charakterisieren.

Satz 1.10: Dualräume von Sobolew-Räumen
Für $m \in \mathbb{N}$ kann der Dualraum $(W_0^{m,p}(\Omega;\mathbb{C}))'$ mit dem Raum $W^{-m,p'}(\Omega;\mathbb{C})$ der Distributionen T identifiziert werden, welche die Form haben:

$$T(u) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} \int_\Omega f_\alpha \cdot \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \, dx \quad \textit{für } f_\alpha \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}) \textit{ und für alle } u \in W_0^{m,p}(\Omega;\mathbb{C}) \; .$$

Beweis. Diese Aussage wird in [AF03, Kap. 3] bewiesen. □

Bemerkung:

- In diesem Sinne kann man zum Beispiel für $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ die Distribution $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ für $j \in \{1,\dots,N\}$ als ein Element des Raumes $H^{-1}_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ auffassen.
- Der Dualraum des Sobolew-Raumes $W^{m,p}(\Omega;\mathbb{C})$ kann für $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ nicht mit einem Teilraum von $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ identifiziert werden. Ein entsprechendes Gegenbeispiel findet sich in [FN09, S.xxvii].

Im Verlauf dieser Arbeit wird an einigen Stellen noch weitere Theorie eingeführt werden müssen. Nun soll aber erst einmal die zentrale Problemstellung motiviert werden.

1.2 Schwache Konvergenz und Nichtlinearität

In diesem Abschnitt soll demonstriert werden, dass Probleme bei der Verknüpfung von schwach konvergenten Folgen mit nichtlinearen Abbildungen auftreten können und wo dies geschieht.

Beispiel 1: Elektrostatik
Zunächst soll das folgende nichtlineare System partieller Differentialgleichungen motiviert werden. Es wird nicht die in der Elektrostatik übliche, sondern eine dieser Arbeit angepasste Notation verwendet.

$$v = -\nabla g \tag{1.2}$$
$$u = \alpha v \tag{1.3}$$
$$\operatorname{div} u = h \tag{1.4}$$
$$u \cdot v = f \tag{1.5}$$

Man befindet sich in einem Volumenelement $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Gegeben ist ein elektrostatisches Potential $g \in H^1(V;\mathbb{R})$, welches ein elektrisches Feld $v \in L^2(V;\mathbb{R}^3)$ erzeugt (1.2). Das Volumenelement V ist mit einem Medium gefüllt, welches die Dielektrizitätskonstante $\alpha > 0$ besitzt. Das effektive elektrische Feld oder auch das elektrische Induktionsfeld $u \in L^2(V;\mathbb{R}^3)$ ist, abhängig vom Medium, proportional zu dem elektrischen Feld (1.3). In der Herleitung der Gleichung (1.4) wurde die Verteilung der Punktladungen durch die Ladungsdichte $h \in L^2(V;\mathbb{R})$ ersetzt. Die elektrostatische Energiedichte $f \in L^1(V;\mathbb{R})$ (1.5) kann man als eine Energieerhaltungsgröße verstehen. Die eindeutige Lösbarkeit des Systems für geeignete gegebene Größen g und h soll hier nicht näher thematisiert werden und sei im Folgenden stets vorausgesetzt.
Dieses System möchte man nun unter einer gewissen Störung beobachten. Die Störung sei gegeben durch eine einmal klassisch differenzierbare periodische Funktion $g_1 \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. Man definiert

$$g^n(x) := g(x) + \frac{1}{n} g_1(nx)$$

und erhält

$$v^n(x) = -\nabla g(x) - \nabla g_1(nx) = -\nabla g^n(x) \; .$$

Dann konvergiert g^n stark in L^2 gegen g, denn es gilt

$$\|g^n - g\|_{L^2}^2 = \int_V \left| \frac{1}{n} g_1(nx) \right|^2 dx \leq \frac{1}{n^2} \operatorname{meas}(V) \|g_1\|_\infty^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \; .$$

Für v^n kann man aufgrund des oszillierenden Verhaltens von $\nabla g_1(nx)$ keine starke Konvergenz erwarten. Es liegt allerdings schwache Konvergenz gegen $-\nabla g =: v$ vor, denn für alle $\varphi \in C_c^\infty(V;\mathbb{R})$ gilt

$$\int_V (\nabla g^n - \nabla g)\, \varphi \, dx = \int_V \nabla g_1(nx)\, \varphi \, dx = -\int_V \frac{1}{n} g_1(nx) \nabla\varphi \, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \; .$$

Die Ladungsdichte h^n konvergiert als Dichtefunktion einer Verteilung von Punktladungen auch nur schwach in $L^2(V;\mathbb{R})$. Man betrachtet eine Folge von Systemen mit dazu bekannten Größen

$$v^n = -\nabla g^n \tag{1.6}$$
$$u^n = \alpha v^n \tag{1.7}$$
$$\operatorname{div} u^n = h^n \tag{1.8}$$
$$u^n \cdot v^n = f^n \; . \tag{1.9}$$

Insbesondere gilt für die Folgen $(u^n)_n$ und $(v^n)_n$ der eindeutigen Lösungen

$$v^n \rightharpoonup v \text{ in } L^2(V;\mathbb{R}^3) \quad \text{und} \quad u^n \rightharpoonup u \text{ in } L^2(V;\mathbb{R}^3)\ .$$

Nun möchte man wissen, was mit der elektrostatischen Energiedichte f^n passiert. Mit der Gleichung (1.7) und dem klassischen Resultat, dass die Norm schwach folgenunterhalbstetig ist (Definition 3.1 und Satz A.1), bekommt man zunächst eine Abschätzung, denn mit $f^n = \alpha|v^n|^2$ folgt

$$\liminf_{n\to\infty} f^n \geq \alpha|v|^2 = \alpha(u\cdot v)\ .$$

Es stellt sich die Frage, ob man noch eine bessere Konvergenzaussage erhalten kann. ♢

Das nächste Beispiel illustriert, dass ohne weitere Voraussetzungen das euklidische Skalarprodukt von zwei schwach konvergenten Folgen nicht gegen das Produkt der Grenzwerte konvergieren muss.

Beispiel 2: Schwache Konvergenz und Nichtlinearität
Für $\tilde{f}$, die $1-$periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ von

$$f\ :\ [0,1) \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \begin{cases} \alpha & x \in [0,\theta) \\ \beta & x \in [\theta,1) \end{cases}\ ,$$

definiert man die Folge $(g^n)_n$ durch $g^n(x) := \tilde{f}(nx)$. Dann konvergiert $(g^n)_n$ schwach in $L^p((0,1);\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$ und schwach$*$ in $L^\infty((0,1);\mathbb{R})$ gegen

$$g := (\theta\cdot\alpha + (1-\theta)\cdot\beta)\ .$$

Die Produktfolge $(h^n)_n \subset L^p((0,1);\mathbb{R})$ mit $h^n := g^n \cdot g^n$ konvergiert gegen die Funktion

$$h := \theta\cdot\alpha^2 + (1-\theta)\cdot\beta^2\ .$$

Für $\alpha \neq \beta$ gilt allerdings

$$h = \theta\cdot\alpha^2 + (1-\theta)\cdot\beta^2 \neq (\theta\cdot\alpha + (1-\theta)\cdot\beta)^2 = (g)^2\ .$$

Die entsprechende Konvergenz von $(g^n)_n$ und $(h^n)_n$ folgt unmittelbar aus dem nächsten Satz (Satz 1.11). ♢

Auch wenn dieses Beispiel erst einmal eine negative Antwort gibt, so wird sich doch herausstellen, dass die elektrostatische Energiedichte f^n im Sinne von Distributionen konvergiert. Da u^n und v^n nicht nur schwach konvergieren, sondern auch Lösungen des Differentialgleichungssystems sind, wird mit dieser zusätzlichen Struktur das div-curl-Lemma ein hinreichendes Kriterium für eine positive Antwort sein.

Satz 1.11:
Es sei $f \in L^p(T;\mathbb{R})$ eine $T-$periodische Funktion mit $T = \bigtimes_{i=1}^N (0,a_i)$, also a_i-periodisch in der $i-$ten Variable, und Ω beschränkt. Dann konvergiert die Folge $(f^n)_n$, definiert durch $f^n(x) := f(nx)$, schwach in $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ für $(1 \leq p < \infty)$ und schwach$*$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ gegen den Mittelwert

$$\frac{1}{\text{meas}\,(T)}\int_T f(x)\,dx\ .$$

Die schwach$*$ Konvergenz in L^∞ gilt auch für unbeschränktes Ω.

Beweis. Der Beweis steht in [CD99, S.33 f.]. □

Das folgende Korollar soll das Beispiel 2 konstruktiv erweitern und wird in den Beweisen der Sätze 3.2 und 3.3 verwendet.

Korollar 1.12:
Es sei Ω beschränkt. Dann gibt es für alle $\theta \in (0,1)$ eine Folge von charakteristischen Funktionen $(\chi_\theta^n)_n$, die schwach, aber nicht stark, in $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$ gegen θ konvergiert beziehungsweise schwach$*$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, letzteres auch für unbeschränktes Ω.

Beweis. Gegeben sei ein achsenparalleler Quader $B := \bigtimes_{i=1}^N (a_i, b_i)$ mit $(a_i, b_i) \subseteq (0,1)$ mit $\operatorname{meas}(B) = \theta$, der im Einheitswürfel $\bigtimes_{i=1}^N (0,1) =: W_1$ enthalten ist. Mit χ_θ, der W_1-periodischen Fortsetzung von $\chi_B \in L^p(W_1;\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^N$, definiert man für alle $x \in \Omega$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\chi_\theta^n(x) := \chi_\theta(nx)$. Nun folgt die Behauptung mit Satz 1.11 und $T = W_1$. $\square$

Nach dieser Einführung in die grundlegenden Begriffe und die Problemstellung können nun in den nächsten beiden Kapiteln Aussagen der kompensierten Kompaktheit präsentiert werden. Es werden notwendige und hinreichende Kriterien für die Verträglichkeit von schwacher Konvergenz und Nichtlinearität aufgestellt.

2 Das div-curl-Lemma

Das Ziel dieses Kapitels ist es, das historisch erste Resultat der kompensierten Kompaktheit, das div-curl-Lemma, zu formulieren und zu beweisen. Dieses ist ein hinreichendes Kriterium für die $\mathcal{M}(\Omega)-$schwach$*$ Konvergenz des euklidischen Skalarproduktes zweier in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ schwach konvergenter Folgen.

div-curl-Lemma (1974)
Für $u^n \rightharpoonup u$ und $v^n \rightharpoonup v$ in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ sei $(\operatorname{div} u^n)_n$ beschränkt in $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ und $(\operatorname{curl} v^n)_n$ beschränkt in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$. Dann folgt für alle $\varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$

$$\int_\Omega \varphi\,(u^n \cdot v^n)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega \varphi\,(u\cdot v)\,dx\,.$$

Für den Beweis des div-curl-Lemmas (Satz 2.10) und den Beweis des Hauptsatzes der kompensierten Kompaktheit (Satz 3.6) werden in Abschnitt 2.1 die Fourier-Transformation eingeführt und einige ihrer Eigenschaften bewiesen. Da die Fourier-Transformation ein wichtiges Hilfsmittel dieser Arbeit ist, werden einige Aspekte detaillierter behandelt.

2.1 Fourier-Transformation

Dieser Abschnitt beginnt mit der Definition der Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ und ihrer Erweiterung auf $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. Danach soll das Potential der Fourier-Transformation in dem Beweis des Einbettungssatzes von Rellich (Satz 2.9) demonstriert werden. Die Definitionen, Aussagen und Vorgehensweise sind dabei hauptsächlich an [Wer07, Kap. 13] angelehnt. Ähnliche Einführungen in die Fourier-Transformation werden in [Kab13] und [Hör83] gegeben. In [For11] findet man eine leicht abweichende Herangehensweise, die den sogenannten Schwartz-Raum (Definition 2.3) vermeidet.

Definition 2.1: Fourier-Transformation
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ bezeichnet man die Funktion

$$\mathcal{F}f\,:\,\mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{F}f(\xi) := (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,dx$$

als die Fourier-Transformierte von f.

Bemerkung:

- Die Objekte $\mathcal{F}f$ sind wohldefiniert, da stets gilt:

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}|\,dx = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\,\|f\|_{L^1}\,. \tag{2.1}$$

- In der Literatur findet man auch leicht abweichende Formulierungen, welche zum Beispiel nicht den von der Dimension N abhängigen Skalierungsfaktor enthalten.

Der nächte Satz wird bei der punktweisen Auswertung einer Fourier-Transformierten meist implizit benutzt.

Satz 2.2: Eigenschaften der Fourier-Transformation
Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ bildet von $L^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ linear und stetig in den Raum der stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktionen ab.

Beweis. Diese Aussage wird bewiesen in [Wer07, S.210]. □

Die folgende Definition und der darauffolgende Satz sind ein erster Schritt, um eine Art Fourier-Transformation zu einem isometrischen Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ zu erweitern. Für einen Multiindex $\boldsymbol{\alpha}$ wird die Funktion $x \mapsto x^{\boldsymbol{\alpha}}$ ebenfalls mit $x^{\boldsymbol{\alpha}}$ bezeichnet.

Definition 2.3: Schwartz-Raum
Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \,\middle|\, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f \text{ ist schnell fallend für alle } \boldsymbol{\alpha} \right\}$$

*heißt **Schwartz-Raum**. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ heißt schnell fallend, falls für alle Multiindizes $\boldsymbol{\alpha}$ gilt:*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) = 0 \,.$$

Satz 2.4:
Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ und es gilt

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \,. \tag{2.2}$$

Beweis. Der Beweis steht in [Wer07, S.215]. □

Zunächst gibt es eine eindeutige Fortsetzung $\mathcal{F}_2$ von $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$, da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ liegt, welche ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus ist ([Cia13, S.124]). Diese Fortsetzung wird auch Fourier-Plancherel-Transformation genannt. Diese ist nicht im eigentlichen Sinne durch die Definition 2.1 gegeben, da das Integral für $f \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ erst einmal nicht existieren muss. Das Symbol $\mathcal{F}_2 f$ bezeichnet nach Konstruktion (Vervollständigung) eine Äquivalenzklasse von Funktionen und mit (2.2) folgt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}_2 f, \mathcal{F}_2 g \rangle_{L^2} \quad \text{für alle } f, g \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \,. \tag{2.3}$$

Der nächste Satz soll den genauen Zusammenhang zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_2$ klarstellen und eine Rechtfertigung liefern, um die Fourier-Plancherel-Transformation ebenfalls mit $\mathcal{F}$ zu bezeichnen. Für detailiertere Erläuterungen siehe z.B. [Wer07, S.216 ff.] oder [Dob10, S.228].

Satz 2.5:

(a) Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ gilt $\mathcal{F}_2 f(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$ fast überall auf $\mathbb{R}^N$.

(b) Für $f \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ und $B_r := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, |x| < r \right\}$ gilt

$$\|\mathcal{F}_2(f) - \mathcal{F}(\chi_{B_r} f)\|_{L^2} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \,.$$

Beweis.
(a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ gibt es eine Folge $(f^n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ ([Wer07, S.207]), sodass gilt:

$$\|f^n - f\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad \|f^n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \,.$$

Zunächst erhält man mit der Linearität von $\mathcal{F}$ die Abschätzung

$$|\mathcal{F}f^n(\xi) - \mathcal{F}f(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |f^n(x) - f(x)|\, dx \;.$$

Dies impliziert die gleichmäßige Konvergenz von $(\mathcal{F}f^n)_n$ gegen $\mathcal{F}f$:

$$\|\mathcal{F}f^n - \mathcal{F}f\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f^n - f\|_{L^1} \;.$$

Somit folgt die starke Konvergenz von $\mathcal{F}f^n$ gegen $\mathcal{F}f$ in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$:

$$\int_K |\mathcal{F}f^n - \mathcal{F}f|^2\, d\xi \leq \text{ meas}\,(K)\|\mathcal{F}f^n - \mathcal{F}f\|^2_\infty \quad \text{für alle kompakten } K \subset \mathbb{R}^N \;.$$

Mit (2.3) und $f^n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ gilt außerdem

$$\|\mathcal{F}f^n - \mathcal{F}_2 f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}_2(f^n - f)\|_{L^2} = \|f^n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;.$$

Mit der Eindeutigkeit des Grenzwertes im L^2 Sinne folgt die Behauptung (a).

(b) Die Folge $(\chi_{B_r} f)_r$ konvergiert nach dem Satz von Lebesgue (Satz 1.3) in $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ gegen f für $r \to \infty$. Da $\mathcal{F}_2$ stetig ist, konvergiert $(\mathcal{F}_2(\chi_{B_r} f))_r$ in $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ gegen $\mathcal{F}_2(f)$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt $\chi_{B_r} f \in L^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. Nach (a) gilt somit $\mathcal{F}_2(\chi_{B_r} f) = \mathcal{F}(\chi_{B_r} f)$ fast überall. Die Behauptung (b) folgt aus

$$\|\mathcal{F}_2(f) - \mathcal{F}(\chi_{B_r} f)\|_{L^2} = \|\mathcal{F}_2(f) - \mathcal{F}_2(\chi_{B_r} f)\|_{L^2} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \;.$$

□

Im Folgenden werden $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}$ als ein und derselbe Operator betrachtet und als Fourier-Transformation bezeichnet, wobei diese Gleichheit im Sinne des Satzes 2.5 zu verstehen ist. Somit gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}^M)$ die **Plancherel-Formel**

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} f \cdot g\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g\, d\xi = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2} \;. \tag{2.4}$$

Bemerkung:

- Die Fourier-Transformation für vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}^M$ ist koordinatenweise zu verstehen:

$$\mathcal{F}f(\xi) = (\mathcal{F}f_1(\xi), \ldots, \mathcal{F}f_M(\xi))^T \quad \text{mit } f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \text{ für } i = 1, \ldots, M \;.$$

- Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass die komplexe Konjugation in dem euklidischen Skalarprodukt $\cdot$ steckt.

Der nachfolgende Satz ist ein wichtiges Resultat der Theorie der Fourier-Transformation. Dieser Satz ermöglicht es bestimmte analytische Probleme in algebraische zu transformieren.

Satz 2.6: Multiplikationssatz
Sei $f \in H^m(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. Dann gilt für alle Multiindizes $\boldsymbol{\alpha}$ mit $|\boldsymbol{\alpha}| \leq m$

$$\mathcal{F}(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f) = i^{|\boldsymbol{\alpha}|}\xi^{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{F}(f) \;.$$

Beweis. Der Beweis steht in [Wer07, S.218]. □

Die folgenden Aussagen aus [FN09, S.333] werden es in dem Beweis des div-curl-Lemmas (Satz 2.10) ermöglichen, aus den Informationen, die man über die Divergenz und Rotation der Funktionenfolgen besitzt, letztendlich die Konvergenz zu folgern.

Korollar 2.7:
Für $u \in H^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ gilt

$$i \sum_{k=1}^{N} \xi_k \,\mathcal{F}(u_k) = \mathcal{F}(\operatorname{div} u) \quad \textit{und} \quad i\ (\xi_k \mathcal{F}(u_j) - \xi_j \mathcal{F}(u_k)) = \mathcal{F}([\operatorname{curl} u]_{j,k}) \ . \tag{2.5}$$

Beweis. Beide Aussagen sind unmittelbare Folgerungen aus dem Multiplikationssatz (Satz 2.6) und der Linearität von $\mathcal{F}$, denn es gilt

$$\begin{aligned} i \sum_{k=1}^{N} \xi_k \,\mathcal{F}(u_k) &= i\xi_1 \mathcal{F}(u_1) + \ldots + i\xi_N \mathcal{F}(u_N) \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_1\right) + \ldots + \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_N} u_N\right) \\ &= \mathcal{F}(\operatorname{div} u) \ . \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten folgt die zweite Aussage für alle $j,k = 1,\ldots,N$

$$\begin{aligned} i\ (\xi_k \mathcal{F}(u_j) - \xi_j \mathcal{F}(u_k)) &= \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_j\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_k\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \\ &= \mathcal{F}([\operatorname{curl} u]_{j,k}) \ . \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

- Für $g \in L^2(\Omega;\mathbb{C}^{M\times M})$ gilt mit der von der euklidischen Norm induzierten Operatornorm $|\cdot|$ die L^2-Norm
$$\|g\|_{L^2}^2 := \int_\Omega |g|^2 \, dx \ .$$

Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Multiplikationssatz (Satz 2.6) ist eine alternative Charakterisierung der Sobolew-Räume $H^m(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$.

Satz 2.8:
Für $m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$ gilt $H^m(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) = \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \,\big|\, (1+|\cdot|)^m \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \big\}$.

Beweis. Dieser Beweis steht in [Wer07, S.222]. □

Nun soll skizzenhaft nach [Hör83, Kap. 7] die alternative Charakterisierung auf die Räume $H^{-m}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ erweitert werden. Diese wird in dem Beweis des Hauptsatzes der kompensierten Kompaktheit verwendet. Man definiert dazu den Raum der temperierten Distributionen als den Dualraum des Schwartz-Raumes $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) := \big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})\big)'$. Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ kann man durch

$$\mathcal{F}f(\varphi) := f(\mathcal{F}\varphi)$$

die Fourier-Transformation einer temperierten Distribution f definieren. Weiterhin definiert man

$$H^{-m}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \,\middle|\, (1+|\cdot|)^{-m}\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) \right\}$$
$$\text{und} \quad \|f\|_{H^{-m}} := \|(1+|\cdot|)^{-m}\mathcal{F}f\|_{L^2} \; . \tag{2.6}$$

Bemerkung:

- Die Definition von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ ist keineswegs trivial. Eine detailierte Einführung steht in [Hör83] und [Dob10, S.228].
- Insbesondere gehört für $u \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ und $|\boldsymbol{\alpha}| \le m$ auch $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u$ zu $H^{-m}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. Denn es gilt mit einer Verallgemeinerung des Multiplikationssatzes (Satz 2.6) für temperierte Distributionen ([Hör83, S.166]):
$$\mathcal{F}(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u) = i^{|\boldsymbol{\alpha}|}\xi^{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{F}(u) \; .$$
- Es genügt in Korollar 2.7 $u \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ und $\operatorname{div} u \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ beziehungsweise $\operatorname{curl} u \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})$ zu fordern.

Eine weitere interessante Anwendung der Fourier-Transformation ist ein alternativer Beweis des Einbettungssatzes von Rellich ($H_0^1 \overset{c}{\hookrightarrow} L^2$). Dieser Beweis inspirierte Luc Tartar ([Tar09, S.91]) zu dem Beweis des div-curl-Lemmas und soll hier zur Vertiefung und Vorbereitung präsentiert werden.

Satz 2.9: Einbettungssatz von Rellich
Für Ω beschränkt ist $H_0^1(\Omega;\mathbb{C})$ kompakt in $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ eingebettet.

Bemerkung:

- An gegebener Stelle wird es von Nutzen sein, den Raum $H_0^1(\Omega;\mathbb{C})$ als einen Teilraum von $H^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ zu betrachten, indem man die Funktion außerhalb von Ω mit 0 fortsetzt. Dies ist möglich, da ein entsprechender linearer stetiger Fortsetzungsoperator existiert (siehe [AF03, S.71]).

Beweis. Es sei $(f^n)_n$ eine in $H_0^1(\Omega;\mathbb{C})$ beschränkte Folge mit $\|f^n\|_{H_0^1} < M < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Dichtheit von $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ in $H_0^1(\Omega;\mathbb{C})$ genügt es, sich auf den Fall $f^n \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beschränken. Es ist zu zeigen, dass $(f^n)_n$ eine in $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ konvergente Teilfolge besitzt.

(1) Nach der Definition der Normen ist $(f^n)_n$ auch beschränkt in $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ und besitzt nach dem Satz von Eberlein-Šmulian (Satz A.6) eine in L^2 schwach gegen ein $f \in L^2(\Omega;\mathbb{C})$ konvergente Teilfolge, die ebenfalls mit $(f^n)_n$ bezeichnet werden soll. Die Funktion $f \in L^2(\Omega;\mathbb{C})$ sei außerhalb von Ω mit 0 fortgesetzt.

(2) Für beliebiges, aber festes $\xi \in \mathbb{R}^N$ ist die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. Somit erhält man mit dem Rieszschen Darstellungsatz (Satz 1.4) und der schwachen Konvergenz von $(f^n)_n$ die punktweise Konvergenz von $\mathcal{F}f^n$, denn mit $f^n = 0$ auf $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ gilt
$$\mathcal{F}f^n(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_\Omega f^n(x)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_\Omega f(x)\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,dx = \mathcal{F}f(\xi) \; .$$
Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz A.4) erhält man die L^2_{loc}–Majorante
$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}f^n(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f^n\|_{L^2}\,\mathrm{meas}\,(\Omega)^{\frac{1}{2}} < \tilde{M} \; .$$

Mit dem Satz von Lebesgue (Satz 1.3) erhält man nun starke Konvergenz von $(\mathcal{F}f^n)_n$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$.

(3) Nach dem Multiplikationssatz (Satz 2.6) und der Plancherel-Formel (2.4) gilt:

$$\begin{aligned}\|\,|\xi|\mathcal{F}f^n\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2\right)|\mathcal{F}f^n|^2\,d\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N\left|\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f^n\right)\right|^2 d\xi \\ &= \sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}f^n\right\|_{L^2}^2 \le \|f^n\|_{H_0^1}^2 < M^2\;.\end{aligned}$$

Für jedes ε gibt es also einen Radius r, sodass für alle $m,n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r}|\mathcal{F}f^m(\xi)-\mathcal{F}f^n(\xi)|^2\,d\xi &\le \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r}|\xi|^2|\mathcal{F}f^m(\xi)-\mathcal{F}f^n(\xi)|^2\,d\xi \\ &\le \frac{2}{r^2}M^2 < \varepsilon\;.\end{aligned}$$

(4) Insgesamt folgt nun mit (2), (3) und der Plancherel-Formel (2.4), dass $(f^n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ ist. Für $\varepsilon>0$ gibt es nach (3) ein $r>0$ und nach (2) ein $n_0\in\mathbb{N}$, sodass für alle $m,n\ge n_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\|f^m-f^n\|_{L^2}^2 = \|\mathcal{F}f^m-\mathcal{F}f^n\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}|\mathcal{F}f^m(\xi)-\mathcal{F}f^n(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \int_{B_r}|\mathcal{F}f^m(\xi)-\mathcal{F}f^n(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r}|\mathcal{F}f^m(\xi)-\mathcal{F}f^n(\xi)|^2\,d\xi \\ &< \varepsilon+\varepsilon\;.\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:

- Mit stärkeren Anforderungen an den Rand von Ω können viele weitere stetige und auch kompakte Einbettungen der Räume $W^{m,p}(\Omega;\mathbb{C})$ in diverse Räume bewiesen werden (Satz A.14 und [AF03, Kap. 4]).
- Weiterhin gilt die obige Einbettung $H_0^1 \overset{c}{\hookrightarrow} L^2$ auch für $\Omega=\mathbb{R}^N$ mit einem anderen Beweis ([AF03, Kap. 4]).

Insbesondere folgt aus der kompakten Einbettung $H_0^1(\Omega;\mathbb{C}) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega;\mathbb{C})$ auch die kompakte Einbettung $L^2(\Omega;\mathbb{C}) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega;\mathbb{C})$ (Satz A.7), da C_c^∞ dicht in H_0^1 und L^2 liegt und L^2 ein Hilbert-Raum ist. Somit enthält jede in L^2 beschränkte Folge eine in H^{-1} stark konvergente Teilfolge.

Bemerkung:

- Die Fourier-Transformation ist ein mächtiges Werkzeug, das viele interessante Anwendungen hat. Man kann mit Satz 2.6 zum Beispiel gebrochene Ableitungen und die Sobolew-Slobodeckij-Räume definieren, welche die Begriffe der schwachen Ableitung und der Sobolew-Räume auf beliebige reelle Ableitungsgrade erweitern.
- Mit dem Multiplikationssatz 2.6 kann man verschiedenen Differential-Operatoren eine algebraische Repräsentation geben. Damit beschäftigt sich die Theorie der Fourier-Multiplikatoren.

Nun kann endlich die historisch erste Version des div-curl-Lemma bewiesen werden.

2.2 Das klassische div-curl-Lemma

Die folgende Version des div-curl-Lemma wurde 1974 von Luc Tartar und François Murat aufgestellt und bewiesen. Das Theorem und eine Beweisskizze finden sich in [Tar09, S.90].

Satz 2.10: div-curl-Lemma
Es konvergiere $u^n \rightharpoonup u$ *und* $v^n \rightharpoonup v$ *in* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *für* $n \to \infty$. *Weiterhin sei* $(\operatorname{div} u^n)_n$ *beschränkt in* $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ *und* $(\operatorname{curl} v^n)_n$ *beschränkt in* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$. *Dann folgt für alle* $\varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$

$$\int_\Omega \varphi(u^n \cdot v^n)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(u \cdot v)\,dx \quad \textit{also} \quad u^n \cdot v^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \cdot v \textit{ in } \mathcal{M}(\Omega)\,.$$

Beweis. Der Beweis unterteilt sich in sechs Schritte. In den ersten drei Schritten wird das Problem reduziert und in den Bereich der Fourier-Transformierten verlagert. In den Schritten (4) und (5) werden Konvergenzen ähnlich zu dem Beweis des Einbettungssatzes von Rellich (Satz 2.9) bewiesen. Schritt (6) ist ein Approximationsargument, um eine zusätzliche Annahme aus Schritt (2) wieder fallen lassen zu können.

(1) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man $u^n \rightharpoonup 0$ und $v^n \rightharpoonup 0$ annehmen. Andernfalls betrachtet man die Differenzfolgen $(u^n - u) \rightharpoonup 0$ und $(v^n - v) \rightharpoonup 0$, welche ebenfalls die Voraussetzungen erfüllen, denn aufgrund der Beschränktheit besitzt die Folge $(\operatorname{div} u^n)_n$ nach dem Satz von Eberlein-Šmulian (Satz A.6) eine in L^2 schwach gegen $u^* \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$ konvergente Teilfolge $(\operatorname{div} u^{n'})_{n'}$, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ gilt:

$$-\int_\Omega u \cdot \nabla\varphi\,dx \xleftarrow{\infty\leftarrow n'} -\int_\Omega u^{n'} \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega \operatorname{div} u^{n'}\,\varphi\,dx \xrightarrow{n'\to\infty} \int_\Omega u^*\,\varphi\,dx\,.$$

Mit der Eindeutigkeit schwacher Grenzwerte und schwacher Ableitungen ergibt sich $u^* = \operatorname{div} u \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$. Nun folgt mit dem schwachen Teilfolgenprinzip (Satz A.8), dass die gesamte Folge schwach gegen $\operatorname{div} u$ konvergiert. Somit ist $(\operatorname{div}(u^n - u))_n$ beschränkt in $L^2(\Omega;\mathbb{R})$. Die Beschränktheit von $(\operatorname{curl}(v^n - v))_n$ kann man analog zeigen. Betrachtet man

$$u^n \cdot v^n = (u^n - u)\cdot(v^n - v) + u\cdot(v^n - v) + u^n \cdot v\,,$$

so folgt die Behauptung, falls man zeigen kann, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_\Omega \varphi(u^n - u)\cdot(v^n - v)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Die anderen Terme konvergieren nach dem Rieszschen Darstellungsatz (Satz 1.4) und da gilt $\varphi u\,,\ \varphi v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Es gelte nun also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u^n \rightharpoonup 0$ und $v^n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\Omega;\mathbb{R})$.

(2) Zunächst seien $\psi_1, \psi_2 \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\varphi = \psi_1 \cdot \psi_2$ gegeben. Dann kann man die Folgen $\psi_1 u^n \rightharpoonup 0$ und $\psi_2 v^n \rightharpoonup 0$ betrachten, welche ebenfalls die Voraussetzungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\|\operatorname{div}(\psi_1 u^n)\|_{L^2} &\le \|\nabla\psi_1 \cdot u^n\|_{L^2} + \|\psi_1\|_\infty \|\operatorname{div} u^n\|_{L^2}\\ &\le \sum_{i=1}^N \Big\|\frac{\partial\psi_1}{\partial x_i}\Big\|_\infty \|u_i^n\|_{L^2} + \|\psi_1\|_\infty\|\operatorname{div} u^n\|_{L^2}\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial(\psi_2 v_j^n)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\psi_2 v_k^n)}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \leq \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial x_k} \right\|_\infty \|v_j^n\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial x_j} \right\|_\infty \|v_k^n\|_{L^2} + \|\psi_2\|_\infty \left\| \frac{\partial v_j^n}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k^n}{\partial x_j} \right\|_{L^2} .$$

Betrachtet man im Folgenden $u^n = \psi_1 u^n$ und $v^n = \psi_2 v^n$, darf man annehmen, dass $\operatorname{supp}(u^n) \subset K$ und $\operatorname{supp}(v^n) \subset K$ mit einem festen kompakten $K \subset \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Hilfe der speziellen Testfunktionen (mit kompaktem Träger) ist das Problem stets ein lokales Problem und man kann ohne Beschränkung auch $\Omega = \mathbb{R}^N$ betrachten. Aus der schwachen Konvergenz folgt insbesondere auch die Beschränktheit (Satz A.1). Es gibt also ein $0 < M < \infty$, sodass $\|u^n\|_{L^2} < M$, $\|v^n\|_{L^2} < M$, $\|\operatorname{div} u^n\|_{L^2} < M$ und $\|\operatorname{curl} v^n\|_{L^2} < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das Problem ist nun darauf reduziert, zu zeigen, dass gilt:

$$\int_K u^n \cdot v^n \, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

(3) Mit Hilfe der Plancherel-Formel (2.4) verlagert man das Problem nun in den Bereich der Fourier-Transformierten. Es ist zu zeigen:

$$\int_K u^n \cdot v^n \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n \, d\xi \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

(4) Ähnlich zu dem Beweis des Einbettungssatzes von Rellich (Satz 2.9) bekommt man nun folgende Eigenschaften der Fourier-Transformierten.

(a) Die Folgen $(\mathcal{F}u^n)_n$ und $(\mathcal{F}v^n)_n$ konvergieren schwach gegen 0 in $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^N)$.
Für $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^N)$ gibt es $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ mit $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^N)$. Es gibt also für alle $\mathcal{F}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^N)$ genau ein $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^N)$. Mit der schwachen Konvergenz von u^n in L^2 und der Plancherel-Formel (2.4) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}\varphi \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} u^n \cdot \varphi \, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u \cdot \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}u \cdot \mathcal{F}\varphi \, d\xi .$$

Insbesondere folgt aus der schwachen Konvergenz auch die Beschränktheit von $(\mathcal{F}u^n)_n$ in $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^N)$. Die Folge $(\mathcal{F}v^n)_n$ wird analog behandelt.

(b) Die Folgen $(\mathcal{F}u^n)_n$ und $(\mathcal{F}v^n)_n$ konvergieren punktweise gegen 0.
Für beliebiges, aber festes ξ ist die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ und es folgt:

$$\mathcal{F}u^n(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_K u^n(x) \, \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} \, dx \xrightarrow{u^n \rightharpoonup 0} 0 .$$

Für $(\mathcal{F}v^n)_n$ gilt eine analoge Argumentation.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|\mathcal{F}u^n\|_\infty \leq \tilde{M} < \infty$.
Mit $\operatorname{supp}(u^n) \subset K$ gilt $u^n \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Es folgt nach Satz 2.2, dass $\mathcal{F}u^n$ stetig ist. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz A.4) folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}u^n(\xi)| &\leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u^n(x)| \, |\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}| \, dx = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_K 1 \cdot |u^n(x)| \, dx \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(\operatorname{meas}(K) \right)^{\frac{1}{2}} \|u^n\|_{L^2} < (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left(\operatorname{meas}(K) \right)^{\frac{1}{2}} M =: \tilde{M} . \end{aligned}$$

Somit besitzt $|\mathcal{F}u^n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$–Majorante $\tilde{M}$. Mit der Folge $(\mathcal{F}v^n)_n$ wird analog verfahren.

Wegen der punktweisen Konvergenz und der Majorante folgt mit dem Satz von Lebesgue (Satz 1.3) in L^2_{loc} die starke Konvergenz $\mathcal{F}u^n \to 0$ und $\mathcal{F}v^n \to 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^N)$.

(5) Bis jetzt wurde gezeigt, dass für alle $r > 0$ gilt:

$$\int_{B_r} \mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n \, d\xi \xrightarrow{n\to\infty} 0 \, .$$

Nun soll der verbleibende Teil unter Kontrolle gebracht werden. Man möchte dazu $|(\mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n)\,\xi|$ in $L^1(\mathbb{R}^N \backslash B_r; \mathbb{C})$ beschränken. Mit der Identität

$$(a \cdot b)c = (a \cdot c)\bar{b} + (c\bar{b}^T - \bar{b}c^T)a \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{C}^N \text{ und } c \in \mathbb{R}^N$$

und dem Korollar 2.7 aus dem Multiplikationssatz nutzt man die Voraussetzungen an die Divergenz von u^n und die Rotation von v^n aus und schätzt ab

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n)\xi| &\leq |\mathcal{F}u^n \cdot \xi| \, |\mathcal{F}v^n| + |\mathcal{F}u^n| \, |\xi(\mathcal{F}v^n)^T - \mathcal{F}v^n\xi^T| \\ &\leq |\mathcal{F}(\operatorname{div} u^n)| \, |\mathcal{F}v^n| + |\mathcal{F}u^n| \, |\mathcal{F}(\operatorname{curl} v^n)| \, . \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz A.4) und der Plancherel-Formel (2.4) erhält man

$$\|(\mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n)\xi\|_{L^1} \leq \|\operatorname{div} u^n\|_{L^2} \|v^n\|_{L^2} + \|u^n\|_{L^2} \|\operatorname{curl} v^n\|_{L^2} < M^* < \infty \, .$$

Ähnlich zu dem Beweis des Einbettungssatzes von Rellich (Satz 2.9) folgt nun

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n \, d\xi| &\leq |\int_{B_r} \mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n \, d\xi| + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r} |(\mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n)\xi| \, d\xi \\ &\leq |\int_{B_r} \mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n \, d\xi| + \frac{M^*}{r} \, . \end{aligned}$$

Mit (4) und $r \to \infty$ wurde unter der zusätzlichen Annahme aus (2) bewiesen:

$$\int_\Omega u^n \cdot v^n \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}u^n \cdot \mathcal{F}v^n \, d\xi \xrightarrow{n\to\infty} 0 \, .$$

(6) Mit Approximation von $\varphi \in C_c(\Omega; \mathbb{R})$ durch $\psi_1 \cdot \psi_2 \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R})$ folgt die Behauptung. Für ein beliebiges $\varphi \in C_c(\Omega; \mathbb{R})$ gibt es aufgrund der Dichtheit von C_c^1 in C_c eine Folge $(\psi_1^m)_m \subset C_c^1(\Omega; \mathbb{R})$ mit $\psi_1^m \to \varphi$ in $C_c(\Omega; \mathbb{R})$ für $m \to \infty$.
Für $\psi_2^m \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R})$ mit $\psi_2^m = 1$ auf dem Träger von ψ_1^m folgt für die Produktfolge $\varphi^m := \psi_1^m \cdot \psi_2^m$, dass $\|\varphi - \varphi^m\|_\infty \to 0$ für $m \to \infty$ gilt. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz A.4) erhält man die Beschränkung

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \varphi(u^n \cdot v^n) \, dx| &\leq \|\varphi - \varphi^m\|_\infty \|u^n\|_{L^2} \|v^n\|_{L^2} + |\int_\Omega \psi_1^m \psi_2^m (u^n \cdot v^n) \, dx| \\ &\leq \|\varphi - \varphi^m\|_\infty M^2 + |\int_\Omega (\psi_1^m u^n) \cdot (\psi_2^m v^n) \, dx| \, . \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ und $m \to \infty$ folgt mit (1) die Behauptung des div-curl-Lemmas:

$$\int_\Omega \varphi(u^n \cdot v^n) \, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(u \cdot v) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_c(\Omega; \mathbb{R}) \, .$$

$\square$

Bemerkung:

- Dieser Beweis verfährt in einigen Schritten, insbesondere in Schritt (4), analog zu dem Beweis des Einbettungssatzes von Rellich. Dabei wurde in Schritt (4) im Wesentlichen nur die schwache Konvergenz der Folgen $(u^n)_n$ und $(v^n)_n$ verwendet.

- In Schritt (5) werden die Informationen beziehungsweise die Kontrolle über gewisse partielle Ableitungen benutzt, um letztendlich die Konvergenz der Produktfolge zu sichern.

- Der Schritt (2) wird auch in anderen Beweisen auftauchen und soll in dieser Arbeit Lokalisierung genannt werden.

Mit Hilfe des div-curl-Lemmas kann man nun eine positive Antwort auf die Frage aus dem Elektrostatik Beispiel geben.

Beispiel 3: Elektrostatik
Es wurde bereits festgestellt, dass gilt:

$$\begin{aligned} g^n \to g \text{ in } L^2(V;\mathbb{R}) \quad &\text{und} \quad v^n \rightharpoonup v \text{ in } L^2(V;\mathbb{R}^3)\ , \\ u^n \rightharpoonup u \text{ in } L^2(V;\mathbb{R}^3) \quad &\text{und} \quad h^n \rightharpoonup h \text{ in } L^2(V;\mathbb{R})\ . \end{aligned}$$

Nun sind u^n und v^n nicht nur Folgenglieder schwach konvergenter Folgen in entsprechenden Funktionenräumen, sondern auch Lösungen des partiellen Differentialgleichungssystems

$$v^n = -\nabla g^n \tag{2.7}$$

$$u^n = \alpha v^n \tag{2.8}$$

$$\operatorname{div} u^n = h^n \tag{2.9}$$

$$u^n \cdot v^n = f^n\ . \tag{2.10}$$

Die Gleichungen (2.7) und (2.9) geben den Folgen $(u^n)_n$ und $(v^n)_n$ mehr Struktur, die man mit Hilfe des div-curl-Lemmas nutzen kann. Da Gradientenfelder stets rotationsfrei sind, gilt $\operatorname{curl} v^n = 0$. Insbesondere ist $(\operatorname{curl} v^n)_n$ beschränkt in $L^2(V;\mathbb{R}^{3\times 3})$. Mit der schwachen Konvergenz von $(h^n)_n$ folgt die Beschränktheit von $(\operatorname{div} u^n)_n$ in $L^2(V;\mathbb{R})$. Mit dem div-curl-Lemma folgt die Konvergenz der elektrostatischen Energiedichte f^n nicht nur im Sinne von Distributionen, sondern sogar ein bisschen mehr:

$$f^n = u^n \cdot v^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \cdot v = f \text{ in } \mathcal{M}(V)\ .$$

Nun kann man sich fragen, ob man auch diese Konvergenz noch verbessern kann. ◇

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist die Produktfolge beschränkt in $L^1(\Omega;\mathbb{R})$. Dennoch kann man ohne zusätzliche Annahmen keine schwache L^1-Konvergenz erwarten. Dies soll anhand eines von Luc Tartar in [Tar09, S.92] konstruiertem Gegenbeispiels gezeigt werden. Dazu soll noch ein spezieller Sobolew-Raum definiert werden. Dabei bezeichnet $\partial\Omega$ den Rand von Ω.

Definition 2.11:
Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Der Raum aller Spuren $\operatorname{tr}(v)$ von Funktionen v aus $H^1(\Omega;\mathbb{R})$ wird mit $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R}) := \left\{\operatorname{tr}(v) \in L^2(\partial\Omega;\mathbb{R}) \,\middle|\, v \in H^1(\Omega;\mathbb{R})\right\}$ bezeichnet.

Der Raum $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R})$ ist mit einem entsprechenden Skalarprodukt ein Hilbert-Raum. Genauere Ausführungen finden sich in [Tar07, Kap.16].

Satz 2.12:
Für $N \geq 2$ sei $\omega \subset \Omega$ eine Kugel, deren Abschluss in Ω enthalten ist. Dann gibt es zwei Folgen $(u^n)_n \subset L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ und $(v^n)_n \subset L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ mit $u^n \rightharpoonup 0$ und $v^n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Weiterhin gilt $v^n = \nabla g^n$, wobei $g^n \rightharpoonup 0$ in $H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$ und $\operatorname{div} u^n = 0$. Aber dennoch konvergiert die Produktfolge $(u^n \cdot v^n)_n$ nicht schwach in $L^1(\Omega;\mathbb{R})$.

Bemerkung:

- Für $N = 1$ folgt aus der schwachen Konvergenz von $(u^n)_n$ und der Beschränktheit von $(\operatorname{div} u^n)_n$ in L^2 die Existenz einer in L^2 stark konvergenten Teilfolge. Insbesondere folgt auch die schwache Konvergenz der Produktfolge in L^1.

- Der Beweis soll hier nur skizziert werden. Deshalb werden einige technische Details ausgelassen. Die Theorie, die eingeführt werden müsste, ist für den Rest dieser Arbeit irrelevant. Es ist anzumerken, dass die ausgelassenen Details keineswegs trivial sind. Die Lösbarkeit des Problems (2.11), die Möglichkeit, eine schwach, aber nicht stark, konvergente Folge $(\psi^n)_n$ in $H^{\frac{1}{2}}$ wählen zu können, und die schwache Konvergenz von $(g^n)_n$ in H_0^1, sowie die Implikation der starken Konvergenz für $(\psi^n)_n$ benutzen komplexe Aussagen wie den Spursatz von Lions (Satz A.13).

Beweis. Es sei $(\psi^n)_n$ eine Folge, die schwach, aber nicht stark in $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega;\mathbb{R})$ gegen 0 konvergiert. Das inhomogene Dirichlet-Problem

$$-\Delta g^n = 0 \text{ in } \omega \quad \text{mit} \quad g^n = \psi^n \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega;\mathbb{R}) \text{ auf } \partial\omega$$

besitzt nach der Definition des Raumes $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega;\mathbb{R})$, mit dem Laplace-Operator Δ und nach dem Lemma von Lax-Milgram ([Tar07, Kap.19]) eine eindeutige schwache Lösung $g^n \in H^1(\omega;\mathbb{R})$. Weiterhin sei g^n in $\Omega\backslash\bar{\omega}$ fortgesetzt durch die ebenfalls nach dem Lemma von Lax-Milgram eindeutige schwache Lösung des Problems

$$-\Delta g^n = 0 \text{ in } \Omega\backslash\omega\,,\; g^n = \psi^n \text{ auf } \partial\omega \text{ und } g^n = 0 \text{ auf } \partial\Omega\,.$$

Ohne genauer auf die nicht trivialen Details einzugehen, impliziert die schwache Konvergenz der Folge $(\psi^n)_n$ die schwache Konvergenz von $(g^n)_n$ gegen 0 in $H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$. Es sei $h^n \in H^1(\Omega\backslash\omega;\mathbb{R})$ gegeben als die Lösung des Problems

$$-\Delta h^n = 0 \text{ in } \Omega\backslash\omega\,,\; h^n = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ und } \frac{\partial h^n}{\partial\nu} = \frac{\partial g^n}{\partial\nu} \text{ auf } \partial\omega\,. \tag{2.11}$$

Hierbei bezeichnet $\frac{\partial}{\partial\nu}$ die Ableitung in Richtung des äußeren Normalenvektors. Mit den folgenden Definitionen erhält man $u^n \rightharpoonup 0$ und $v^n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} v^n &:= \nabla g^n \text{ in } \Omega \\ u^n &:= \nabla g^n \text{ in } \omega \text{ und } u^n := \nabla h^n \text{ in } \Omega\backslash\bar{\omega}\,. \end{aligned}$$

Mit der formalen Rechnung

$$\operatorname{div}\nabla g = \Delta g$$

folgt $\operatorname{div} u^n = 0$. Da v^n ein Gradientenfeld ist, gilt $\operatorname{curl} v^n = 0$. Es folgt mit dem div-curl-Lemma

$$\int_\Omega \varphi(u^n \cdot v^n)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})\,.$$

Es liegt aber keine schwache L^1 Konvergenz vor, denn es müsste mit der für die duale Paarung zulässigen Funktion $\chi_\omega \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ gelten:

$$\int_\omega u^n \cdot v^n \, dx = \int_\omega |\nabla g^n|^2 \, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \, .$$

Dies impliziert allerdings, wieder nicht trivialerweise, die starke Konvergenz von $(\psi^n)_n$ in $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega;\mathbb{R})$. Das steht im Widerspruch zur Konstruktion. □

Auch wenn das klassische div-curl-Lemma zunächst keine schwache L^1−Konvergenz impliziert, so kann diese unter zusätzlichen Voraussetzungen gezeigt werden ([CDM11]). Weiterhin kann man eine Version des div-curl-Lemmas für beliebige L^p−Räume beweisen.

Satz 2.13: Verallgemeinertes div-curl-Lemma
Für $1 < p < \infty$ gelte

$$\begin{aligned} u^n \rightharpoonup u \ \textit{in}\ L^p(\Omega;\mathbb{R}^N) \quad &\textit{und} \quad (\operatorname{div} u^n)_n \ \textit{ist relativ kompakt in}\ W^{-1,p}(\Omega;\mathbb{R}) \, , \\ v^n \rightharpoonup v \ \textit{in}\ L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N) \quad &\textit{und} \quad (\operatorname{curl} v^n)_n \ \textit{ist relativ kompakt in}\ W^{-1,p'}(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N}) \, . \end{aligned}$$

Dann folgt

$$u^n \cdot v^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \cdot v \ \textit{in}\ \mathcal{M}(\Omega) \, .$$

Beweis. Eine Beweisskizze steht in [FN09, S.342]. □

Bemerkung:

- Eine Folge $(x^n)_n$ heißt relativ kompakt in einem normierten Raum X, wenn sie eine in X stark konvergente Teilfolge enthält.
- Die Beweisskizze in [FN09, S.342] benutzt die sogenannte Helmholtz-Zerlegung und einige Regularitätsaussagen elliptischer Probleme für L^p−Funktionen.
- Einen ausführlicheren Beweis findet man in [Mur78].
- Das klassiche div-curl-Lemma folgt für $p = 2$ aus Satz 2.13, da $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ kompakt in $H^{-1}(\Omega;\mathbb{C})$ eingebettet ist. (Satz A.14 und Satz A.7).

Der Hauptsatz der kompensierten Kompaktheit (Satz 3.6) wird zeigen, dass die Voraussetzungen des klassischen div-curl-Lemmas abgeschwächt werden können. Es genügt, $u^n \rightharpoonup u$ und $v^n \rightharpoonup v$ in L^2_{loc} sowie $(\operatorname{div} u^n)_n$ und $(\operatorname{curl} v^n)_n$ relativ kompakt in H^{-1}_{loc} zu fordern.
Falls man $(u^n \cdot v^n)$ in $L^r(\Omega;\mathbb{R})$ für $1 < r \leq \infty$ beschränken kann, ergibt sich eine bessere Konvergenzaussage. Dann erhält man mit der Dichtheit von $C_c(\Omega;\mathbb{R})$ in $L^{r'}(\Omega;\mathbb{R})$ sogar schwache Konvergenz (schwach$*$ für $r = \infty$) von $(u^n \cdot v^n)$ in $L^r(\Omega;\mathbb{R})$, wobei r' der zu r konjugierte Exponent sei.
In [GM08] wird eine noch stärkere Verallgemeinerung des div-curl-Lemmas bewiesen, welche zulässt, dass die einzelnen Komponenten u_i^n und v_i^n aus verschiedenen L^p−Räumen stammen. Eine Erweiterung des klassischen div-curl-Lemmas auf die Theorie der Zwei-Skalen Konvergenz wird in [Vis07] vorgenommen. Neben vielen technischen Resultaten aus der Zwei-Skalen Theorie enthält der Beweis auch viele Parallelen zu dem hier präsentierten Beweis.
Nach dem div-curl-Lemma sollen nun weitere Resultate der kompensierten Kompaktheit vorgestellt werden.

3 Kompensierte Kompaktheit

Der Begriff *kompensierte Kompaktheit* kann irreführend sein, ebenso wie die englische Variante *compensated compactness*. Der ursprüngliche französische Ausdruck *compacité par compensation* (Kompaktheit durch Ausgleich) könnte Abhilfe schaffen. Aber auch dieser suggeriert, dass Kompaktheit erzeugt wird, was keineswegs der Fall ist. Die Theorie der kompensierten Kompaktheit versucht Strukturen von Lösungen partieller Differentialgleichungen auszunutzen, um zu Kompaktheitsargumenten ähnliche Schlüsse zu erzielen.
Bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen hat man oft eine Folge $(u^n)_n$ von Näherungslösungen von Ersatzproblemen. Dann benötigt man a-priori Abschätzungen, um die schwache Konvergenz einer Teilfolge zu bekommen. Diese konvergiert dann, so hofft man, gegen eine Lösung u des Grenzproblems. Enthalten diese Differentialgleichungen einen Term $f(u^n)$ mit einer stetigen, aber möglicherweise nichtlinearen, Abbildung f, dann muss insbesondere eine Teilfolge von $(f(u^n))_n$ gegen $f(u)$ konvergieren. Eine klassische Kompaktheitsargumentation dafür könnte wie folgt aussehen.

> *Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Die Folge von Lösungen $(u^n)_n$ sei beschränkt in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Dann besitzt sie nach dem Satz von Eberlein-Šmulian (Satz A.6) eine schwach konvergente Teilfolge $(u^m)_m$. Sämtliche partielle Ableitungen der Folge $(u^m)_m$ seien beschränkt in L^2. Dann besitzt die Folge der Gradienten eine schwach konvergente Teilfolge $(\nabla u^k)_k$. Somit konvergiert $(u^k)_k$ schwach in $H^1(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Nach dem Einbettungssatz von Rellich-Kondrachov (Satz A.14) existiert eine in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^M)$ stark konvergente Teilfolge $(u^l)_l$, da $H^1(\Omega;\mathbb{R}^M)$ kompakt in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^M)$ eingebettet ist. Dann konvergiert $(f(u^l))_l$ stark gegen $f(u)$, da f stetig ist.*

Besitzt man keine Kontrolle über alle partielle Ableitungen, kann man auch kein passendes Kompaktheitsargument erwarten. Falls f linear ist, konvergiert $f(u^n)$ zumindest schwach gegen $f(u)$, denn lineare Abbildungen sind schwach-schwach stetig (Definition 3.1), falls sie stetig sind (Satz A.10). Diese schwache Konvergenz ist in der schwachen Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen oft ausreichend.
Der Abschnitt 3.1 beschäftigt sich mit notwendigen und der Abschnitt 3.2 mit hinreichenden Kriterien, um die Konvergenz einer Teilfolge von $(f(u^n))_n$ gegen $f(u)$ zu sichern. In dem Abschnitt 3.3 werden dann die hier präsentierten Aussagen der kompensierten Kompaktheit mit klassischen Konvexitäts- und Kompaktheitsargumenten verglichen. Die Resultate und Beispiele orientieren sich an [Tar79] und [Tar09, Kap.17].

3.1 Notwendige Kriterien

In dem gesamten Kapitel 3 sei $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ eine **stetige** möglicherweise nichtlineare Funktion. Die folgenden Kriterien sind unter anderem durch variationelle Minimierungsprobleme der nichtlinearen Elastizitätstheorie motiviert. In dieser möchte man zum Beispiel folgendes Funktional minimieren:

$$\phi_f(u) = \int_\Omega f(u)\,dx\ . \tag{3.1}$$

Dabei wären die folgenden zwei Eigenschaften für ϕ_f oder f wünschenswert.

Definition 3.1:
Es seien X und Y Banach-Räume.

(a) *Ein Funktional $\phi : X \to \mathbb{R}$ heißt* ***schwach folgenunterhalbstetig****, falls für alle in X schwach konvergenten Folgen $x^n \rightharpoonup x$ gilt:*

$$\liminf_{n\to\infty} \phi(x^n) \geq \phi(x) \ .$$

(b) *Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt* ***schwach-schwach stetig****, falls für alle schwach konvergenten Folgen $x^n \rightharpoonup x$ in X gilt:*

$$f(x^n) \rightharpoonup f(x) \ \text{in}\ Y \quad \text{für}\ n \to \infty \ .$$

Bemerkung:

- Man kann diese Begriffe analog für schwach∗ konvergente Folgen definieren.

Zunächst soll noch ein klassisches Resultat präsentiert werden. Hierbei sind noch keine Informationen über partielle Ableitungen der Folgen gegeben. Dementsprechend restriktiv ist die Forderung an f.

Satz 3.2:
Für Ω beschränkt betrachtet man eine Funktion $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, das nach (3.1) mit f assoziierte Funktional ϕ_f und schwach∗ konvergente Folgen aus $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

(1) *Falls f konvex ist, dann ist ϕ_f $L^\infty-$schwach∗ folgenunterhalbstetig.*

(2) *Das Funktional ϕ_f sei $L^\infty-$schwach∗ folgenunterhalbstetig, dann muss f konvex sein.*

Beweis. (1) Diese klassische Aussage findet man in [Cia13, S.669] und [Dac82, S.7].

(2) Für $\theta \in (0,1)$ gibt es eine Folge charakteristischer Funktionen $(\chi_\theta^n)_n$, die schwach∗, aber nicht stark, gegen θ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ konvergiert (Korollar 1.12). Mit $a, b \in \mathbb{R}^M$ definiert man die Folge

$$u^n := \chi_\theta^n a + (1-\chi_\theta^n) b \ \text{mit}\ u^n \overset{*}{\rightharpoonup} \theta a + (1-\theta) b \ \ \text{in}\ L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M) \ ,$$

sodass gilt:

$$f(u^n) = \chi_\theta^n f(a) + (1-\chi_\theta^n) f(b) \overset{*}{\rightharpoonup} \theta f(a) + (1-\theta) f(b) \ \ \text{in}\ L^\infty(\Omega;\mathbb{R}) \ .$$

Mit der schwach∗ Folgenunterhalbstetigkeit des Funktionals erhält man die Behauptung

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}(\Omega)\,(\theta f(a) + (1-\theta) f(b)) &= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(u^n)\,dx \\ &\geq \int_\Omega f(u)\,dx = \operatorname{meas}(\Omega) f(\theta a + (1-\theta) b) \ . \end{aligned}$$

□

Nun soll die notwendige Bedingung für f abgeschwächt werden, indem man Informationen über die Ableitungen der betrachteten Folgen $(u^n)_n$ ausnutzt. Die Ableitungen sind im Folgenden je nach gegebener Regularität im distributionellen, schwachen oder gar klassischen Sinne zu verstehen.

Die Informationen, die man über die Ableitungen einer Funktionenfolge $(u^n)_n \subset L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ hat, werden beschrieben durch $q \in \mathbb{N}$ lineare Differentialoperatoren

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} \quad \text{für } i = 1,\ldots,q\,. \tag{3.2}$$

Die Kontrolle, die man nicht hat, wird durch eine für diese Operatoren **charakteristische Menge** beschrieben:

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^M \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}\, :\, \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\lambda_j\xi_k = 0 \;\text{ für } i = 1,\ldots,q \right\}. \tag{3.3}$$

Die Koeffizienten a_{ijk} seien reell für alle $i = 1,\ldots,q$, $j = 1,\ldots,M$ und $k = 1,\ldots,N$. Man kann sich (3.2) formal auch mit Hilfe von Matrizen und Vektoren veranschaulichen:

$$\nabla^T A_i\, u^n \quad A_i \in \mathbb{R}^{N\times M} \quad \text{für } i = 1,\ldots,q\,,\ \text{mit } A_i = [a_{ijk}]_{j,k=1}^{M,N} \ \text{ und } \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 4: Charakteristische Mengen
Betrachtet man den Fall $M = N$, so kann man die Divergenz mit der Identitätsmatrix I_N darstellen:

$$\nabla^T I_N u = \nabla \cdot u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_N}{\partial x_N} = \operatorname{div} u\,.$$

Als charakteristische Menge des Divergenz-Operators ergibt sich nun

$$\Lambda_{\text{div}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}\, :\, \lambda\cdot\xi = 0 \right\} = \{\lambda \,|\, \exists\xi \neq 0\, :\, \lambda \perp \xi\} = \mathbb{R}^N\,.$$

Die geometrische Bedeutung ist, dass man zu einem λ ein $\xi \neq 0$ finden muss, welches orthogonal zu λ ist. Möchte man die Rotation eines Vektorfeldes beschreiben, benötigt man allerdings schon N^2 Matrizen

$$A_{i_{(jk)}} = \begin{cases} a_{mn} = -1 & m = j \neq k = n \\ a_{mn} = 1 & m = k \neq j = n \\ a_{mn} = 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \nabla^T A_{i_{(jk)}} u = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{für } j,k = 1,\ldots,N\,.$$

Die Fälle $j = k$ sind hierbei offensichtlich überflüssig, gehören aber formal zur Definition. Aufgrund der Symmetrie sind eigentlich auch die Hälfte der verbleibenden Fälle redundant. Für die Rotation ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{curl}} &= \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}\, :\, \lambda_j\xi_k = \xi_j\lambda_k \;\text{ für alle } j,k = 1,\ldots,N \right\} \\ &= \{\lambda \,|\, \exists\xi \neq 0\, :\, \lambda \parallel \xi\} = \mathbb{R}^N\,.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Äquivalenz zur geometrischen Forderungen der Parallelität kann man sich wie folgt erschließen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\xi_1 \neq 0$, dann gilt

$$\gamma := \frac{\lambda_1}{\xi_1} = \frac{\lambda_k}{\xi_k} \quad \text{für } k = 1,\ldots,N \text{ und } \xi_k \neq 0\,.$$

Der Fall $\xi_k = 0$ impliziert nach der Bedingung (3.4) sofort $\lambda_k = 0$, da $\xi \neq 0$ gefordert wird. Für alle $k = 1,\ldots,N$ folgt somit

$$\lambda_k = \gamma\xi_k \quad \text{und somit } \lambda \parallel \xi\,.$$

Die Rückrichtung ist offensichtlich erfüllt.
Falls man sowohl die Divergenz als auch die Rotation beschränken kann, ergibt sich

$$\Lambda_{\text{div}+\text{curl}} = \{\lambda \,|\, \exists \xi \neq 0 \,:\, \lambda \perp \xi \text{ und } \lambda \parallel \xi\} = \{0\} \,.$$

Allgemein impliziert $\Lambda = \{0\}$, dass jede partielle Ableitung $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ kontrolliert werden kann. Angenommen $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ kann nicht kontrolliert werden, das heißt, mit den Einheitsvektoren $e_j \in \mathbb{R}^M$ und $e_k \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$e_j^T A_i e_k = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, q \,.$$

Dies impliziert insbesondere

$$\{0\} \subsetneq \left\{\lambda \in \mathbb{R}^M \,\middle|\, \lambda = \gamma e_j \;\text{ für } \gamma \in \mathbb{R}\right\} \subset \Lambda \,.$$

In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, dass in dem Fall $\Lambda = \{0\}$ der Hauptsatz der kompensierten Kompaktheit einem Kompaktheitsargument entspricht. $\diamondsuit$

Der nachfolgende Satz wird nun die Forderung an f aus Satz 3.2 abschwächen, sodass f nur noch in nicht kontrollierbare Richtungen konvex sein muss.

Satz 3.3:
Wenn für $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ und für alle Folgen $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$ mit

$$f(u^n) \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ in } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{ und } \quad \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} \frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, q \tag{3.5}$$

folgt, dass

$$v(x) \geq f(u(x)) \text{ fast überall auf } \Omega \text{ gilt.} \tag{3.6}$$

Dann muss f konvex in jede Richtung aus der charakteristischen Menge Λ sein, das heißt die Funktion $t \mapsto f(a + t\lambda)$ muss für alle $a \in \mathbb{R}^M$ und für alle $\lambda \in \Lambda$ konvex sein.

Beweis. Für $y \in \mathbb{R}^M$, $\lambda \in \Lambda$ und ξ nach (3.3) mit λ assoziiert, definiert man mit einer Funktion $\varphi^n \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

$$u^n(x) := y + \varphi^n(\xi \cdot x)\lambda \,.$$

Diese Folge erfüllt die zweite Bedingung von (3.5), denn es gilt

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} \frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} \lambda_j \xi_k \frac{\partial \varphi_j^n}{\partial x_k} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, q \,.$$

Für $\theta \in (0,1)$ existiert eine Folge von charakteristischen Funktionen $(\chi_\theta^n)_n$, die schwach$*$, aber nicht stark, in $L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ gegen θ konvergiert (Korollar 1.12). Mit $\varphi^n := \chi_\theta^n$ folgt

$$u^n \overset{*}{\rightharpoonup} \theta(y + \lambda) + (1 - \theta)y \text{ in } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M) \,,$$
$$f(u^n) \overset{*}{\rightharpoonup} \theta f(y + \lambda) + (1 - \theta) f(y) \text{ in } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \,.$$

Allerdings ist die Bedingung (3.5) nur noch im Sinne von Distributionen erfüllt, das heißt, es gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} \int_\Omega (y_j + \chi_\theta^n(\xi \cdot x)\lambda_j) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} \, dx = 0 \,.$$

Mit der Voraussetzung (3.6) und $\omega \subset \Omega$ beschränkt folgt

$$\int_\Omega \chi_\omega f\left(\theta(y+\lambda)+(1-\theta)y\right)\,dx \le \int_\Omega \chi_\omega\left(\theta f(y+\lambda)+(1-\theta)f(y)\right)\,dx\;.$$

Insbesondere folgt damit

$$f\left(\theta(y+\lambda)+(1-\theta)y\right) \le \theta f(y+\lambda)+(1-\theta)f(y)\;. \tag{3.7}$$

Für $\mu \in (0,1)$, $\tilde\lambda \in \Lambda$ sowie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^M$ folgt die Behauptung aus (3.7), denn mit $\mu = \theta$, $y = a + t_2\tilde\lambda$ und $\lambda = (t_1 - t_2)\tilde\lambda$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f\left(a+(\mu t_1+(1-\mu)t_2)\tilde\lambda\right) &= f\left(\mu(a+t_2\tilde\lambda+(t_1-t_2)\tilde\lambda)+(1-\mu)(a+t_2\tilde\lambda)\right)\\ &\le \mu f(a+t_1\tilde\lambda)+(1-\mu)f(a+t_2\tilde\lambda)\;. \end{aligned}$$

□

Der Satz 3.3 besagt, dass, falls das Funktional ϕ_f für Folgen, die (3.5) erfüllen, schwach$*$ folgenunterhalbstetig ist, f in alle Richtungen aus Λ konvex sein muss. Diese Eigenschaft nennt man auch **$\Lambda-$konvex**. Vergleicht man diese Aussage nun mit dem klassischen Resultat (Satz 3.2), ergibt sich Folgendes. Wenn man mehr Informationen über die Folge $(u^n)_n$ besitzt, kann man eventuell mehr Freiheiten für f zulassen. Mit $\Lambda \subset \mathbb{R}^M$ ist offensichtlich jede konvexe Funktion auch $\Lambda-$konvex.

Korollar 3.4:
Unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 sei f eine Funktion, sodass die obigen Bedingungen $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)$ und (3.5) implizieren, dass gilt:

$$v(x) = f(u(x)) \text{ fast überall auf } \Omega\;. \tag{3.8}$$

Dann muss f affin in jede Richtung aus Λ sein. Die Funktion $t \mapsto f(a+t\lambda)$ muss also für alle $a \in \mathbb{R}^M$ und für alle $\lambda \in \Lambda$ affin sein.

Beweis. Die Funktion f erfüllt die Voraussetzungen von Satz 3.3. Also muss f konvex in Richtung von Λ sein. Dank der Gleichheit in (3.8) erfüllt auch $-f$ mit dem Grenzwert $-v$ die Voraussetzungen von Satz 3.3, sodass $-f$ konvex und f konkav in Richtung von Λ sein muss. Eine Funktion, die konkav und konvex ist, ist affin. □

Damit die Funktion f also $L^\infty-$schwach$*$-schwach$*$ stetig sein kann, muss f nach dem Korollar 3.4 $\Lambda-$affin sein.
Das folgende Beispiel soll die Aussagen von Satz 3.3 und Korollar 3.4 an separat konvexen Funktionen veranschaulichen.

Beispiel 5: Separat Konvex
Für $N = 2 = M$ seien Folgen $(u_1^n)_n$ und $(u_2^n)_n$ mit $u_1^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_1$ und $u_2^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_2$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ gegeben. Angenommen es gilt $\frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} = 0$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left\{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \,:\, \lambda_1\xi_1 = \lambda_2\xi_2 = 0\right\}\\ &= \{(\lambda_1,\lambda_2) \,|\, \lambda_1 = 0 \text{ oder } \lambda_2 = 0\} \subsetneq \mathbb{R}^2\;. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.3 muss $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in jeder Variable einzeln konvex, aber nicht insgesamt konvex sein, damit ϕ_f schwach$*$ folgenunterhalbstetig sein kann. Solche Funktionen f nennt man auch **separat konvex**.

Damit f aufgefasst als eine Funktion von $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)$ nach $L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ schwach$*$-schwach$*$ stetig sein kann, muss f nach Korollar 3.4 separat affin sein. Mit einer affinen Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ muss f die Gestalt haben:

$$f(\lambda_1,\lambda_2) = g(\lambda_1,\lambda_2) + c\lambda_1\lambda_2 \ .$$

Betrachtet man allerdings $N = 3 = M$ und zusätzlich $u_3^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_3$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\frac{\partial u_3^n}{\partial x_3} = 0$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \ : \ \lambda_1\xi_1 = \lambda_2\xi_2 = \lambda_3\xi_3 = 0\right\} \\ &= \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mid \text{ mindestens ein } \lambda_i = 0\} \subsetneq \mathbb{R}^3 \ .\end{aligned}$$

Damit f schwach$*$-schwach$*$ stetig sein kann, muss $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Form haben:

$$f = \text{ affin } + \text{ quadratisch } \ .$$

Da der quadratische Term für $\lambda_i = 0$, $i = 1,2,3$, jeweils verschwinden muss, muss er identisch 0 sein. $\diamondsuit$

Das nächste Beispiel aus [Dac82, S.26 f.] zeigt, dass diese notwendigen Kriterien nicht unbedingt hinreichend sein müssen.

Beispiel 6: Nicht Hinreichend
Für $N = 2$ und Ω beschränkt seien $u_1^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_1, u_2^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_2$ und $u_3^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_3$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, also $M = 3$, gegeben mit:

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3^n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^n}{\partial x_2} = 0 \ .$$

In diesem Fall gilt für die charakteristische Menge

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \ : \ \lambda_1\xi_1 = \lambda_2\xi_2 = \lambda_3(\xi_1+\xi_2) = 0\right\} \\ &= \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mid \text{ mindestens zwei } \lambda_i = 0\} \ .\end{aligned}$$

Die Funktion $f(u) = f(u_1,u_2,u_3) := u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ erfüllt die notwendigen Bedingungen aus Korollar 3.4. Die Funktion f ist aber nicht schwach$*$-schwach$*$ stetig. Man betrachtet die Folgen

$$\begin{cases} u_1^n = \sin(nx_2) & \overset{*}{\rightharpoonup} 0 = u_1 \\ u_2^n = \cos(nx_1) & \overset{*}{\rightharpoonup} 0 = u_2 \\ u_3^n = \sin(n(x_1-x_2)) & \overset{*}{\rightharpoonup} 0 = u_3 \end{cases} \quad \text{mit } \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3^n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^n}{\partial x_2} = 0 \ .$$

Da die Funktion

$$v(x) = v(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_2) \\ \cos(x_1) \\ \sin(x_1-x_2) \end{pmatrix}$$

in jeder Variablen $2\pi-$periodisch ist, folgt mit Satz 1.11 die schwach$*$ Konvergenz in L^∞ gegen 0. Mit diesen Folgen ergibt sich

$$f(u_1^n,u_2^n,u_3^n) = \frac{1}{4}\sin(2nx_1)\sin(2nx_2) - (\sin(nx_2))^2\,(\cos(nx_1))^2 \overset{*}{\rightharpoonup} -\frac{1}{4} \neq 0 = f(0,0,0) \ ,$$

da aufgrund der $2\pi-$Periodizität wieder mit Satz 1.11 folgt:

$$\frac{1}{4}\sin(2nx_1)\sin(2nx_2) \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{ und } \quad (\sin(nx_2))^2\,(\cos(nx_1))^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{4} \ .$$

$\diamondsuit$

Unter welchen Umständen die Bedingungen aus Satz 3.3 und Korollar 3.4 auch hinreichend sind, wird der nächste Abschnitt teilweise beantworten.

3.2 Hinreichende Kriterien

In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass die notwendigen Bedingungen aus Satz 3.3 und Korollar 3.4 im Falle einer quadratischen Form sogar in größeren Funktionenräumen, nämlich L^2_{loc} statt nur L^∞, hinreichend sind.
Man betrachtet eine quadratische Form $Q : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ und die zu Q assoziierte Form $\tilde{Q} : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}$, welche stets stetig sind. Nach der Polarisationsformel ([Fis10, S.291 f.]) gibt es zu Q eine symmetrische Bilinearform $B : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ und zu $\tilde{Q}$ eine hermitesche Sesquilinearform $\tilde{B} : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} & B(a,b) = \frac{1}{2}\left(Q(a+b) - Q(a) - Q(b)\right) && (3.9)\\ \text{und}\quad & B(a,a) = Q(a) \quad \text{für alle } a,b \in \mathbb{R}^M\ , \\ & \tilde{B}(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\tilde{Q}(x+y) - \tilde{Q}(x-y) + i\tilde{Q}(x+iy) - i\tilde{Q}(x-iy)\Big) && (3.10)\\ \text{und}\quad & \tilde{B}(x,x) = \tilde{Q}(x) \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{C}^M\ . \end{aligned}$$

Weiterhin ist es von Nutzen, dass man Q und $\tilde{Q}$ beziehungsweise B und $\tilde{B}$ mit einer symmetrischen Matrix $M_Q \in \mathbb{R}^{M\times M}$ identifizieren kann, sodass mit dem euklidischen Skalarprodukt $\cdot$ für alle $a,b \in \mathbb{R}^M$ und $x,y \in \mathbb{C}^M$ gilt:

$$B(a,b) = (M_Q a)\cdot b \quad \text{und} \quad \tilde{B}(x,y) = (M_Q x)\cdot y \quad \text{sowie} \quad \tilde{Q}(x) = (M_Q x)\cdot x\ .$$

Auch hier steckt die komplexe Konjugation wieder in dem Skalarprodukt.
Eine erste wichtige Folgerung aus dieser Darstellung und der Linearität der Fourier-Transformation ist eine Variante der Plancherel-Formel, welche in dem Beweis des Hauptsatzes benutzt wird:

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q(u)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(M_Q u)\cdot \mathcal{F}u\ d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} (M_Q \mathcal{F}u)\cdot \mathcal{F}u\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{Q}(\mathcal{F}u)\,d\xi\ . \qquad (3.11)$$

Mit Hilfe der Matrix-Darstellung erschließt sich außerdem für $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{C}^M)$ mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz A.4)

$$\int_K |\tilde{Q}(u)|\,dx \leq |M_Q| \int_K |u|^2\,dx \text{ für alle kompakten } K \subset \Omega\ .$$

Die Abbildung $x \mapsto M_Q x$ ist stetig und linear, also folglich auch schwach-schwach stetig (Satz A.10). Somit gilt insbesondere für $u^n \rightharpoonup u$ in $L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ und $v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^M)$

$$\int_\Omega B(u^n,v)\varphi\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega B(u,v)\varphi\,dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})\ . \qquad (3.12)$$

Bevor nun der Hauptsatz der kompensierten Kompaktheit formuliert und bewiesen wird, soll ein dafür benötigtes Lemma bewiesen werden. Dieses liefert eine Abschätzung für den Realteil einer hermiteschen Form.

Lemma 3.5:
Gegeben sei eine hermitesche Form $\tilde{Q}$ mit $\operatorname{Re}(\tilde{Q}(\lambda)) \geq 0$ für alle $\lambda \in \Lambda + i\Lambda$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante C_ε, sodass für alle $x \in \mathbb{C}^M$ und $\eta \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ gilt:

$$\operatorname{Re}(\tilde{Q}(x)) \geq -\varepsilon|x|^2 - C_\varepsilon \sum_{i=1}^{q} \left| \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} x_j \frac{\eta_k}{|\eta|} \right|^2\ . \qquad (3.13)$$

Beweis. Angenommen (3.13) gilt nicht, dann gibt es ein ε_0, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ Paare $(x^n, \eta^n) \in \mathbb{C}^M \times \mathbb{R}^N$ existieren mit

$$\mathrm{Re}\,(\tilde{Q}(x^n)) < -\varepsilon_0 |x^n|^2 - n \sum_{i=1}^{q} \left| \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} x_j^n \frac{\eta_k^n}{|\eta^n|} \right|^2 .$$

Ohne Beschränkung darf man $x^n \neq 0$ und $|x^n| = 1$ für alle n ab einem n_0 annehmen (man dividiere beide Seiten durch $|x^n|^2$) und erhält eine gegen ein x konvergente Teilfolge $(x^m)_m$ für $m \to \infty$. Andernfalls gibt es eine gegen 0 konvergente Teilfolge. Da die Folge $(\eta^m/|\eta^m|)_m$ ebenfalls beschränkt ist, erhält man wiederum eine gegen $\frac{\eta}{|\eta|}$ konvergente Teilfolge, welche wieder mit n indiziert wird, sodass aus

$$\sum_{i=1}^{q} \left| \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} x_j^n \frac{\eta_k^n}{|\eta^n|} \right|^2 < \frac{\mathrm{Re}\,(\tilde{Q}(x^n)) + \varepsilon_0}{-n}$$

für $n \to \infty$ folgt

$$\sum_{i=1}^{q} \left| \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} x_j \frac{\eta_k}{|\eta|} \right|^2 \leq 0 .$$

Dies impliziert sowohl $\mathrm{Re}\,(\tilde{Q}(x)) \leq -\varepsilon_0$ als auch $x \in \Lambda + i\Lambda$. Aber dies widerspricht der Annahme

$$\mathrm{Re}\,\tilde{Q}(\lambda) \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda + i\Lambda .$$

□

Mit diesem Lemma und der Fourier-Transformation (Abschnitt 2.1) kann nun der Hauptsatz der kompensierten Kompaktheit bewiesen werden.

Satz 3.6: Hauptsatz der kompensierten Kompaktheit
Es sei $Q : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form mit $Q(\lambda) \geq 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Weiterhin sei eine Folge $u^n \rightharpoonup u$ in $L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ gegeben mit

$$\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} \frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} \right)_n \quad \text{ist relativ kompakt in } H^{-1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}) \text{ für } i = 1, \dots, q . \tag{3.14}$$

Falls eine $\mathcal{M}(\Omega)-$schwach$*$ gegen ein $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ konvergente Teilfolge $(u^m)_m$ existiert mit

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega Q(u^n)\phi \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega Q(u^m)\phi \, dx = \langle \mu, \phi \rangle_{\mathcal{M},C_c} ,$$

für alle $\phi \in C_c(\Omega; \mathbb{R})$, dann folgt für alle $\phi \in C_c(\Omega; \mathbb{R})$ mit $\phi \geq 0$

$$\langle \mu, \phi \rangle_{\mathcal{M},C_c} \geq \int_\Omega Q(u)\phi \, dx . \tag{3.15}$$

Bemerkung:

- Die Forderung $Q(\lambda) \geq 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$ ist für quadratische Formen äquivalent zur $\Lambda-$Konvexität. Denn betrachtet man die zweite Ableitung von $p(t) := Q(a + t\lambda)$, so gilt
$$p''(t) \geq 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad Q(\lambda) \geq 0 .$$

- Die Bedingung (3.14) bedeutet, dass eine in H^{-1}_{loc} stark konvergente Teilfolge existiert.

Beweis. Ähnlich zu dem Beweis des div-curl-Lemmas reduziert man zunächst das Problem und verlagert es in den Bereich der Fourier-Transformierten. Dann ist man in der Lage, ähnliche Konvergenz Resultate zu erzielen. Mit dem obigen Lemma kann man schließlich den nichtlokalen Teil beschränken.

(1) Für $\varphi \in C^1_c(\Omega;\mathbb{R})$ betrachtet man zunächst die Folge

$$v^n := \varphi u^n - \varphi u \; .$$

Mit der Polarisationsformel (3.9) folgt aus

$$\int_\Omega Q(v^n)\,dx = \int_\Omega \varphi^2 Q(u^n) - 2\varphi^2 B(u^n,u) + \varphi^2 Q(u)\,dx$$

mit der Eigenschaft (3.12) und für $n \to \infty$, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega Q(v^n)\,dx = \langle \mu, \varphi^2\rangle - \int_\Omega \varphi^2 Q(u)\,dx \; .$$

Somit ist die zu beweisende Aussage (3.15) mit einer noch auszuführenden Dichtheitsargumentation bezüglich der Testfunktionen äquivalent zu

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega Q(v^n)\,dx \geq 0 \; . \tag{3.16}$$

Für die so definierte Folge $(v^n)_n$ gilt mit einem kompakten K nach den Voraussetzungen an $(u^n)_n$

$$v^n \rightharpoonup 0 \text{ in } L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}) \text{ und } \operatorname{supp}(v^n) \subset K = \operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \; .$$

Nach (3.14) existiert eine in $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R})$ stark konvergente Teilfolge, wieder mit n indiziert, sodass mit $v^n \rightharpoonup 0$ folgt:

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\frac{\partial v_j^n}{\partial x_k} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ in } H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}) \; . \tag{3.17}$$

Nach dieser Lokalisierung mit Hilfe des kompakten Trägers der Testfunktion φ ist das Problem wieder stets ein lokales. Somit kann man im Folgenden $\Omega = \mathbb{R}^N$ betrachten und die Einschränkung *loc* an die Räume L^2 und H^{-1} für v^n fallen lassen.

(2) Mit der Plancherel-Formel (nach (3.11)) gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_K Q(v^n)\,dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{Q}(\mathcal{F}v^n)\,dx \; .$$

Für $(\mathcal{F}v^n)_n$ ergeben sich analog zu dem Beweis des div-curl-Lemma die folgenden Eigenschaften.

(a) Die Folge $(\mathcal{F}v^n)_n$ konvergiert schwach gegen 0 in $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}^M)$.

(b) Die Folge $(\mathcal{F}v^n)_n$ konvergiert punktweise gegen 0.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|\mathcal{F}v^n\|_\infty < \tilde{M} < \infty$.

Mit der punktweisen Konvergenz und der Majorante $\tilde{M}$ folgt mit dem Satz von Lebesgue (Satz 1.3) in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}^M)$ die starke Konvergenz

$$\mathcal{F}v^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ in } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}^M)\ .$$

Das Problem ist nun zumindest auf der Einheitskugel B_1 unter Kontrolle.

(3) Um das Lemma 3.5 nutzen zu können, zeigt man einige Eigenschaften für Q und $\tilde{Q}$. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}^M$ mit $x, y \in \mathbb{R}^M$ gilt

$$\tilde{Q}(z) = Q(x) + Q(y) + iB(x,y) - iB(x,y) = Q(x) + Q(y) = \operatorname{Re}(\tilde{Q}(z))\ .$$

Insbesondere folgt daraus

$$\operatorname{Re}(\tilde{Q}(\tilde{\lambda})) \geq 0 \quad \text{für alle } \tilde{\lambda} \in \Lambda + i\Lambda$$

genau dann, wenn gilt

$$Q(\lambda) \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda\ .$$

Somit reduziert sich das Problem darauf, zu zeigen, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mathcal{F}v^n)\, d\xi \geq 0\ .$$

(4) Mit der alternativen Charakterisierung des Sobolew-Raums $H^{-1}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ folgt aus (3.17), dass für alle $i = 1, \ldots, q$ gilt:

$$\frac{1}{1+|\xi|} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} \mathcal{F}v_j^n(\xi)\xi_k \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})\ .$$

Betrachtet man nun also $|\xi| \geq 1$, so folgt mit dem Lemma 3.5 für $x = \mathcal{F}v^n(\xi)$, $\eta = \xi$ und ein $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} \operatorname{Re}(\tilde{Q}(\mathcal{F}v^n))\, d\xi \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} -\varepsilon|\mathcal{F}v^n|^2 - C_\varepsilon \sum_{i=1}^{q} \left| \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\mathcal{F}v^n(\xi)\frac{\xi_k}{|\xi|} \right|^2 d\xi \\
&\geq -\varepsilon \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |\mathcal{F}v^n|^2\, d\xi \\
&\qquad - \liminf_{n\to\infty} C_\varepsilon \sum_{i=1}^{q} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} \left(\frac{1+|\xi|}{|\xi|}\right)^2 \left| \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\mathcal{F}v^n(\xi)\frac{\xi_k}{1+|\xi|} \right|^2 d\xi \\
&\geq -\varepsilon \liminf_{n\to\infty} \tilde{M}^2 - 4\, C_\varepsilon \sum_{i=1}^{q} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} \left| \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\mathcal{F}v^n(\xi)\frac{\xi_k}{1+|\xi|} \right|^2 d\xi \\
&\geq -\varepsilon\tilde{M}^2\ .
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt nun mit den bisherigen Ergebnissen und für $\varepsilon > 0$ beliebig klein die Behauptung (3.16):

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} Q(v^n)\,dx &= \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{Q}(\mathcal{F}v^n)\,d\xi \\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mathcal{F}v^n)\,d\xi \\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_{B_1} \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mathcal{F}v^n)\,d\xi + \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} \operatorname{Re}\tilde{Q}(\mathcal{F}v^n)\,d\xi \\ &\geq 0 - \varepsilon\tilde{M}^2\,.\end{aligned}$$

(5) Aufgrund der Dichtheit gibt es für alle $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ eine Folge $(\varphi^m)_m \subset C_c^1(\Omega;\mathbb{R})$ mit

$$\|\varphi^m - \phi\|_\infty \to 0 \quad \text{für } m \to \infty\,.$$

Die Abbildung $\phi \mapsto \phi^2$ ist eine Bijektion auf $\{\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}) \,|\, \phi \geq 0\}$. Somit genügt es mit $\varphi^2 \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R})$ zu testen, da gilt:

$$\|(\varphi^m)^2 - \phi^2\|_\infty \leq \|\varphi^m - \phi\|_\infty\,(\|\varphi^m\|_\infty + \|\phi\|_\infty) \xrightarrow{m\to\infty} 0\,.$$

Mit (5) kann somit die Voraussetzung aus (1) fallen gelassen werden. Nach (4) ist der Hauptsatz nun bewiesen und es gilt für alle $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\phi \geq 0$

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega Q(u^n)\phi\,dx \geq \int_\Omega Q(u)\phi\,dx\,.$$

□

Das folgende Beispiel soll die Aussage des Hauptsatzes und das klassische Resultat (Satz 3.2) vergleichen.

Beispiel 7: Nicht-Konvexe Quadratische Form
Falls $\Lambda \neq \mathbb{R}^M$ gilt, gibt es nicht-konvexe quadratische Formen Q, die die Voraussetzung $Q(\lambda) \geq 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$ erfüllen. Eine solche $\Lambda-$konvexe, aber nicht insgesamt konvexe, quadratische Form ist gegeben durch

$$Q_\varepsilon(u) := |u|^2 - (1+\varepsilon)(u\cdot a)^2 \;\text{ für } a \in \mathbb{R}^M \text{ mit } |a| = 1\,.$$

Die quadratische Form Q_ε ist positiv bis auf eine kleine kegelförmige Umgebung um a. Wählt man $a \notin \Lambda$, so erfüllt Q_ε die Voraussetzung. Nach dem Haupsatz ist nun das Funktional

$$\phi_\varphi(u) = \int_\Omega \varphi Q_\varepsilon(u)\,dx \quad \text{für } \varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}) \text{ mit } \varphi \geq 0$$

schwach$*$ folgenunterhalbstetig für Folgen $(u^n)_n \subset L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, die die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllen. ♢

Korollar 3.7:
Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes gelte zusätzlich $Q(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Dann folgt für alle $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega Q(u^n)\phi\,dx = \int_\Omega Q(u)\phi\,dx\,.$$

Beweis. Sowohl Q als auch $-Q$ erfüllen die Voraussetzungen des Hauptsatzes. Deshalb gilt für alle $\phi \in C_c(\Omega)$ mit $\phi \geq 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega Q(u^n)\phi\,dx \geq \int_\Omega Q(u)\phi\,dx \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega -Q(u^n)\phi\,dx \geq \int_\Omega -Q(u)\phi\,dx\ .$$

Somit gibt es eine Teilfolge $(u^m)_m$, sodass für alle $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\phi \geq 0$ oder $\phi \leq 0$ gilt:

$$\int_\Omega Q(u^m)\phi\,dx \xrightarrow{m\to\infty} \int_\Omega Q(u)\phi\,dx\ .$$

Jedes $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ lässt sich zerlegen in $\phi = \phi_1 + \phi_2$ mit $\phi_1, \phi_2 \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\phi_1 \geq 0$ und $\phi_2 \leq 0$, denn mit $\phi_1 := \max\{0,\phi\} \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ gilt

$$\phi = \phi_1 + (\phi - \phi_1) \ \text{ und } (\phi - \phi_1) \leq 0\ .$$

Mit dem schwachen Teilfolgenprinzip (Satz A.8) folgt für die gesamte Folge und für alle $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$

$$\int_\Omega Q(u^n)\phi\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega Q(u)\phi\,dx\ .$$

□

Mit Hilfe der Aussagen des Abschnitts 3.1 und dem Hauptsatz soll nun das div-curl-Lemma hergeleitet und dessen Präzision hervorgehoben werden.

Beispiel 8: Das div-curl-Lemma
Man betrachtet für $M = 2N$ eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$. Weiterhin seien $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ und $v^n \overset{*}{\rightharpoonup} v$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ gegeben mit $\operatorname{div} u^n = 0$ und $\operatorname{curl} v^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Beispiel 4 zu charakteristischen Mengen

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^{2N} \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \,:\, \lambda \perp \xi \text{ und } \mu \parallel \xi\right\} \\ &= \left\{(\lambda,\mu) \,\middle|\, \lambda \perp \mu\right\}\ .\end{aligned}$$

Damit $f : (u,v) \mapsto f(u,v)$ schwach$*$-schwach$*$ stetig sein kann, muss f nach Korollar 3.4 affin in jede Richtung (λ,μ) mit $\lambda \cdot \mu = 0$ sein. Für $\lambda = 0$ und danach $\mu = 0$ folgt, dass f affin in μ für festes λ und affin in λ für festes μ sein muss. Demnach muss f folgende Struktur haben:

$$f(\lambda,\mu) = \text{affin} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij}\lambda_i\mu_j \ \text{ mit } m_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für alle } i,j = 1,\ldots,N\ .$$

Der quadratische Teil muss allerdings für alle Richtungen mit $\lambda \cdot \mu = 0$ verschwinden. Es gilt also

$$f = \text{affin} + \alpha(\lambda \cdot \mu)\ .$$

Jede in L^∞ schwach$*$ konvergente Folge konvergiert nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz A.4) auch schwach in L^2_{loc}. Die quadratische Form $Q((\lambda,\mu)) = \lambda \cdot \mu$ erfüllt die Voraussetzungen von Korollar 3.7 für Folgen $((u^n,v^n))_n \subset L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^{2N})$ mit $(\operatorname{div} u^n)_n$ relativ kompakt in $H^{-1}_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R})$ und $(\operatorname{curl} v^n)_n$ relativ kompakt in $H^{-1}_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$. Es werden also mehr Folgen zugelassen, als bei dem notwendigen Kriterium betrachtet wurden. Mit dem Korollar 3.7 folgt für alle $\varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$

$$\int_\Omega \varphi(u^n \cdot v^n)\,dx = \int_\Omega \varphi Q((u^n,v^n))\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega \varphi Q((u,v))\,dx = \int_\Omega \varphi(u\cdot v)\,dx\ .$$

Dies ist die Aussage des div-curl-Lemmas. Außerdem ist diese quadratische Form die einzige nicht-affine Abbildung, für welche diese Folgerung gilt. Somit war das historisch erste auch schon ein erstaunlich präzises Resultat. ♢

3.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sollen nun die Resultate der kompensierten Kompaktheit aus den Abschnitten 3.1 und 3.2 mit klassischen Argumenten verglichen werden.
Für den Fall $\mathbf{\Lambda} = \mathbb{R}^{\boldsymbol{M}}$ liefern diese Aussagen der kompensierten Kompaktheit ein klassisches **Konvexitätsresultat**. Mit dem Hauptsatz folgt dann, dass für konvexe quadratische Formen Q das Funktional

$$\phi_\varphi(u) = \int_\Omega \varphi Q(u)\, dx \qquad \text{für } \varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}) \ \text{ mit } \varphi \geq 0$$

schwach folgenunterhalbstetig ist. Wenn man nicht genug Kontrolle über die Ableitungen hat, kann man also auch keine besseren Aussagen treffen.
Der Fall $\mathbf{\Lambda} = \{\mathbf{0}\}$ entspricht einem klassischen **Kompaktheitsargument**, denn jede quadratische Form erfüllt $Q(0) = 0$. Für eine Folge $(u^n)_n$, die die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt, betrachtet man die negativ definite quadratische Form

$$Q(u) := -|u|^2 = -(u \cdot u)\ .$$

Analog zu Schritt (1) in dem Beweis des Hauptsatzes betrachtet man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Differenzfolge $v^n := (u^n - u) \rightharpoonup 0$ in $L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Dann gilt nach dem Hauptsatz für $\varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\varphi \geq 0$

$$-\int_\Omega \varphi|0|^2\, dx = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega -\varphi|v^n|^2\, dx \leq 0\ .$$

Für $K \subset \Omega$ kompakt und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $\phi_\varepsilon \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\phi_\varepsilon \geq 0$, sodass gilt:

$$\int_\Omega |\chi_K - \phi_\varepsilon|\, dx < \varepsilon\ .$$

Mit diesem Approximationsargument folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \int_K |u^n - u|^2\, dx = 0\ .$$

Es gibt also eine gegen u in L^2_{loc} stark konvergente Teilfolge von $(u^n)_n$.
Die hier präsentierten Resultate der kompensierten Kompaktheit sind also neue Argumente für die Fälle $\{0\} \neq \Lambda \neq \mathbb{R}^M$. Man nutzt die Informationen, die man über die Ableitungen der betrachteten Folgen hat, um mehr Nichtlinearität zulassen zu können.

Beispiel 9: Elektrostatik
Betrachtet man mit diesen Erkenntnissen nochmals das Beispiel aus der Elektrostatik, muss man feststellen, dass dieses Standardbeispiel ([Tar79]) nicht unbedingt ein gutes Beispiel ist.

$$\begin{aligned} v^n &= -\nabla g^n && (3.18)\\ u^n &= \alpha v^n && (3.19)\\ \operatorname{div} u^n &= h^n && (3.20)\\ u^n \cdot v^n &= f^n && (3.21)\end{aligned}$$

Die Gleichung 3.19 impliziert, dass nicht die charakteristische Menge

$$\left\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^{2N} \,\middle|\, \exists \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}\ :\ \lambda \perp \xi \text{ und } \mu \parallel \xi\right\}$$

aus dem Beispiel 8 vorliegt. Es gilt mit $M = N$ nach Beispiel 4

$$\Lambda_{\operatorname{div}+\operatorname{curl}} = \{0\} \ .$$

Somit existiert nach der obigen Überlegung eine in L^2_{loc} stark konvergente Teilfolge von $(u^n)_n$. ♢

Im Falle eines Kompaktheitsargumentes erhält man insbesondere auch die Konvergenz der Produkte der einzelnen Komponenten, wohingegen mit dem div-curl-Lemma im Allgemeinen nicht $u_i^n v_i^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_i v_i$ in $\mathcal{M}(\Omega)$ folgt. Die Summe kompensiert also das Verhalten, oder auch die mangelnde Kompaktheit, der einzelnen Terme.
Abschließend soll ein *echtes* Kompensationsbeispiel konstruiert werden, da die gängige Literatur kein entsprechend einfaches und anschauliches Beispiel bietet.

Beispiel 10: Kompensationsbeispiel
Für $N = 2$ und Ω beschränkt betrachtet man die Folgen $(u^n)_n$ und $(v^n)_n$ aus $L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$u^n := \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(nx_1)\cdot\sin(nx_2) \\ \cos(nx_1)\cdot\cos(nx_2) \end{pmatrix} \text{ mit } u^n \rightharpoonup 0 = u \text{ in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \ ,$$
$$v^n := \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(nx_1)\cdot\sin(nx_2) \\ -\cos(nx_1)\cdot\cos(nx_2) \end{pmatrix} \text{ mit } v^n \rightharpoonup 0 = v \text{ in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \ .$$

Die schwache Konvergenz gegen 0 folgt jeweils aus Satz 1.11, da u^1 und v^1 in jeder Variablen $2\pi-$periodisch sind. Für die Divergenz von u^n gilt

$$\operatorname{div} u^n = n\cos(nx_1)\cdot\sin(nx_2) - n\cos(nx_1)\sin(nx_2) = 0 \ .$$

Weiterhin erhält man für die Rotation von v^n, $\operatorname{curl} v^n = 0$, denn es gilt:

$$\frac{\partial v_1^n}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2^n}{\partial x_1} = n\sin(nx_1)\cdot\cos(nx_2) - n\sin(nx_1)\cdot\cos(nx_2) = 0$$

Damit folgt für die Produkte der einzelnen Koordinaten wieder mit der $2\pi-$Periodizität und Satz 1.11

$$u_1^n \cdot v_1^n = \sin^2(nx_1)\cdot\sin^2(nx_2) \rightharpoonup \frac{1}{4} \gneq 0 = u_1\cdot v_1 \ ,$$
$$u_2^n \cdot v_2^n = -\cos^2(nx_1)\cdot\cos^2(nx_2) \rightharpoonup -\frac{1}{4} \lneq 0 = u_2\cdot v_2 \ .$$

Nun ist die Produktfolge insbesondere in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ für $1 < p < \infty$ beschränkt, somit folgt im Einklang mit dem div-curl-Lemma (Satz 2.10)

$$u^n\cdot v^n = \sin^2(nx_1)\cdot\sin^2(nx_2) - \cos^2(nx_1)\cdot\cos^2(nx_2) \rightharpoonup \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 = u\cdot v \text{ in } L^p(\Omega;\mathbb{R}) \ .$$

♢

4 Ausblick

In diesem letzten Kapitel sollen weitere interessante Aspekte, Verallgemeinerungen und Erweiterungen der Theorie der kompensierten Kompaktheit präsentiert werden. Es wird weiterhin das Funktional

$$\phi_f(u) := \int_\Omega \varphi f(u)\,dx$$

mit einer stetigen Funktion f und $\varphi \in C_c(\Omega;\mathbb{R})$ mit $\varphi \geq 0$ betrachtet.

Nach Beispiel 5 muss, bei entsprechender Kontrolle über die Ableitungen, die Funktion f nur noch separat konvex sein, damit ϕ_f schwach folgenunterhalbstetig sein kann. Das Beispiel 6 zeigt, dass diese Eigenschaft allein nicht hinreichend ist. Allerdings gibt es auch für allgemeine separat konvexe Funktionen hinreichende Kriterien. In [LMM12] wird ein hinreichendes Kriterium für separat konvexe Funktionen unter zusätzlichen Beschränktheitsvoraussetzungen bewiesen.

Neben separat konvex und $\Lambda-$konvex gibt es in der Theorie der kompensierten Kompaktheit noch weitere Konvexitätsbegriffe von besonderem Interesse. Dazu gehört die sogenannte $\mathcal{A}-$Quasi-Konvexität (siehe Definition A.15). Für diese Verallgemeinerung der $\Lambda-$Konvexität wird unter anderem in [Dac82, S.15 f.] ein hinreichendes Kriterium für die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von ϕ_f bewiesen.

Die Kontrolle über die partiellen Ableitungen ist in Kapitel 3 stets durch $q \in \mathbb{N}$ lineare Differentialoperatoren

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} \quad \text{für } i = 1,\dots,q$$

mit $a_{ijk} \in \mathbb{R}$ für $i = 1,\dots,q$ und $j = 1,\dots,M$ sowie $k = 1,\dots,N$ gegeben. Mit zusätzlichem Aufwand kann man auch komplexe Koeffizienten behandeln. Möchte man allerdings variable Koeffizienten zulassen, reicht die hier eingeführte Theorie bei Weitem nicht mehr aus. Eine sehr interessante Erweiterung in diese Richtung ist die Theorie der $H-$Maße. Diese wurde 1987 von Luc Tartar eingeführt ([Tar09, S.329]). Eine Einführung in die Theorie der $H-$Maße findet sich in [Tar09, Kap.28 ff.]. Mit Hilfe dieser Theorie kann man nun für die Informationen beziehungsweise die Kontrolle über die partiellen Ableitungen auch variable Koeffizienten $a_{ijk} \in C(\Omega;\mathbb{R})$ zulassen. Man kann also Funktionenfolgen $u^n \rightharpoonup u$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}^M)$ mit

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial(a_{ijk}u_j^n)}{\partial x_k} \text{ ist relativ kompakt in } H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$$

für $a_{ijk} \in C(\Omega;\mathbb{R})$ betrachten. Eine entsprechende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der kompensierten Kompaktheit wird in [Tar09, S.341] bewiesen.

A Anhang

In den folgenden beiden Abschnitten werden Definitionen und Theoreme aufgeführt, die zwar in dieser Arbeit verwendet, aber nicht im Verlauf eingeführt wurden.

A.1 Schwache Konvergenz

Satz A.1:
In jedem normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|_X)$ gilt:
(a) Der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge ist eindeutig.
(b) Eine schwach konvergente Folge ist beschränkt.
(c) Für $x^n \rightharpoonup x$ gilt: $\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|_X$.

Beweis. [Cia13, S.288]. □

Definition A.2:
Sei X ein normierter Vektorraum.
(a) X heißt reflexiv, falls die kanonische Abbildung $J : X \to (X')'$ mit $J(x)(f) := f(x)$ für $f \in X'$ surjektiv ist.
(b) X ist separabel, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Satz A.3: Rieszscher Darstellungssatz in Hilbert-Räumen
Zu jedem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ existiert genau ein Isomorphismus $R : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ mit:

$$(Rf, x)_{\mathcal{H}} = \langle f, x\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}} \quad \text{und} \quad |Rf|_{\mathcal{H}} = |f|_{\mathcal{H}'}$$

für alle $f \in \mathcal{H}'$ und für alle $x \in \mathcal{H}$.

Beweis. [Cia13, S.197]. □

Satz A.4: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
*In jedem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$ die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**:*

$$|(x, y)_{\mathcal{H}}| \leq \sqrt{(x, x)_{\mathcal{H}}}\sqrt{(y, y)_{\mathcal{H}}}\,.$$

Beweis. [Cia13, S.175]. □

Definition A.5:
Ein normierter Vektorraum X heißt eingebettet in den normierten Vektorraum Y, falls es eine injektive Abbildung $j : X \to Y$ mit $j(x) = x$ gibt. Ist j stetig, so heißt X stetig eingebettet in Y (symbolisch $X \hookrightarrow Y$). Ist $j(X)$ dicht in Y, so heißt X dicht in Y eingebettet ($X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$). Besitzt für jede in X beschränkte Folge $(x^n)_n$ die Folge $(j(x^n))_n$ eine in Y konvergente Teilfolge, dann heißt X kompakt eingebettet in Y ($X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$).

Satz A.6: Eberlein-Šmulian
In einem reflexiven Banach-Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis. [Wer07, S.107 f.] und [Sch13, S.77]. □

Satz A.7:
Seien X und Y Banach-Räume und X dicht in Y eingebettet. Dann gilt
(a) $X \hookrightarrow Y$ impliziert $Y' \hookrightarrow X'$,
(b) $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ impliziert $Y' \overset{c}{\hookrightarrow} X'$.
(c) Falls X reflexiv und stetig in Y eingebettet ist, dann ist Y' dicht in X' eingebettet.

Beweis. [Zei90, S.265 f.]. □

Satz A.8: Schwaches Teilfolgenprinzip
Sei $(x^n)_n$ eine in dem Banach-Raum X beschränkte Folge. Konvergieren alle schwach konvergenten Teilfolge von $(x^n)_n$ gegen das gleiche $x \in X$, so konvergiert auch $(x^n)_n$ schwach gegen x.

Beweis. [GGZ74, S.10]. □

Satz A.9:
Eine Folge $(x^n)_n$ konvergiert genau dann schwach gegen x in einem normierten Vektorraum X, wenn für eine dichte Teilmenge $D \subset X'$ gilt:

$$f(x^n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \text{ für alle } f \in D \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\| < \infty \,.$$

Beweis. [Yos95, S.121]. □

Satz A.10:
Seien X und Y normierte Vektorräume.
(a) Sei $A : X \to Y$ linear und stetig, dann ist A auch schwach-schwach stetig.
(b) Sei $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear, dann gilt für $x^n \rightharpoonup x$ in X und $y^n \to y$ in Y $B(x^n, y^n) \to B(x, y)$ in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$.

Beweis. [Cia13, S.290 f.]. □

A.2 Funktionenräume

Satz A.11: Eigenschaften der L^p−Räume
Der Raum $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ ist für $1 \le p \le \infty$ ein Banach-Raum. Abhängig von p gelten weitere Eigenschaften.
(a) Für $1 \le p < \infty$ liegt der Raum der Treppenfunktionen, der Raum $C_c(\Omega;\mathbb{C})$ und der Raum $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dicht in $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ und $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ ist separabel.
(b) Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ reflexiv.
(c) Der Raum $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega u \cdot v \, dx \quad \text{für alle } u, v \in L^2(\Omega;\mathbb{C})$$

ein Hilbert-Raum.

Beweis. [AF03, Kap.2]. □

Satz A.12: Eigenschaften von Sobolew-Räumen
Die Sobolew-Räume $W^{m,p}(\Omega;\mathbb{C})$ (Definition 1.8) sind, versehen mit den entsprechenden Normen

$$\|f\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

separable Banach-Räume. Diese sind für $1 < p < \infty$ reflexiv.
Die Räume $H^m(\Omega;\mathbb{C}) := W^{m,2}(\Omega;\mathbb{C})$ sind Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt:

$$(u,v)_{H^m} := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq m} \int_\Omega \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \cdot \partial^{\boldsymbol{\alpha}} v \, dx \quad \textit{für alle } u,v \in H^m(\Omega;\mathbb{C}) \, .$$

Beweis. [AF03, Kap.3]. □

Satz A.13: Spursatz von Lions
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein offenes, beschränktes Lipschitz-Gebiet, ν der äußere Normalen-Vektor und $s > \frac{1}{2}$.
(a) Es gibt eine eindeutige lineare und stetige Abbildung

$$\gamma_0 \,:\, H^s(\Omega;\mathbb{R}) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R}), \textit{ sodass } \gamma_0(v) = v_{|\partial\Omega} \; \forall v \in \left(H^s(\Omega;\mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega};\mathbb{R})\right) \, .$$

(b) Es gibt eine lineare und stetige Abbildung

$$\mathcal{R}_0 \,:\, H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R}) \to H^s(\Omega;\mathbb{R}), \textit{ sodass } \gamma_0 \mathcal{R}_0 \varphi = \varphi \; \forall \varphi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R}) \, .$$

(c) Weiterhin gibt es eine eindeutige lineare und stetige Abbildung

$$\gamma^* \,:\, H(\operatorname{div};\Omega;\mathbb{R}^N) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R}^N) \, ,$$
$$\textit{sodass } \gamma^* v = (v \cdot \nu)_{|\partial\Omega} \; \forall v \in \left(H(\operatorname{div};\Omega;\mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega};\mathbb{R}^N)\right) \, .$$

(d) Außerdem gibt es eine lineare und stetige Abbildung

$$\mathcal{R}^* \,:\, H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R}^N) \to H(\operatorname{div};\Omega;\mathbb{R}^N), \textit{ sodass } \gamma^* \mathcal{R}^* \varphi = \varphi \; \forall \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbb{R}^N) \, .$$

Beweis. [LM72]. Für eine Defintion von $H(\operatorname{div};\Omega;\mathbb{R}^N)$ siehe [Tar07, Kap. 20]. □

Satz A.14: Rellich-Kondrachov
Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Dann ist die Einbettung $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{C}) \hookrightarrow L^q(\Omega;\mathbb{C})$ kompakt für $q < \dfrac{N \cdot p}{N - p}$. Für $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{C})$ ist die gleiche Einbettung kompakt ohne Voraussetzungen an den Rand von Ω.

Beweis. [Bre11, S.285] und [Dob10, S.116]. □

Definition A.15: $\mathcal{A}-$Quasi-Konvexität
Eine Funktion $f \,:\, \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ heißt $\mathcal{A}-$quasi-konvex, falls gilt:

$$\int_D f(y + \zeta(x)) \, dx \geq \int_D f(y) \, dx$$

für alle $y \in \mathbb{R}^M$, jeden achsenparallelen Würfel $D \subset \mathbb{R}^N$ und für alle ζ aus :

$$\left\{ \zeta \in L^\infty(D,\mathbb{R}^M) \,\middle|\, \int_D \zeta \, dx = 0 \textit{ und } \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N a_{ijk} \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_k} = 0 \textit{ für } i = 1,\ldots,q \right\} .$$

Literaturverzeichnis

[AF03] Adams, Robert A. ; Fournier, John J.: *Sobolev Spaces.* Second Edition. Elsevier Ltd., 2003

[Bau92] Bauer, Heinz: *Maß- und Integrationstheorie.* 2. Auflage. de Gruyter, 1992

[Bre11] Brezis, Haim: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 2011

[CD99] Cioranescu, Doina ; Donato, Patrizia: *An Introduction to Homogenization.* Oxford University Press, 1999

[CDM11] Conti, Sergio ; Dolzmann, Georg ; Müller, Stefan: The div-curl lemma for sequences whose divergence and curl are compact in $W^{-1,1}$. In: *Comptes Rendus Math.* 349 (2011), S. 175–1778

[Cia13] Ciarlet, Phlippe G.: *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications.* siam, 2013

[Dac82] Dacorogna, Bernard: *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals.* Springer-Verlag, 1982

[Dob10] Dobrowolski, Manfred: *Angewandte Funktionalanalysis.* 2. Auflage. Springer-Verlag, 2010

[Fis10] Fischer, Gerd: *Linear Algebra.* 17. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, 2010

[FN09] Feireisl, Eduard ; Novotný, Antonýn: *Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids.* Birkhäuser Verlag, 2009

[For11] Forster, Otto: *Analysis 3.* 6. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, 2011

[GGZ74] Gajewski, Herbert ; Gröger, Konrad ; Zacharias, Klaus: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie-Verlag, 1974

[GM08] Gasser, Ingenuin ; Marcati, Pierangelo: On a generalization of the “Div-Curl lemma”. In: *Osaka Journal of Mathematics* 45(1) (2008), S. 211–214

[Hör83] Hörmander, Lars: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag, 1983

[Kab13] Kaballo, Winfried: *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie.* Springer-Verlag, 2013

[LM72] Lions, J.L. ; Magenes, E.: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Springer-Verlag, 1972

[LMM12] Lee, Jihoon ; Müller, Paul F. X. ; Müller, Stefan: Compensated Compactness, Separately convex Funcitons and Interpolatory Estimates between Riesz Transforms and Haar Projections. In: *Communications in Partial Differential Equations* 36 (2012), S. 547–601

[Mur78] Murat, François: Compacité par compensation. In: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (4)* V (1978), S. 489–507

[Sch13] Schweizer, Ben: *Partielle Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, 2013

[Tar79] Tartar, Luc: Compensated compactness and applications to partial differential equations. In: *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium* Bd. Volume IV. Pitman Advanced Publishing Program, 1979

[Tar07] Tartar, Luc: *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces.* Springer-Verlag, 2007

[Tar09] Tartar, Luc: *The General Theory of Homogenization.* Springer-Verlag, 2009

[Vis07] Visintin, Augusto: Two-scale div-curl lemma. In: *Annli della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (5)* VI (2007), S. 1–31

[Wer07] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis.* 6. Auflage. Springer-Verlag, 2007

[Yos95] Yosida, Kôsaku: *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1995

[Zei90] Zeidler, Eberhard: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A.* Springer-Verlag, 1990