Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Maximumprinzip für elliptische und parabolische Gleichungen

Bachelorarbeit
im Studiengang Technomathematik

angefertigt von
Anna Lorenz
Matrikelnummer 332026

betreut von Dr. Hans-Christian Kreusler

24. September 2013

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbständige und eigenhändige Anfertigung versichert an Eides statt:

Berlin, den 24. September 2013

....
Anna Lorenz

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Zur Motivation betrachten wir ein einfaches Anwendungsbeispiel aus der Physik: Gegeben sei ein dreidimensionaler, zylindrischer, homogener Festkörper. Das Innere des Körpers bezeichnen wir mit Z, seine Oberfläche mit ∂Z. Die Temperatur an der Stelle $x \in Z$ zum Zeitpunkt t sei gegeben durch $u(x,t)$. Die lokale und zeitliche Änderung der Temperatur wird durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben:

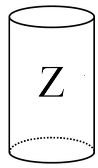

Abbildung 0.1

$$c \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0. \qquad \text{(WLG)}$$

Dabei ist die Temperaturleitfähigkeit c eine positive Konstante, welche von dem Material abhängt, aus dem der Zylinder besteht. Uns beschäftigt die Frage, welche Aussagen wir über die Temperaturverteilung u, ohne ein tiefergehendes Studium der physikalischen Zusammenhänge, aus der Gleichung (WLG) herleiten können. Insbesondere interessieren wir uns dafür, wo (in $\bar{Z}$) und wann (in einem Zeitintervall $[0,T]$) Temperaturextrema auftreten können. Wir werden auf den allgemeinen Fall später zurückkommen. An dieser Stelle wollen wir zunächst annehmen, dass sich die Temperatur mit der Zeit nicht (mehr) ändert. In diesem Fall gilt $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Wir können u dann als Funktion auffassen, die nur von x abhängt: $u = u(x)$. (WLG) reduziert sich somit zu

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } Z.$$

Diese Gleichung heißt *Laplace-Gleichung*.
Die Temperatur auf dem Rand des Zylinders sei fest vorgegeben (von außen gesteuert), muss aber nicht notwendigerweise über den gesamten Rand konstant sein.
Die Alltagserfahrung lehrt uns, dass Wärme stets von einem Medium höherer Temperatur auf eines niedrigerer Temperatur übergeht, niemals umgekehrt. Temperaturunterschiede werden mit der Zeit ausgeglichen. Deshalb erscheint es intuitiv klar, dass jedes Temperaturmaximum im Innern des Zylinders mit der Zeit verschwinden muss. Hat sich eine stationäre Temperaturverteilung eingestellt, so können die höchste und die niedrigste Temperatur nur auf dem Rand ∂Z angenommen werden. In der Tat werden wir diese Vermutung schon am Ende des ersten Kapitels bestätigen können. Das Resultat folgt als einfache Anwendung des Maximumprinzips für harmonische Funktionen, welches bereits auf Carl Friedrich Gauß und Samuel Earnshaw (1838/39)[1] zurückgeht.

Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Maximumprinzip nach Eberhard Hopf und verallgemeinern unsere ersten Ergebnisse auf elliptische Differentialausdrücke. Anschließend werden parabolische Gleichungen betrachtet. Dieser Aufbau folgt der historischen Entwicklung. Im vierten Abschnitt wenden wir uns schließlich einigen Anwendungen zu.

[1] Diese Angabe stammt aus [12, S.156].

1 Herleitung des Maximumprinzips für subharmonische Funktionen aus einer Mittelwertungleichung

Wir präsentieren im Folgenden eine Zusammenstellung von Inhalten aus unterschiedlichen Quellen. Im Einzelnen beziehen wir uns auf [12, Kapitel 2, Abschnitt 1], [3, Abschnitte 2.2.2 und 2.2.3] und [6, Kapitel 2.1 und 2.2].

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d.h. eine offene, zusammenhängende, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Norm und es sei $u \in C^2(D)$. Für $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist der Laplace-Operator Δ definiert durch

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x).$$

Die Funktion u heißt **subharmonisch** , falls gilt

$$\Delta u(x) \geq 0 \qquad\qquad \forall x \in D.$$

Angenommen die Funktion u nimmt in einem Punkt $\hat{x} \in D$ ein Maximum an. Dann ist die Hessematrix H_u von u an dieser Stelle negativ semidefinit, das heißt

$$y^T H_u(\hat{x}) y \leq 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Für $i \in \{1, ...n\}$ bezeichne e_i den i-ten Einheitsvektor. Man erhält dann insbesondere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\hat{x}) = e_i^T H_u(\hat{x}) e_i \leq 0$$

und es folgt

$$\Delta u(\hat{x}) \leq 0.$$

Somit kann eine Funktion, die die strikte Ungleichung $\Delta u(x) > 0$ für alle $x \in D$ erfüllt, in D kein Maximum annehmen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass dieselbe Aussage auch für subharmonische Funktionen gilt. Dazu zeigen wir zunächst die Gültigkeit folgender **Mittelwertungleichungen**:

Satz 1.1. *Sei $u \in C^2(D)$ mit $\Delta u \geq 0$ in D und es bezeichne ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel. Dann gilt für jede Kugel $B(\hat{x}, R)$ um $\hat{x} \in D$ mit Radius R, deren Abschluss vollständig in D enthalten ist*

$$\begin{aligned} u(\hat{x}) &\leq \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},R)} u(x)\, do(x) \qquad\qquad \textit{und} \\ u(\hat{x}) &\leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B(\hat{x},R)} u(x)\, dx. \end{aligned}$$

Beweis: Für $0 < r \leq R$ definieren wir die Hilfsfunktion ϕ durch

$$\phi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x).$$

Um nach r differenzieren zu können, transformieren wir zunächst auf die n-dimensionale Einheitskugel[1] und setzen

$$y = \frac{1}{r}(x - \hat{x}), \qquad \text{beziehungsweise} \qquad x = \hat{x} + ry \qquad \text{und} \qquad do(x) = r^{n-1} do(y).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(\hat{x} + ry)\, do(y) \\ \text{und somit} \qquad \phi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla u(\hat{x} + ry) \cdot y\, do(y). \end{aligned}$$

Die Rücktransformation liefert nun

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} \nabla u(x) \cdot \left(\frac{1}{r}(x - \hat{x})\right) do(x).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{r}(x - \hat{x})$ stellt den nach außen gerichteten Normalenvektor an die Kugeloberfläche $\partial B(\hat{x}, r)$ an der Stelle x dar. Mit dem Gauß'schen Integralsatz[2], der Beziehung $div(grad\, u) = \Delta u$ und den Voraussetzungen an u folgt

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{B(\hat{x},r)} \Delta u(x)\, dx \geq 0.$$

Somit ist ϕ monoton wachsend. Die erste Behauptung ergibt sich jetzt aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},R)} u(x)\, do(x) = \phi(R) &\geq \lim_{r \to 0} \phi(r) \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x). \end{aligned}$$

Da u stetig ist, finden wir zu jedem beliebigen $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|u(x) - u(\hat{x})| < \epsilon$, für alle $x \in D$ mit $|x - \hat{x}| < \delta$. Somit folgt für $r < \delta$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x) - u(\hat{x}) \right| &= \left| \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x) - u(\hat{x})\, do(x) \right| \\ \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} |u(x) - u(\hat{x})|\, do(x) &\leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} n\omega_n r^{n-1} \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x) = u(\hat{x}).$$

Um die zweite Ungleichung zu zeigen führen wir das Volumenintegral auf das Oberflächenintegral zurück.[1] Es gilt

$$\int\limits_{B(\hat{x},R)} u(x)\, dx = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x)\, dr \geq u(\hat{x}) n\omega_n \int\limits_{r=0}^{R} r^{n-1}\, dr = u(\hat{x})\omega_n R^n.$$

□

[1] vergleiche dazu die Bemerkungen über n-dimensionale Polarkoordinaten im Anhang
[2] siehe zum Beispiel [14, S. 300]

Die Ausdrücke $\omega_n R^n$ und $n\omega_n R^{n-1}$ entsprechen dem Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R bzw. deren Oberflächeninhalt. Der Wert der Funktion u an der Stelle $\hat{x}$ lässt sich also durch den Mittelwert der Funktion auf einer beliebigen Kugel um $\hat{x}$ bzw. auf dem Rand einer beliebigen Kugel um $\hat{x}$ abschätzen.

Nehmen wir nun an, u sei subharmonisch und besitze in $\hat{x} \in D$ ein globales Maximum mit $u(\hat{x}) = M$. Wegen $u(x) \leq M$ in D und dem letzten Satz folgt

$$M = u(\hat{x}) \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B(\hat{x},R)} u(x)\, dx \leq M$$

für R hinreichend klein, so dass $\bar{B}(\hat{x}, R)$ in D enthalten ist. Gleichheit kann nur gelten, falls $u \equiv M$ in $\bar{B}(\hat{x}, R)$. Damit ist die Menge $A := \{x \in D \mid u(x) = M\}$ offen in D. Da u stetig und $\{M\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist, ist A auch abgeschlossen in D. Weil D zusammenhängend ist, folgt daraus schon $A = D$. Andernfalls wäre D die Vereinigung zweier offener, disjunkter, nichtleerer Teilmengen, nämlich A und $D\backslash A$. Also ist u konstant in D. Ist D beschränkt und u auch auf dem Rand von D stetig, so nimmt u nach dem Satz von Weierstraß ein Maximum in $\bar{D}$ an. Mit unseren bisherigen Überlegungen folgt, dass dieses Maximum auf dem Rand ∂D angenommen werden muss. Wir haben somit das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen bewiesen:

Satz 1.2. *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(D)$ subharmonisch in D.*

1. *Nimmt u in $\hat{x} \in D$ ein globales Maximum an, mit $u(\hat{x}) = M$, so gilt*

$$u \equiv M \text{ in } D. \qquad \text{(starkes Maximumprinzip)}$$

2. *Ist D beschränkt und $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, so gilt*

$$\max_{x\in\bar{D}} u(x) = \max_{x\in\partial D} u(x). \qquad \text{(schwaches Maximumprinzip)}$$

Eine auf dem Gebiet D definierte Funktion u heißt **harmonisch**, falls

$$\Delta u(x) = 0 \qquad \forall x \in D.$$

Es sei D beschränkt, $u, v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, u subharmonisch und v harmonisch in D und $u = v$ auf ∂D. Es gilt dann $\Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v \geq 0$. Somit ist $u - v$ subharmonisch und außerdem gilt $(u - v) = 0$ auf ∂D. Aus dem Maximumprinzip folgern wir $0 \geq (u - v)(x)$, beziehungsweise $v(x) \geq u(x) \quad \forall x \in D$. Das heißt eine subharmonische Funktion nimmt im Innern eines beschränkten Gebiets stets kleinere Werte an als eine harmonische Funktion, mit der sie auf dem Rand des Gebiets übereinstimmt. Dies erklärt den Begriff *subharmonisch.*

Umgekehrt sagt man, die auf dem Gebiet D definierte Funktion u sei **superharmonisch**, falls die Ungleichung $\Delta u \leq 0$ in D erfüllt ist. In diesem Fall erhält man durch Anwendung des Maximumprinzips auf die subharmonische Funktion $-u$ ein entsprechendes Minimumprinzip. Harmonische Funktionen können somit im Innern eines Gebiets weder Maxima noch Minima annehmen, es sei denn sie sind konstant in diesem Gebiet.

Zum Ende dieses Abschnitts kommen wir auf unser Eingangsbeispiel zurück. Mit der Annahme, die Temperatur sei konstant in der Zeit, konnten wir die Wärmeverteilung in dem Zylinder durch die Gleichung

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } Z$$

beschreiben. Da jede Lösung u der Laplace-Gleichung harmonisch ist, folgt, dass sowohl die minimale, als auch die maximale Temperatur nur auf dem Rand von Z angenommen werden können, es sei denn die Temperatur ist in dem gesamten Zylinder konstant.

2 Maximumprinzip für elliptische Differentialgleichungen

Es sei auch in diesem Abschnitt stets $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten für $u \in C^2(D)$ Differentialausdrücke der Form

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x).$$

Dabei sollen die Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c: \ D \to \mathbb{R}$ beschränkt sein, d.h. sie sollen D in eine in $\mathbb{R}$ beschränkte Menge abbilden.

Nach dem Satz von Schwarz gilt $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$. Wir können deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_{ij} = a_{ji}$ annehmen. Damit ist die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ für jedes $x \in D$ symmetrisch.

L heißt **elliptisch** an einer Stelle $x \in D$, falls es ein $\mu = \mu(x) > 0$ gibt, so dass für alle $y = (y_1, ..., y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \quad \geq \quad \mu(x)\sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

oder in Matrixschreibweise $$y^T A(x) y \quad \geq \quad \mu(x)|y|^2.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn die Matrix $A(x)$ positiv definit ist. Insbesondere sind dann alle Eigenwerte von A positiv. L heißt elliptisch in D, falls L in jedem $x \in D$ elliptisch ist. L heißt **gleichmäßig elliptisch** in D, falls L in D elliptisch ist und μ unabhängig von x gewählt werden kann, d.h. falls es ein $\mu_0 > 0$ gibt, so dass $\mu(x) \geq \mu_0$ für alle $x \in D$. Dies ist äquivalent dazu, dass die Abbildung $x \mapsto A(x)$ in D gleichmäßig positiv definit ist.

Angenommen L sei elliptisch und die strikte Ungleichung $Lu(x) > 0$ sei in D erfüllt. Weiterhin soll zunächst der Koeffizient c identisch verschwinden, also $c(x) \equiv 0$ in D. Ähnlich wie schon im vorausgegangenen Abschnitt können wir uns überlegen, dass dann die Funktion u in D kein Maximum annehmen kann. Die Folgende Argumentation ist dem Buch von Evans [3, S. 327 f.] entnommen. Angenommen u besitzt an der Stelle $\hat{x} \in D$ ein Maximum. Dann gilt an dieser Stelle

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\hat{x}) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\hat{x}) \leq 0 \qquad \text{für } i \in \{1, ..., n\}.$$

Da $A(\hat{x})$ symmetrisch ist, gibt es gemäß einem bekannten Resultat aus der linearen Algebra eine orthogonale Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, so dass gilt

$QA(\hat{x})Q^T = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von $A(\hat{x})$ bezeichnen.

Für die einzelnen Einträge ergibt sich somit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\hat{x}) q_{ki} q_{lj} = (QA(\hat{x})Q^T)_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \lambda_k, & k = l. \end{cases}$$

Nun führen wir eine einfache Koordinatentransformation durch und berechnen die entsprechenden partiellen Ableitungen nach der Kettenregel.

Wir setzen $\quad y = \hat{x} + Q(x - \hat{x}), \quad$ beziehungsweise $\quad y_i = \hat{x}_i + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(x_j - \hat{x}_j)$

und erhalten $\quad \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} = q_{ij}, \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial y_k} q_{ki} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} q_{ki} q_{lj}.$

Mit $y(\hat{x}) = \hat{x}$ gilt auch $\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}(\hat{x}) \leq 0$ und weil L in $\hat{x}$ elliptisch ist, gilt $\lambda_k > 0$, $k = 1, ...n$. Insgesamt haben wir

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\hat{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}(\hat{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}(\hat{x}) q_{ki} q_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}(\hat{x}) \lambda_k \leq 0.$$

An einer Stelle $\hat{x} \in D$ an der u ein Maximum annimmt, müsste somit gelten

$$Lu(\hat{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\hat{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\hat{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\hat{x}) \leq 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $Lu > 0$ in D. Fordern wir für den Koeffizienten c nur $c(x) \leq 0$ in D, so kann u in D kein nichtnegatives Maximum annehmen, da dann für den zusätzlich Term gilt $c(\hat{x})u(\hat{x}) \leq 0$. Also erhalten wir auch in diesem Fall $Lu(\hat{x}) \leq 0$ und einen Widerspruch.

Wir werden dieses Resultat weiter unten benötigen und formulieren es deshalb als Lemma:

Lemma 2.1. *Es sei $u \in C^2(D)$, so dass die strikte Ungleichung $Lu > 0$ in D erfüllt werde.*

1. *Falls $c \equiv 0$, so kann u in D kein lokales Maximum annehmen.*
2. *Gilt nur $c \leq 0$ in D, so kann u in D kein nichtnegatives lokales Maximum annehmen.*

Wir werden dieses Lemma nun verwenden um das starke Maximumprinzip von Eberhard Hopf (1927)[1] zu beweisen. Dabei folgen wir im weiteren der Darstellung in [12, Kapitel 2, Abschnitt 3].

Satz 2.2. *Es sei $u \in C^2(D)$, L in D gleichmäßig elliptisch und die Ungleichung $Lu \geq 0$ sei überall in D erfüllt.*

1. *Gilt $c \equiv 0$ und u nimmt an der Stelle $\hat{x} \in D$ ein globales Maximum M an, so folgt*
$$u \equiv M \qquad \text{in } D.$$
2. *Gilt nur $c \leq 0$ und nimmt u in $\hat{x}$ ein nichtnegatives globales Maximum an, so folgt ebenfalls*
$$u \equiv M \qquad \text{in } D.$$

[1] E. Hopf. *Elementare Bemerkungen über die Lösung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.* Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 19 (1927), 147-152; auch abgedruckt in [11]

Beweis: Angenommen die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt, aber u ist nicht konstant. Dann gibt es $P_0 \in D$ mit $u(P_0) < M$. Da D offen und zusammenhängend ist, ist D auch wegzusammenhängend. Das bedeutet, wir finden eine stetige Abbildung $w : [0,1] \to D$ mit $w(0) = P_0$ und $w(1) = \hat{x}$. Aufgrund der Stetigkeit von u und w, gibt es $\bar{\tau} \in (0,1]$ mit

$$u(w(\tau)) \begin{cases} < M, & \tau \in [0,\bar{\tau}) \\ = M, & \tau = \bar{\tau}. \end{cases}$$

Es ist dann also $P_1 = u(w(\bar{\tau}))$ der erste Punkt auf dem Weg von P_0 zu $\hat{x}$ mit $u(P_1) = M$. Da D offen ist, gibt es $\epsilon_1 > 0$, so dass $B(P_1, \epsilon_1)$ vollständig in D enthalten ist.

Es sei nun $P_2 \in B(P_1, \frac{\epsilon_1}{4}) \cap w([0,\bar{\tau}))$. Mit $u(P_2) < M$ und wegen Stetigkeit von u, gibt es $\epsilon_2 > 0$ so dass $u < M$ überall in $B(P_2, \epsilon_2)$ gilt. Dabei sei ϵ_2 maximal gewählt. Es gibt dann (mindestens) einen Punkt S auf dem Rand von $B(P_2, \epsilon_2)$ mit $u(S) = M$. Außerdem gilt dann $\epsilon_2 < \frac{\epsilon_1}{4}$ und somit ist $B(P_2, \epsilon_2)$ vollständig in $B(P_1, \epsilon_1)$ und somit auch in D enthalten.

Schließlich wählen wir $y \in B(P_2, \epsilon_2)$ mit $\epsilon_2 > r := |y - S|$, so dass $\bar{B}(y, r)$ (markierte Fläche in Abbildung 2.1) den Rand von $B(P_2, \epsilon_2)$ in S berührt und ansonsten vollständig in $B(P_2, \epsilon_2)$ enthalten ist. Somit gilt

$$u(x) < M \qquad \forall x \in \bar{B}(y,r) \backslash \{S\}, \qquad u(S) = M.$$

Auch $\bar{B}(S, \frac{r}{2})$ ist vollständig in D enthalten.

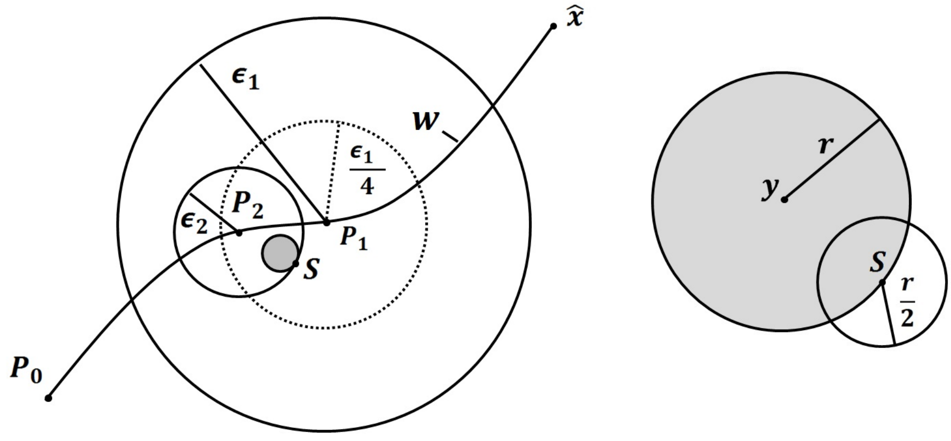

Abbildung 2.1

Für $\alpha > 0$ betrachten wir nun die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha r^2} = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} - e^{-\alpha r^2}.$$

Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_i} &= -2\alpha(x_i - y_i) e^{-\alpha|x-y|^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} &= \begin{cases} 4\alpha^2 (x_i - y_i)(x_j - y_j) e^{-\alpha|x-y|^2}, & i \neq j \\ (-2\alpha + 4\alpha^2 (x_i - y_i)^2) e^{-\alpha|x-y|^2}, & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} Lh(x) = \quad & e^{-\alpha|x-y|^2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} (4\alpha^2 a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)) \right. \\ & \left. -2\alpha \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}(x) + b_i(x)(x_i - y_i)) + c(x) \right) - c(x)e^{-\alpha r^2}. \end{aligned}$$

Da L gleichmäßig elliptisch ist, gibt es $\mu_0 > 0$, so dass

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \geq \mu_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \mu_0 |x - y|^2.$$

Für $x \in B(S, \frac{r}{2})$ gilt $|x - y|^2 \geq \frac{r^2}{4}$. Nach Voraussetzung haben wir $c(x) \leq 0$. Wir erhalten

$$Lh(x) \geq e^{-\alpha|x-y|^2} \Big(\alpha^2 \mu_0 r^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}(x) + b_i(x)(x_i - y_i)) + c(x) \Big).$$

Da die Koeffizienten a_{ii}, b_i und c, sowie der Ausdruck $|x - y|$ in $B(S, \frac{r}{2})$ beschränkt sind, kann α so groß gewählt werden, dass der Ausdruck in Klammern positiv wird. Es folgt

$$Lh(x) > 0 \qquad \forall x \in B(S, \frac{r}{2}).$$

Nun definieren wir für $\beta > 0$ eine weitere Hilfsfunktion $v : \bar{B}(S, \frac{r}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$v = u + \beta h.$$

Diese hat folgende Eigenschaften:

- Es gilt $u(x) < M \quad \forall x \in \bar{B}(y, r) \backslash \{S\}$ und weil u auf der kompakten Menge $\partial B(S, \frac{r}{2}) \cap \bar{B}(y, r)$ stetig ist, nimmt u dort ein Maximum $m < M$ an. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $h(x) < 1 - e^{-\alpha r^2}$. Wir wählen $\beta < \frac{M-m}{1-e^{-\alpha r^2}}$, dann folgt

  $$v(x) = u(x) + \beta h(x) < m + \frac{M - m}{1 - e^{-\alpha r^2}} (1 - e^{-\alpha r^2}) < M \quad \forall x \in \partial B(S, \frac{r}{2}) \cap \bar{B}(y, r).$$

- Auf $\partial B(S, \frac{r}{2}) \backslash \bar{B}(y, r)$ gilt $h(x) < 0$ und somit

  $$v(x) < M \quad \forall x \in \partial B(S, \frac{r}{2}) \backslash \bar{B}(y, r).$$

- $v(s) = u(s) + \beta h(s) = M + 0 = M.$

Da v auf $\bar{B}(S, \frac{r}{2})$ stetig ist, nimmt v dort ein Maximum an. Wir haben gezeigt, dass dieses im Innern von $B(S, \frac{r}{2})$ liegt und größer oder gleich M ist.

Andererseits gilt

$$Lv(x) = Lu(x) + \beta Lh(x) > 0 \quad \forall x \in B(S, \frac{r}{2}).$$

Mit Lemma 2.1 ergibt sich nun ein Widerspruch. □

Satz 2.2 ist das *starke Maximumprinzip*. Ist das Gebiet D beschränkt und die Funktion u stetig in $\bar{D}$, so nimmt u in $\bar{D}$ ein Maximum an. Falls $c \equiv 0$ in D, so folgt unmittelbar, dass dieses auf dem Rand ∂D liegen muss. Im Fall $c \leq 0$ in D gilt entweder $u \leq 0$ in $\bar{D}$ oder der größte positive Wert wird auf dem Rand angenommen. Diese Folgerung wird *schwaches Maximumprinzip* genannt.

Korollar 2.3. *Es sei D beschränkt, $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, L in D gleichmäßig elliptisch und die Ungleichung $Lu \geq 0$ sei überall in D erfüllt.*

1. *Falls $c \equiv 0$ so gilt*
$$\max_{x \in \bar{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x).$$

2. *Falls $c \leq 0$ so gilt*
$$\max_{x \in \bar{D}} u(x) \leq \max_{x \in \partial D} u^+(x), \qquad \textit{wobei } u^+(x) = \max\{0, u(x)\}.$$

Das schwache Maximumprinzip kann schon unter der Voraussetzung, dass L in D elliptisch, aber nicht notwendigerweise gleichmäßig elliptisch ist auch unabhängig von Satz 2.2 gezeigt werden; vergleiche dazu [3, Abschnitt 6.4]. Formuliert man die Voraussetzungen so um, dass sich Satz 2.2 und Korollar 2.3 auf $-u$ anwenden lassen, ($Lu \leq 0$ in D, u nehme in D ein - im Fall $c \leq 0$ nichtpositives - Minimum an), so erhält man entsprechende Minimumprinzipien. Gilt $c \leq 0$ auf einem beschränkten Gebiet D, auf dessen Rand u stetig ist, so erhält man

$$\min_{x \in \bar{D}} u(x) \geq -\max_{x \in \partial D} u^-(x), \qquad \text{wobei } u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}.$$

Das folgende *Randpunktlemma* geht ebenfalls auf Hopf (1952)[1] zurück. Wir folgen mit kleinen Änderungen dem Beweis, der in [12, S.65 f.] gegeben ist.

Satz 2.4. *Es sei $u \in C^2(D)$, L in D gleichmäßig elliptisch und die Ungleichungen $Lu \geq 0$ und $c \leq 0$ seien überall in D erfüllt. Weiterhin gelte $u \leq M$ in D, und falls c in D nicht identisch verschwindet, dann sei auch $M \geq 0$ gefordert . Es sei $\hat{x} \in \partial D$ mit $u(\hat{x}) = M$, so dass in $\hat{x}$ die* ***innere Kugelbedingung*** *erfüllt werde, das heißt es existiere $y \in D$ und $r > 0$ mit $B(y, r) \subset D$ und $\bar{B}(y, r) \cap \partial D = \{\hat{x}\}$. u sei stetig in $\hat{x}$ und es sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\nu \cdot (y - \hat{x}) > 0$ (ν zeigt ins Innere von $B(y, r)$). Falls u nicht konstant ist und die einseitige Richtungsableitung*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}) := \lim_{t \to 0, t > 0} \frac{u(\hat{x} + t\nu) - u(\hat{x})}{t}$$

existiert, so ist diese negativ:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}) < 0.$$

Beweis: Wir gehen vor, wie im Beweis von Satz 2.2 und betrachten die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha r^2}.$$

Dabei sei α so groß gewählt, dass

$$Lh(x) > 0 \quad \forall x \in B(\hat{x}, \frac{r}{2}).$$

Wir setzten wieder $v = u + \beta h$. Aus dem starken Maximumprinzip (Satz 2.2) folgt $u < M$ in D, also insbesondere $u < M$ in $\bar{B}(y, r) \backslash \{\hat{x}\}$ und β kann so klein gewählt werden, dass $v < M$ in $\partial B(\hat{x}, \frac{r}{2}) \cap \bar{B}(y, r)$ erfüllt ist. Auf $\partial B(y, r)$ gilt $h = 0$ und es folgt $v < M$ auch auf $\partial B(y, r) \backslash \{\hat{x}\}$. Somit gilt

$$v(x) < M \quad \forall x \in \partial(B(y, r) \cap B(\hat{x}, \frac{r}{2})) \backslash \{\hat{x}\}.$$

[1] E. Hopf. *A Remark on Linear Elliptic Differential Equations of Second Order.* Proceedings of the American Mathematical Society, 3 (1952), 791-793; auch abgedruckt in [11]

Mit $Lu \geq 0$ in D und $Lh > 0$ in $B(\hat{x}, \frac{r}{2})$ folgt

$$Lv(x) > 0 \qquad \forall x \in B(y,r) \cap B(\hat{x}, \frac{r}{2}).$$

Nach Lemma 2.1 kann die Funktion v kein Maximum im Innern von $B(y,r) \cap B(\hat{x}, \frac{r}{2})$ (vgl. markiertes Gebiet in Abbildung 2.2) annehmen. Wir haben also

$$v(x) < M \quad \forall x \in B(y,r) \cap B(\hat{x}, \frac{r}{2}).$$

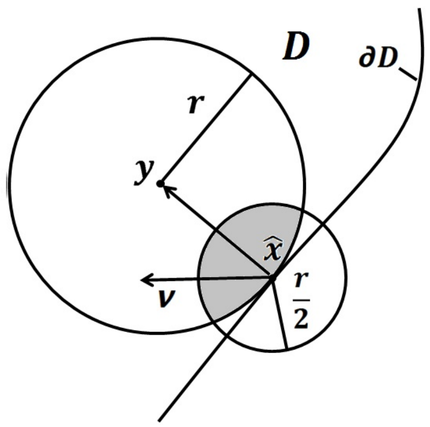

Abbildung 2.2

Für hinreichend kleines $t \in \mathbb{R}^+$ liegt $\hat{x} + t\nu$ in $B(y,r) \cap B(\hat{x}, \frac{r}{2})$. Nach den bisherigen Überlegungen gilt

$$\frac{v(\hat{x} + t\nu) - v(\hat{x})}{t} < 0$$

und somit

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}) + \beta \frac{\partial h}{\partial \nu}(\hat{x}) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(\hat{x}) = \lim_{t \to 0, t > 0} \frac{v(\hat{x} + t\nu) - v(\hat{x})}{t} \leq 0.$$

Die Funktion h ist in $\mathbb{R}^n$ differenzierbar, mit

$$\nabla h(x) = -2\alpha e^{-\alpha|x-y|^2}(x - y).$$

Zusammen mit der Voraussetzung an ν folgt

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(\hat{x}) = \nabla h(\hat{x}) \cdot \nu = -2\alpha e^{-\alpha|\hat{x}-y|^2}(\hat{x} - y) \cdot \nu > 0$$

und schließlich erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}) < 0.$$

□

Ist u differenzierbar in $\hat{x}$, so existieren alle Richtungsableitungen und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}) = \nabla u(\hat{x}) \cdot \nu \ .$$

Als Anwendungsbeispiel dient wieder die stationäre Temperaturverteilung auf dem zylindrischen Festkörper. Die folgende Betrachtung orientiert sich an [12, S.71]. Der Mantel M_Z des Zylinders sei isoliert, so dass darüber kein Wärmefluss stattfindet. Die Temperatur an den Endflächen (*Boden* und *Deckel*) sei nach wie vor fest vorgegeben (durch eine auf $\partial Z \backslash M_Z$ definierte Funktion g). Die Temperaturverteilung u soll also folgendes Randwertproblem lösen:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } Z, \\ u &= g && \text{in } \partial Z \backslash M_Z, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{in } M_Z. \end{aligned}$$

Dabei sei $n = n(x)$ ein nach innen gerichteter Normalenvektor an $x \in M_Z$. Damit das sinnvoll ist, müssen wir fordern, dass diese Richtungsableitungen existieren. Wir wollen mit M_Z nur die Punkte des Mantels bezeichnen, die einen positiven Abstand zu den Endflächen besitzen (also nicht die *Kanten*). In all diesen ist die innere Kugelbedingung erfüllt. Durch Anwendung des letzten Satzes auf u und auf $-u$ folgern wir, dass u auf M_Z kein Maximum und auch kein Minimum annehmen kann, außer die Temperatur ist überall konstant. Wir haben auch bereits im ersten Abschnitt gezeigt, dass u keine nichttrivialen Extremwerte im Innern von Z annehmen kann. Somit liegen alle Werte von u zwischen dem größten und dem kleinsten der am Rand vorgegebenen Werte, also zwischen dem Maximum und dem Minimum von g auf $\partial Z \backslash M_Z$.

In Satz 2.4 mussten wir erstmals Forderungen an die Struktur des Randes ∂D stellen. Dass auf solche nicht verzichtet werden kann, zeigt folgendes Beispiel, welches dem Buch von Sperb [13, S.18] entnommen ist: Wir betrachten das zweidimensionale Gebiet $D := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2$ und die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion

$$u = u(x) = u(x_1, x_2) = -cos(x_1)cos(x_2).$$

Auf u wenden wir den *Laplace-Operator* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ an. Die zugehörige Koeffizientenmatrix $A(x)$ ist die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{2,2}$. Damit ist Δ gleichmäßig elliptisch (mit $\mu_0 = 1$) und wir erhalten

$$\Delta u = 2cos(x_1)cos(x_2) \geq 0 \qquad \text{in } D.$$

Weiterhin gilt

$$u(x) < 0 \quad \text{in } D, \qquad u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial D.$$

In den *Ecken*, das heißt in $\hat{x} \in \{(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ ist die innere Kugelbedingung nicht erfüllt.

Dort gilt $\quad \nabla u(\hat{x}) = 0 \quad$ und somit $\quad \nabla u(\hat{x}) \cdot \nu = 0 \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}^2.$

Es ist klar, dass jede Kugel die innere Kugelbedingung erfüllt (das haben wir schon im Beweis von Satz 2.2 bei der Konstruktion von $B(y, r)$ ausgenutzt): Es seien $y_1 \in \mathbb{R}^d, r_1 > 0$ gegeben und $\hat{x}$ ein Punkt auf dem Rand $\partial B(y_1, r_1)$. Dann ist für jedes $0 < \mu < 1$ die Kugel mit Mittelpunkt $y_2 = y_1 + \mu(\hat{x} - y_1)$ und Radius $r_2 = (1 - \mu)r_1$ vollständig in $\bar{B}(y_1, r_1)$ enthalten und die Ränder schneiden sich nur im Punkt $\hat{x}$. Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass die innere Kugelbedingung erfüllt wird, ist in Satz 2.5 gegeben. Der Beweis ist aus [8] entnommen.

Satz 2.5. *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand, das heißt zu jedem $\hat{x} \in \partial D$ gäbe es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\rho > 0$, sowie eine Abbildung $\varphi \in C^2(U)$ so dass (eventuell nach Drehung des Koordinatensystems) gilt*

$$\begin{aligned} \partial D \cap B(\hat{x}, \rho) &= \{(z, \varphi(z)) \mid z \in U\} \\ D \cap B(\hat{x}, \rho) &= \{(z, z_n) \mid z \in U, z_n > \varphi(z)\}. \end{aligned}$$

Dann ist in jedem $\hat{x} \in \partial D$ die innere Kugelbedingung erfüllt.

Beweis: Wir nehmen zunächst folgendes an: $\hat{x} = 0$, $\varphi(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_{n-1}) = \varphi(0) = 0$ und $\varphi'(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_{n-1}) = \varphi'(0) = 0$. Da φ zweimal stetig differenzierbar ist, gilt dann für $z \in U$ nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(0) + \varphi'(0)(z) + z^T H_\varphi(\xi) z \\ &= z^T H_\varphi(\xi) z. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir mit H_φ die Hessematrix von φ und ξ liegt zwischen 0 und z. Den Betrag von $\varphi(z)$ in der euklidischen Norm $|\cdot|$ können wir nun folgendermaßen abschätzen:

$$|\varphi(z)| \leq ||H_\varphi(\xi)||_F \, |z|^2,$$

wobei $||\cdot||_F$ die Frobeniusnorm bezeichnet, welche mit der euklidischen Norm verträglich ist. Da die Verkettung der Norm mit der zweiten Ableitung von φ stetig ist, erhalten wir für jedes $r > 0$ mit $\bar{B}(0, r) \subset U \subset \mathbb{R}^{n-1}$

$$|\varphi(y)| \leq C|y|^2 \qquad \forall y \in \bar{B}(0, r).$$

Dabei ist

$$C = \max_{\xi \in \bar{B}(0,r)} ||H_\varphi(\xi)||_F$$

eine Konstante, die nur vom Radius r abhängt. Es seien nun $\lambda > 0$, $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $z_n \in \mathbb{R}$ so dass $(z, z_n) \in B((0, ..., 0, \lambda), \lambda) \subset B(0, \rho) \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$|z|^2 + (z_n - \lambda)^2 < \lambda^2.$$

Nach Subtraktion von λ^2 erhalten wir

$$|z|^2 + (z_n)^2 - 2z_n\lambda < 0$$

und Umstellen liefert schließlich

$$|z|^2 < 2z_n\lambda - z_n^2 < 2z_n\lambda.$$

Da z insbesondere zu $B(0, \lambda)$ gehört, gibt es eine Konstante C mit

$$\varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq C|z|^2 < C2z_n\lambda.$$

Wir wählen $\lambda < \frac{1}{2C}$ und erhalten

$$\varphi(z) < z_n.$$

Dann liegt (z, z_n) aber in D. Also ist die offene Kugel $B((0, ..., 0, \lambda), \lambda)$ vollständig in D enthalten. Der Punkt $\hat{x} = 0$ liegt auf ihrem Rand. Angenommen das ist nicht der einzige Schnittpunkt des Randes der Kugel mit dem Rand von D, so finden wir eine kleinere Kugel, die vollständig in $B((0, ..., 0, \lambda), \lambda)$ enthalten ist, so dass die Ränder dieser beiden Kugeln sich nur in $\hat{x}$ schneiden und der Mittelpunkt dieser kleineren Kugel auf der Geraden durch $\hat{x}$ und $(0, ..., 0, \lambda)$ liegt.

Wir hatten gefordert: $\hat{x} = 0$, $\varphi(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_{n-1}) = 0$ und $\varphi'(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_{n-1}) = 0$. Das ist aber keine Einschränkung. Die ersten beiden Voraussetzungen können wir dadurch sichern, dass wir den Ursprung des Koordinatensystems in $\hat{x}$ legen. Die Forderung $\varphi'(0) = 0$ können wir erfüllen, indem wir das Koordinatensystem drehen. Um das etwas anschaulicher darzustellen betrachten wir die Funktion $\phi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi(z, z_n) = \varphi(z) - z_n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial D \cap B(\hat{x}, \rho) &= \{(z, z_n)) \in U \times \mathbb{R} \mid \phi(z, z_n) = 0\} \\ D \cap B(\hat{x}, \rho) &= \{(z, z_n) \in U \times \mathbb{R} \mid \phi(z, z_n) < 0\}. \end{aligned}$$

Somit entspricht der Rand von D gerade der Niveaumenge von ϕ zum Wert Null. Der Gradient von ϕ

$$\nabla \phi(z, zn) = \begin{pmatrix} \nabla \varphi(z) \\ -1 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf dieser Niveaumenge und zeigt aus dem Gebiet D hinaus. Das Koordinatensystem muss nun so gedreht werden, dass der n-te Einheitsvektor in die selbe Richtung weist, wie der Antigradient von ϕ an der Stelle $\hat{x}$. Der Mittelpunkt der inneren Kugel kann dann für ein passendes $\lambda > 0$ in $\hat{x} - \lambda \nabla \phi(\hat{x})$ gewählt werden.

□

Betrachten wir als Beispiel zu gegebenem $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$, $\zeta_1, ...\zeta_n, r > 0$ ein Ellipsoid der Form

$$E := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 (zi - \tilde{z}_i)^2 < r^2\}.$$

Dieses besitzt einen C^2-Rand: Es sei $\hat{x}$ ein Punkt auf dem Rand von E, sagen wir mit $\hat{x}_n < \tilde{z}_n$. Wir wählen $\rho < \tilde{z}_n - \hat{x}_n$ und finden die Funktion

$$\varphi(z_1, ..., z_{n-1}) = \tilde{z}_n - \sqrt{\frac{r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i^2 (zi - \tilde{z}_i)^2}{\zeta_n^2}}$$

mit den gewünschten Eigenschaften. Also können wir eine innere Kugel konstruieren, die den Rand von E in $\hat{x}$ berührt. Aus Symmetriegründen finden wir auch im Fall $\hat{x}_n > \tilde{z}_n$ eine solche Kugel. Falls $\hat{x}_n = \tilde{z}_n$, so existiert $j \in \{1, ..., n-1\}$ mit $\hat{x}_j \neq \tilde{z}_j$ und man konstruiert analog eine passende Funktion $\varphi(z_1, ...z_{j-1}, z_{j+1}, ...z_n)$.

Im Beweis von Satz 2.5 konnten wir den Radius λ der inneren Kugel beliebig klein wählen. Falls $\hat{x}_j \neq \tilde{z}_j$ so ist es möglich die Kugel so zu wählen, dass die j-te Komponente ihres Mittelpunkts nicht mit $\tilde{z}_j$ zusammenfällt. Wir weisen darauf hin, da wir dieses Resultat weiter unten benötigen werden.

3 Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen

Es sei im Folgenden stets $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $u = u(x,t)$ $= u(x_1, ...x_n, t)$ eine auf D definierte Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$. Wir fordern außerdem, dass u zweimal stetig nach x und einmal stetig nach t differenzierbar sei und schreiben dafür $u \in \mathbf{C^{2,1}(D)}$ (nicht zu verwechseln mit Hölderräumen!) .

Wir betrachten nun Ausdrücke L der Form

$$Lu(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t).$$

Die Koeffizienten a_{ij}, b_i und c seien wieder beschränkte Funktionen und die Matrizen $A(x,t) = (a_{ij}(x,t))_{i,j=1,\dots,n}$ seien symmetrisch.

L heißt **parabolisch** in D, falls es für alle $(x,t) \in D$ eine Zahl $\mu(x,t) > 0$ gibt, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) y_i y_j \geq \mu(x,t) \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

L heißt **gleichmäßig parabolisch**, falls μ unabhängig von (x,t) gewählt werden kann, das heißt falls es eine Zahl $\mu_0 > 0$ gibt, mit

$$y^T A(x,t) y \geq \mu_0 |y|^2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall (x,t) \in D.$$

Den Beweis des starken Maximumprinzips für den parabolischen linearen Differentialausdruck L lieferte zuerst Louis Nirenberg (1953)[1]. Wie wir im Folgenden sehen werden, ähneln einige der wesentlichen Beweisschritte denen aus dem vorigen Abschnitt.

Lemma 3.1. *Es sei $u \in C^{2,1}(D)$, L parabolisch in D und die strikte Ungleichung $Lu > 0$ sei in D erfüllt .*

1. *Falls $c \equiv 0$, so kann u in D kein lokales Maximum annehmen.*
2. *Gilt nur $c \leq 0$ in D, so kann u in D kein nichtnegatives lokales Maximum annehmen.*

Beweis: Wir nehmen an u nimmt an der Stelle $(\hat{x}, \hat{t}) \in D$ ein Maximum an. Der Ausdruck $\tilde{L}$ mit $\tilde{L}u(x) = Lu(x, \hat{t})$ ist elliptisch. Außerdem gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\hat{x}, \hat{t}) = 0$$

und die Aussage folgt völlig analog zu Lemma 2.1. □

Unser Ziel ist nun eine Aussage für den Fall $Lu \geq 0$ abzuleiten. Da uns das etwas mehr Arbeit bereiten wird, als in Abschnitt 2, werden wir einige Beweisschritte als Lemmas formulieren, wobei wir Friedman [4, S. 34 ff.] folgen. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, formulieren wir alles unter der Voraussetzung, dass die Ungleichung $c \leq 0$ erfüllt ist und Maxima der Funktion u nichtnegativ sind. Alles bleibt auch für negative Maxima richtig, sofern der Koeffizient c identisch verschwindet.

[1] vergleiche [10]

Lemma 3.2. *Es sei L gleichmäßig parabolisch in D und u sei aus $C^{2,1}(D)$. Die Ungleichungen $Lu \geq 0$ und $c \leq 0$ seien überall in D erfüllt. Es gebe $(y,s) \in D$ und $\zeta, r > 0$ so dass der Abschluss des Ellipsoids*

$$E := \{(x,t) \in D| \quad |x-y|^2 + \zeta^2(t-s)^2 < r^2\}$$

in D enthalten ist. Angenommen u nimmt in D ein globales Maximum mit Wert $M \geq 0$ an. Es sei $(\hat{x},\hat{t}) \in \partial E$ mit $u(\hat{x},\hat{t}) = M$ und $u < M$ in E . Dann folgt $\hat{x} = y$.

Beweis: Angenommen die Aussage gilt nicht, also $|\hat{x} - y| > 0$. Wir wollen zeigen, dass sich dann ein Widerspruch ergibt. Dabei können wir annehmen, dass $(\hat{x},\hat{t})$ der einzige Punkt in ∂E ist, in dem das Maximum angenommen wird. Falls nicht, so lässt sich ein kleineres Ellipsoid $\tilde{E}$ mit Mittelpunkt $(\tilde{y},\tilde{s}) \in E$ mit $\tilde{y} \neq \hat{x}$ konstruieren, welches ∂E in $(\hat{x},\hat{t})$ berührt und ansonsten vollständig in E enthalten ist. Wir haben weiter oben gezeigt, dass so ein Ellipsoid die innere Kugelbedingung erfüllt, und wir mit $\zeta = 1$ und r hinreichend klein sogar eine Kugel finden, die diese Eigenschaften hat. Also setzen wir im Folgenden $E = \tilde{E}$. Weil D offen ist und $\hat{x}$ in D liegt, finden wir ein ρ mit $|\hat{x} - y| > \rho > 0$, so dass $\bar{B}((\hat{x},\hat{t}),\rho)$ vollständig in D enthalten ist. Für $\alpha > 0$ definieren wir die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,

$$h(x,t) = e^{-\alpha(|x-y|^2+\zeta^2(t-s)^2)} - e^{-\alpha r^2}.$$

Wir wenden L auf h an und erhalten

$$Lh(x,t) = e^{-\alpha(|x-y|^2+\zeta^2(t-s)^2)} \Bigg(\sum_{i,j=1}^{n} (4\alpha^2 a_{ij}(x,t)(x_i - y_i)(x_j - y_j))$$
$$-2\alpha \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_{ii}(x,t) + b_i(x,t)(x_i - y_i)) - \zeta^2(t-s) \Big) + c(x,t) \Bigg) - c(x,t)e^{-\alpha r^2}.$$

Für $(x,t) \in B((\hat{x},\hat{t}),\rho)$ gilt $|x-y| \geq |\hat{x}-y| - \rho = const. > 0$. Da L gleichmäßig parabolisch ist, finden wir eine untere Schranke für die erste Summe

$$\sum_{i,j=1}^{n} (4\alpha^2 a_{ij}(x,t)(x_i - y_i)(x_j - y_j)) \geq 4\alpha^2 \mu_0 |x-y|^2 \geq \alpha^2 \cdot \ const.$$

Unter Verwendung der Voraussetzung $c \leq 0$ lässt sich der letzte Summand gegen Null abschätzen:

$$-c(x,t)e^{-\alpha r^2} \geq 0.$$

Die zweite Summe $\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}(x,t) + b_i(x,t)(x_i - y_i)) - \zeta^2(t-s)$ ist beschränkt. Also kann α wieder so groß gewählt werden, dass der Ausdruck in großen Klammern positiv wird und wir erhalten schließlich

$$Lh(x,t) > 0 \qquad \forall (x,t) \in B((\hat{x},\hat{t}),\rho).$$

Wir definieren wieder die Funktion $v : \bar{B}((\hat{x},\hat{t}),\rho) \to \mathbb{R}$, $v = u + \beta h$. Analog zu der entsprechenden Stelle im Beweis von Satz 2.2 folgt

- $v(x) < M$,
  $\forall (x,t) \in \partial B((\hat{x},\hat{t}),\rho) \cap \bar{E}$,
  falls β hinreichend klein gewählt wird.
- $v(x) < M$,
  $\forall (x,t) \in \partial B((\hat{x},\hat{t}),\rho) \backslash \bar{E}$
- $v(\hat{x},\hat{t}) = M$

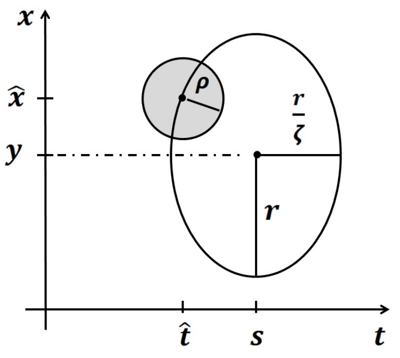

Abbildung 3.1

Also besitzt v im Innern von $B((\hat{x},\hat{t}),\rho)$ ein Maximum mit Wert $\geq M$. Es gilt aber

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \beta Lh(x,t) > 0 \qquad \forall (x,t) \in B((\hat{x},\hat{t}),\rho).$$

Somit ergibt sich ein Widerspruch zu Lemma 3.1. □

Lemma 3.3. *Es sei L gleichmäßig parabolisch in D und u sei aus $C^{2,1}(D)$. Die Ungleichungen $Lu \geq 0$ und $c \leq 0$ seien überall in D erfüllt. Angenommen u nimmt in $(\hat{x},\hat{t}) \in D$ ein globales Maximum mit Wert $M \geq 0$ an. Dann folgt: $u(x,\hat{t}) = M$, für alle $(x,\hat{t}) \in D$ für die es einen Weg von $(x,\hat{t})$ zu $(\hat{x},\hat{t})$ in D gibt, entlang dessen $t = \hat{t}$ konstant ist.*

Beweis: Angenommen es gibt $(P_0,\hat{t}) \in D$ mit $u(P_0,\hat{t}) < M$ und einen Weg $w : [0,1] \to D$ mit $w(0) = (P_0,\hat{t}), w(1) = (\hat{x},\hat{t})$ und $w(\tau) \in D \cap (\mathbb{R}^n \times \{\hat{t}\})$ für alle $\tau \in [0,1]$. Aufgrund der Stetigkeit von u und w gibt es $\bar{\tau} \in (0,1]$ mit

$$u(w(\tau)) \begin{cases} < M, & \tau \in [0,\bar{\tau}) \\ = M, & \tau = \bar{\tau}. \end{cases}$$

Wir setzen $(P_1,\hat{t}) := w(\bar{\tau})$. Es gibt $\epsilon_1 > 0$, so dass $B((P_1,\hat{t}),\epsilon_1)$ in D enthalten ist. Es sei nun $y \in B((P_1,\hat{t}),\frac{\epsilon_1}{2}) \cap w([0,\bar{\tau}))$. Aus $u(y,\hat{t}) < M$ folgt die Existenz von ϵ_2 mit $\frac{\epsilon_1}{2} > \epsilon_2 > 0$ so dass $u < M$ in $\bar{B}((y,\hat{t}),\epsilon_2)$, also insbesondere $u < M$ auf $\{y\} \times [\hat{t}-\epsilon_2,\hat{t}+\epsilon_2]$ erfüllt ist. Wir betrachten das Ellipsoid

$$E := \{(x,t) \in D| \quad |x-y|^2 + \frac{r^2}{\epsilon_2^2}(t-\hat{t})^2 < r^2\}.$$

Dabei sei r gerade so groß gewählt, dass $u < M$ in E gilt und es (mindestens) einen Punkt auf dem Rand von E gibt in dem u den Wert M annimmt. (Es ist dann $r < \frac{\epsilon_1}{2}$ und $\bar{E}$ liegt in $B((P_1,\hat{t},\epsilon_1))$ also auch in D.) Da so ein Punkt nach Konstruktion aber nicht auf $\{y\}\times[\hat{t}-\epsilon_2,\hat{t}+\epsilon_2]$ liegen kann, ist das ein Widerspruch zu Lemma 3.2. □

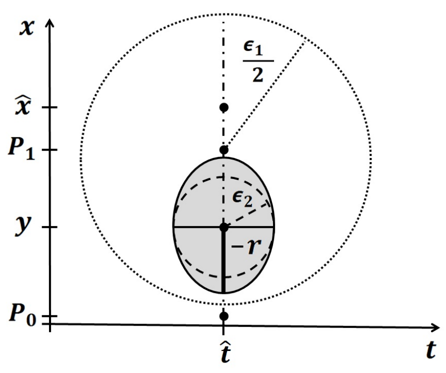

Abbildung 3.2

Lemma 3.4. *Gegeben seien $\underline{x}_i,\ \bar{x}_i \in \mathbb{R}^n,\ \underline{x}_i < \bar{x}_i,\ i = 1, ..., n$ und $\underline{t} < \hat{t} \in \mathbb{R}$, sowie das abgeschlossene Rechteck*

$$R := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, ..., n, \quad \underline{t} \leq t \leq \hat{t}\}.$$

L sei in R gleichmäßig parabolisch mit beschränkten Koeffizienten und u sei aus $C^{2,1}(R)$. Die Ungleichungen $Lu \geq 0$ und $c \leq 0$ seien überall in R erfüllt. Es gebe $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\underline{x}_i < \hat{x}_i < \bar{x}_i$, $u(\hat{x}, \hat{t}) = M$ mit $u \leq M$ in R und $M \geq 0$. Dann ist u konstant in R.

Beweis: Angenommen das gilt nicht. Dann gibt es $(P_0, t_0) \in R$ mit $u(P_0, t_0) < M$. Da u stetig ist, gilt dann auch $u(P_0, t) < M$, falls $|t - t_0|$ hinreichend klein ist. Also nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_0 \neq \hat{t}$ an. Wir konstruieren den Weg

$$w : [0,1] \to R, \quad w(\tau) = (P_0, t_0) + \tau((\hat{x}, \hat{t}) - (P_0, t_0))$$

und finden $\bar{\tau} \in (0,1]$ und $(y, s) := w(\bar{\tau})$ mit $u(y, s) = M$ und $u(w(\tau)) < M$ für alle $\tau \in [0, \bar{\tau})$. Wir bezeichnen im Folgenden mit $\tilde{R}$ das kleinere Rechteck

$$\tilde{R} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, ..., n, \quad t_0 \leq t \leq s\}.$$

Wir definieren für $\zeta > 0$ die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,

$$h(x,t) = s - t - \zeta |x - y|^2$$

und berechnen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -1, \qquad \frac{\partial h}{\partial x_i} = -2\zeta(x_i - y_i), \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -2\zeta, & i = j. \end{cases}$$

Wir berechnen $Lh(x,t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (-2\zeta a_{ii}(x,t)) + \sum_{i=1}^{n} (-2\zeta b_i(x,t)(x_i - y_i)) + c(x,t)(s - t - \zeta|x-y|^2) + 1 \\ = \quad & -\zeta\Big(2\sum_{i=1}^{n} (a_{ii}(x,t) + b_i(x,t)(x_i - y_i)) + c(x,t)|x-y|^2\Big) + c(x,t)(s-t) + 1. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_{ii}, b_i und c, sowie $|x - y|$ und damit auch die Terme $(x_i - y_i)$ sind in $\tilde{R}$ beschränkt. Somit kann ζ so klein gewählt werden, dass gilt

$$|\zeta\Big(2\sum_{i=1}^{n} (a_{ii}(x,t) + b_i(x,t)(x_i - y_i)) + c(x,t)|x-y|^2\Big)| < \frac{1}{2} \qquad \text{in } \tilde{R}.$$

Weiterhin können wir annehmen, dass die Differenz $s - t_0$ hinreichend klein ist, so dass auch gilt

$$|c(x,t)(s-t)| < \frac{1}{2} \qquad \text{in } \tilde{R}.$$

(Falls nicht, so ersetzen wir den Punkt (P_0, t_0) durch einen anderen Punkt auf $w(0, \bar{\tau})$, so dass dies erfüllt ist.) Damit erhalten wir

$$Lh(x,t) > 0 \qquad \forall (x,t) \in \tilde{R}.$$

Wir definieren eine durch ein Paraboloid begrenzte Menge $N \subset \mathbb{R}^n$,

$$N := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n |\ s - t > \zeta |x - y|^2\}.$$

Auf der Schnittfläche $\bar{N} \cap \tilde{R}$ (vgl. markierte Fläche in Abbildung 3.3) betrachten wir die Funktion $v = u + \beta h$. Für jedes $t \in [t_0, s)$ enthält der Schnitt $\tilde{R} \cap (\mathbb{R}^n \times \{t\})$ einen Punkt der auf dem Wegstück $w[0, \bar{\tau})$ liegt. Mit Lemma 3.3 folgt somit

$$u < M \qquad \text{in } \tilde{R} \backslash (\mathbb{R}^n \times \{s\}).$$

Für $(x,t) \in N$ gilt $t < s$. Da $\hat{x}$ nicht auf dem Rand des n-dimensionalen Rechtecks $[\underline{x_1}, \bar{x_1}] \times ... \times [\underline{x_n}, \bar{x_n}]$ angenommen wurde, liegt auch y nicht auf diesem Rand. Deshalb gilt für jeden Punkt $(x,t) \in \partial\tilde{R} \cap N$

$$s - t > \zeta |x - y|^2 > const. > 0.$$

Damit haben wir $(\overline{\partial\tilde{R} \cap N}) \cap (\mathbb{R}^n \times s) = \emptyset$.

Da $\overline{\partial\tilde{R} \cap N}$ kompakt ist, nimmt u dort ein Maximum an, welches nach den bisherigen Überlegungen einen Wert besitzt, welcher echt kleiner ist, als M. Mit $h(x,t) \leq s - t_0$ in $\tilde{R}$ kann β so klein gewählt werden, dass gilt

$$v < M \quad \text{in } \overline{\partial\tilde{R} \cap N}.$$

Auf $\tilde{R} \cap \partial N$ gilt $h = 0$ und $u < M$, mit Ausnahme des Punktes (y,s). Dort haben wir $u(y,s) = M$.

Weiterhin gilt

$$Lv = Lu + \beta Lh > 0 \qquad \text{in } N \cap \tilde{R}.$$

Mit Lemma 3.1 folgt

$$v < M \qquad \text{in } (\bar{N} \cap \tilde{R}) \backslash \{(y,s)\}.$$

Wir betrachten die Ungleichung

$$0 \leq Lu(y,s).$$

Da L in (y,s) parabolisch ist und y im Inneren von $\tilde{R} \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\})$ liegt, kann wie im Beweis von Lemma 3.1, beziehungsweise Lemma 2.1 gezeigt werden, dass folgende Abschätzung gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y,s) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y,s) \leq 0.$$

Außerdem verschwinden die partiellen Ableitungen bezüglich x,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(y,s) \frac{\partial u}{\partial x_i}(y,s) = 0.$$

Mit unseren Voraussetzungen folgt weiterhin

$$c(y,s)u(y,s) = c(y,s)M \leq 0.$$

Für die partielle Ableitung nach t ergibt sich nun

$$0 \leq Lu(y,s) \leq -\frac{\partial u}{\partial t}(y,s) \quad \text{und somit} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(y,s) \leq 0.$$

Zusammen mit $\frac{\partial h}{\partial t} \equiv -1$ folgt

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y,s) = \frac{\partial u}{\partial t}(y,s) + \beta \frac{\partial h}{\partial t}(y,s) < 0.$$

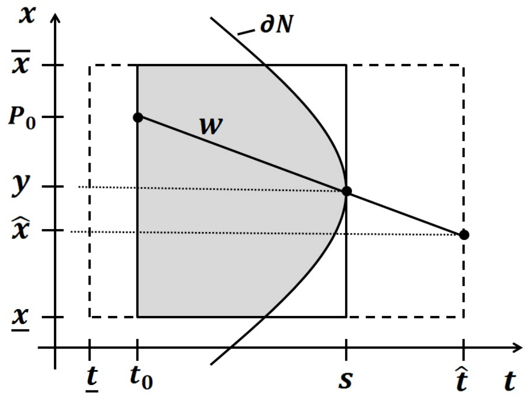

Abbildung 3.3

Dann muss aber v im Innern von $N \cap \tilde{R}$ Werte annehmen, welche größer sind als M. Das ist ein Widerspruch. □

Nach all dieser Vorarbeit werden wir nun das Maximumprinzip für den parabolischen Ausdruck L formulieren. Für $(\hat{x}, \hat{t}) \in D$ definieren wir dazu $D_{(\hat{x},\hat{t})}$ als die Menge aller $(x, t) \in D$ für die es einen Weg von (x, t) zu $(\hat{x}, \hat{t})$ gibt, entlang welchem die $t-$Koordinate monoton wächst. Das bedeutet, zu $(x, t) \in D_{(\hat{x},\hat{t})}$ gibt es eine stetige Abbildung $w : [0, 1] \to D, w(0) = (x, t), w(1) = (\hat{x}, \hat{t})$ und für alle $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$, $(x_1, t_1) = w(\tau_1),\ \ (x_2, t_2) = w(\tau_2)$ gilt

$$\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow t_1 \le t_2.$$

Satz 3.5. *Es sei L gleichmäßig parabolisch in D und u sei aus $C^{2,1}(D)$. Die Ungleichungen $Lu \ge 0$ und $c \le 0$ seien überall in D erfüllt. Angenommen es gibt $(\hat{x}, \hat{t}) \in D$ mit*

$$u(\hat{x}, \hat{t}) = \max_{(x,t)\in D_{(\hat{x},\hat{t})}} u(x, t) = M \ge 0.$$

Dann folgt: $u(x, t) \equiv M$ in $D_{(\hat{x},\hat{t})}$.

Beweis: Wir nehmen wieder an, die Aussage wäre falsch und führen das zum Widerspruch. Sei also $(P_0, t_0) \in D_{(\hat{x},\hat{t})}$ mit $u(P_0, t_0) < M$. Es sei (y, s) der erste Punkt auf dem zugehörigen Weg w mit $u(y, s) = M$ (also $(y, s) = w(\bar{\tau})$ mit der bereits zuvor verwendeten Notation). Wir betrachten das Rechteck

$$R := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \ y_i - \delta \le x_i \le y_i + \delta \quad i = 1, ..., n, \quad s - \delta \le t \le s\}.$$

Dabei sei δ so klein gewählt, dass R in D enthalten ist. Nach Lemma 3.4 gilt $u \equiv M$ in R. Andererseits gilt wegen Stetigkeit von w

$$B((y, s), \delta) \cap w([0, \bar{\tau})) \ne \emptyset.$$

Für $\tau < \bar{\tau}$ und $(x, t) = w(\tau)$ gilt zum einen $u(x, t) < M$, zum anderen $t \le s$. Falls $|\tau - \bar{\tau}|$ hinreichend klein ist, liegt (x, t) in R. Das ist der Widerspruch. □

Wir haben bisher alles ganz allgemein für beliebige (n+1)-dimensionale Gebiete gezeigt. Insbesondere gelten unsere Resultate dann, wenn der Definitionsbereich von

u das kartesische Produkt aus einem n-dimensionalen Gebiet Ω und der positiven reellen Halbachse ist:

$$D = \Omega \times (0, \infty).$$

Um die instationäre Wärmeleitung in dem Zylinder aus Abbildung 0.1 zu untersuchen, setzen wir $\Omega = Z$ und geben der Koordinate t die Bedeutung von *Zeit*. Wir erinnern an die Wärmeleitungsgleichung :

$$c \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \qquad \text{(WLG)}$$

Diese Gleichung ist offensichtlich vom parabolischen Typ, denn die Temperaturleitfähigkeit c ist positiv. Wir können Satz 3.5 anwenden und folgenden Schluss ziehen: Nimmt eine Lösung u von (WLG) in einem Punkt $(\hat{x}, \hat{t}) \in \bar{Z} \times [0, \infty)$ ein Maximum an, so liegt dieses Maximum entweder auf dem Rand des Zylinders ($\hat{x} \in \partial Z$) oder es wird zu Beginn des Prozesses angenommen ($\hat{t} = 0$), es sei denn es liegt der triviale Fall vor, in dem die Temperatur von Prozessbeginn (t=0) bis zum Zeitpunkt $\hat{t}$ überall konstant ist. Durch Anwendung von Satz 3.5 auf $-u$ folgern wir, dass ebenso keine Temperaturminima im Innern von D liegen können. Insgesamt können wir sagen, dass Temperaturextrema im Innern des Körpers, die eventuell zu Beginn des Prozess vorhanden sind, mit fortlaufender Zeit ausgeglichen werden. Zugegeben, dieses Ergebnis überrascht uns nicht. Bei genauerer Betrachtung stellt man allerdings fest, dass der Temperaturausgleich - unserer Theorie nach - mit unendlicher Geschwindigkeit stattfinden müsste, denn jedes zu Beginn vorhandene Extremum in $\hat{x} \in Z$ darf schon nach beliebig kurzer Zeit $\hat{t}$ kein Extremum in $D_{(\hat{x},\hat{t})}$ sein. Eine Ausnahme bildet wieder die zeitlich und räumlich konstante Temperaturverteilung.

Häufig betrachtet man beschränkte Zeitintervalle $(0, T)$ mit $T > 0$. Satz 3.5 liefert dann nur eine Aussage über Maxima in $\Omega \times (0, T)$. Das Ergebnis lässt sich allerdings auf die Punkte (x, T) mit $x \in \Omega$ ausweiten. Dabei ist folgende Definition[1] hilfreich: Die Menge $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ heißt **parabolischer Zylinder**. Das Komplement des parabolischen Zylinders im Abschluss von D, $\Gamma_T := \bar{D} \backslash \Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$, nennt man den **parabolischen Rand** von Ω_T.

Satz 3.6. *Es sei Ω ein n-dimensionales Gebiet und $T > 0$. L sei in Ω_T gleichmäßig parabolisch mit beschränkten Koeffizienten a_{ij}, b_i und c. u sei aus $C^{2,1}(\Omega_T)$ und die Ungleichungen $Lu \geq 0$ und $c \leq 0$ seien überall in Ω_T erfüllt. Nimmt u in $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Omega_T$ ein nichtnegatives globales Maximum mit Wert M an, dann gilt $u(x,t) = M$, für alle $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [\,0, \hat{t}\,]$.*

Beweis: Für $(\hat{x}, \hat{t})$ in $\Omega \times (0, T)$ folgt die Aussage aus dem letzten Satz. Im Fall $\hat{t} = T$ genügt es im Beweis von Satz 3.5 den Parameter δ so klein zu wählen, dass das Rechteck R zum parabolischen Zylinders Ω_T gehört. Unter den gegebenen Voraussetzungen kann dann Lemma 3.4 angewendet werden. □

Nimmt die Funktion u zum Zeitpunkt $\hat{t}$ ein Maximum an und ist u nicht konstant auf $\bar{\Omega} \times [\,0, \hat{t}\,]$, so kann dieses Maximum nur auf dem parabolischen Rand $\Gamma_{\hat{t}}$ von $\Omega_{\hat{t}}$ liegen. Wir hätten das Wärmeleitungsproblem also von vornherein auf einem endlichen Zeitintervall betrachten können. Das Konzept des parabolischen Rands lässt sich auf allgemeine $(n+1)$-dimensionale Gebiete D ausweiten.[2] Der hier gegebene

[1] Die Definition des parabolischen Zylinders und des parabolischen Rands stammt aus [3, S.51 f.]. Evans [3, Abschnitt 7.1.4] behandelt das parabolische Maximumprinzip ausschließlich für Gebiete der Form $\Omega \times (0, T)$ und gibt einen viel kürzeren Beweis an, in dem er allerdings die sogenannte Harnack'sche Ungleichung benutzt, deren Beweis wiederum aufwendig ist.

[2] Lieberman [9, S. 7] gibt eine entsprechende Definition, welche allerdings im Spezialfall $D = \Omega \times (0, T)$ die Menge $\partial\Omega \times \{T\}$ ausschließt.

Beweis gilt für alle Maximalstellen $(\hat{x}, \hat{t})$ für die es möglich ist, ein Rechteck R mit den geforderten Eigenschaften zu konstruieren.

Für beschränkte Gebiete lässt sich analog zu Korollar 2.3 ein schwaches Maximumprinzip formulieren. Wir verweisen auf Evans [3, S.368 ff.] und merken an, dass in dem dort gegebenen Beweis nur ausgenutzt wird, dass L parabolisch, aber nicht notwendigerweise gleichmäßig parabolisch ist.

In Abschnitt 2 haben wir Hopf's Randpunktlemma bewiesen. Dazu mussten wir fordern, dass in dem Randpunkt, in dem das Maximum angenommen wird, die *innere Kugelbedingung* erfüllt ist. Im parabolischen Fall benötigen wir sogar noch stärkere Voraussetzungen um ein entsprechendes Resultat zu erhalten. Dieses wurde 1958 von Avner Friedman [5] veröffentlicht und ist auch in seinem Buch [4, S.49] aufgeführt.

Satz 3.7. *Es sei L gleichmäßig parabolisch in D und u sei aus $C^{2,1}(D)$. Die Ungleichungen $Lu \geq 0$ und $c \leq 0$ seien überall in D erfüllt. u nehme in D ein globales Maximum mit Wert $M \geq 0$ an. Es sei $(\hat{x}, \hat{t}) \in \partial D$ ein Stetigkeitspunkt von u in dem das Maximum angenommen wird. Es gebe eine Kugel mit Mittelpunkt $(y, s) \in D$ und Radius $r > 0$, so dass $B((y, s), r) \subset D$ und $\bar{B}((y, s), r) \cap \partial D = \{(\hat{x}, \hat{t})\}$. Weiterhin gelte: $\mathbf{y} \neq \hat{\mathbf{x}}$ und $u < M$ in $\bar{B}((y, s), r) \backslash \{(\hat{x}, \hat{t})\}$. Es sei $\nu \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\nu \cdot ((y, s) - (\hat{x}, \hat{t})) > 0$. Falls die einseitige Richtungsableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t})$ existiert, so ist diese negativ.*

Beweis: Der Beweis kann so geführt werden, wie im elliptischen Fall, mit einigen Anpassungen, die schon beim Beweis von Lemma 3.2 vorgenommen wurden. Für $\alpha > 0$ definieren wir die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,

$$h(x, t) = e^{-\alpha(|x-y|^2 + (t-s)^2)} - e^{-\alpha r^2}.$$

Wir wählen ρ mit $|\hat{x} - y| > \rho > 0$ (was nur möglich ist wenn $\hat{x} \neq y$ gefordert wird) und α so groß, dass

$$Lh(x, t) > 0 \qquad \forall (x, t) \in B((\hat{x}, \hat{t}), \rho).$$

Wir setzen wieder: $v = u + \beta h$. Mit den selben Argumenten, die schon im Beweis von Satz 2.4 angewandt wurden folgt, dass die Funktion v ihr einziges Maximum in $\bar{B}((y, s), r) \cap \bar{B}((\hat{x}, \hat{t}), \rho)$ im Punkt $(\hat{x}, \hat{t})$ annimmt, mit $v(\hat{x}, \hat{t}) = M$. Somit folgt

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) \leq 0.$$

Weiterhin gilt

$$\nabla h(x) = -2\alpha e^{-\alpha(|x-y|^2 + (t-s)^2}((x, t) - (y, s)).$$

Zusammen mit der Voraussetzung an ν erhalten wir

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) = \nabla h(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \nu = -2\alpha e^{-\alpha r^2}((\hat{x}, \hat{t}) - (y, s)) \cdot \nu > 0.$$

und schließlich

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}, \hat{t}) < 0$$

□

4 Anwendungen

4.1 Einzigkeit von Lösungen

Mithilfe des Maximumprinzips und des Randpunktlemmas kann leicht die Einzigkeit klassischer Lösungen verschiedenartiger Diffenrentialgleichungsprobleme nachgewiesen werden. Wir betrachten hier exemplarisch das folgende parabolische Anfangsrandwertproblem, welches in ähnlicher Form bei Friedman [4, S.51] behandelt wird:

$$\text{(ARWP)} \qquad \begin{cases} Lu(x,t) = f(x,t) & \forall (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,0) = g_1(x) & \forall x \in \bar{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + k(x,t)u(x,t) = g_2(x,t) & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \end{cases} .$$

Dabei sei Ω ein n-dimensionales Gebiet, $T > 0$ und wir definieren das $(n+1)$-dimensionale Gebiet $D := \Omega \times (0,T)$. Weiterhin sei $k : \partial\Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$ irgendeine Funktion mit $k(x,t) \leq 0$ für alle $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$ und $k(x,T) < 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. f, g_1, g_2 seien beliebige reellwertige Funktionen auf ihren jeweiligen Definitionsbreichen. L sei der gleichmäßig parabolische Differentialausdruck aus Kapitel 3, mit beschränkten Koeffizienten und $c \leq 0$ in Ω_T. Für jedes $\hat{x} \in \partial\Omega$ sei die innere Kugelbedingung erfüllt, das heißt es existiere eine Kugel $B(y,r) \subset \Omega$ mit $\bar{B}(y,r) \cap \partial\Omega = \{\hat{x}\}$. Da dann $y \neq \hat{x}$ gilt, ist somit für $\hat{t} < T$ und hinreichend kleines $r > 0$ mit $B((y,\hat{t}),r) \subset D$ in $(\hat{x},\hat{t})$ auch die starke innere Kugelbedingung aus Satz 3.7 erfüllt. Der zugehörige Vektor ν sei ins Innere dieser Kugel gerichtet $(\nu \cdot ((y,s) - (\hat{x},\hat{t})) > 0)$. Für $(\hat{x},\hat{t}) \in \partial\Omega \times \{T\}$ sei ν ins Innere von D gerichtet. Damit ist gemeint, dass für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ der Punkt $(\hat{x},\hat{t}) + \epsilon\nu$ in D liegen soll. Gesucht ist $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{D})$, so dass alle Richtungsableitungen $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ existieren und die Gleichungen (ARWP) erfüllt sind.

Satz 4.1. *Unter den obigen Voraussetzungen besitzt das Problem (ARWP) höchstens eine Lösung.*

Beweis: Angenommen es gibt zwei Lösungen u_1 und u_2. Dann löst $\tilde{u} := u_1 - u_2$ das Problem

$$\begin{cases} L\tilde{u}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \Omega_T \\ \tilde{u}(x,0) = 0 & \forall x \in \bar{\Omega} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(x,t) + k(x,t)\tilde{u}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \end{cases} .$$

Wir wollen zeigen, dass dann $\tilde{u} \equiv 0$ und somit $u_1 = u_2$ in $\bar{D}$ folgt. Wir nehmen an, es gibt $(x^*,t^*) \in \bar{D}$ mit $\tilde{u}(x^*,t^*) > 0$. Dann nimmt $\tilde{u}$ an einer Stelle $(\hat{x},\hat{t}) \in \bar{D}$ ein positives Maximum M an. Nach Satz 3.6 kann $(\hat{x},\hat{t})$ nicht im parabolischen Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ liegen, denn sonst wäre $\tilde{u}$ konstant, im Widerspruch zur Anfangsbedingung $\tilde{u}(x,0) = 0 \neq M$ für x aus $\bar{\Omega}$. Die Anfangsbedingung sichert auch $\hat{t} \neq 0$. Es bleibt also nur die Möglichkeit $(\hat{x},\hat{t}) \in \partial\Omega \times (0,T]$. Für $\hat{t} < T$ ist an der Stelle des Maximums die starke innere Kugelbedingung erfüllt. Da nach den vorausgegangenen Überlegungen im Inneren von D und insbesondere im Inneren der Kugel an $(\hat{x},\hat{t})$ kein weiteres Maximum liegen kann, können wir Satz 3.7 anwenden und erhalten

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(\hat{x},\hat{t}) < 0.$$

Mit $k(\hat{x},\hat{t}) \leq 0$ und $\tilde{u}(\hat{x},\hat{t}) = M > 0$ ergibt sich aber ein Widerspruch zur Randbedingung. Für $\hat{t} = T$ gilt

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(\hat{x},\hat{t}) \leq 0.$$

Das folgt aus der Definition der Richtungsableitung und weil $\tilde{u}$ im Innern von D nur Werte annimmt, die echt kleiner sind als M. In diesem Fall gilt aber $k(\hat{x},\hat{t}) < 0$ was dann ebenso zum Widerspruch führt. Folglich kann $\tilde{u}$ in $\bar{D}$ keine positiven Werte annehmen. Die selbe Argumentation gilt auch für $-\tilde{u} = u_2 - u_1$. Demnach kann $\tilde{u}$ in $\bar{D}$ auch keine negativen Werte annehmen. Es folgt die Behauptung. $\square$

Die innere Kugelbedingung ist eine sehr starke Voraussetzung. Fordert man aber $k(x,t) < 0$ in $\partial\Omega \times (0,T]$, so kann man darauf verzichten. Dasselbe gilt, wenn man Dirichlet'sche Randdaten betrachten, anstatt wie hier Robin'sche.

4.2 A-priori-Abschätzungen

Eine weitere einfache Folgerung aus dem Maximumprinzip sind A-priori-Abschätzungen, welche es ermöglichen in Abhängigkeit von der rechten Seite f und vorgegebenen Anfangs- und Randdaten Schranken für die Lösung u der inhomogenen Gleichung $Lu = f$ anzugeben. Wir betrachten zunächst den parabolischen Fall. Der Beweis wurde aus [9, S.15] entnommen.

Satz 4.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $T > 0$ vorgegeben. L sei gleichmäßig parabolisch mit $c \leq 0$ in Ω_T. $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ sei eine Lösung der Gleichung $Lu = f$ in Ω_T zu gegebener beschränkter rechter Seite f. Dann gibt es eine Konstante γ , welche von Ω, T und L abhängt, so dass gilt*

$$\sup_{(x,t)\in\Omega_T} |u(x,t)| \leq \sup_{(x,t)\in\Gamma_T} |u(x,t)| + \gamma \sup_{(x,t)\in\Omega_T} |f(x,t)|.$$

Beweis: Da Ω beschränkt ist, gibt es $d > 0$ mit $|x| \leq d$ für alle x aus Ω. Weil die Koeffizienten des Ausdrucks L beschränkt sind gibt es eine Schranke $\beta > 0$ mit $|b_1(x,t)| \leq \beta$ für alle $x \in \Omega, t \in (0,T]$. Weiterhin existiert ein μ_0, so dass für alle $(x,t) \in \Omega_T$ und alle $y_1 \in \mathbb{R}$ gilt

$$a_{11}(x,t)\, y_1^2 \geq \mu_0\, y_1^2.$$

Wir setzen $\alpha = 1 + \frac{\beta}{\mu_0}$ und definieren die Funktion $h : \bar{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x,t) = e^{2\alpha d} - e^{\alpha(x_1+d)}.$$

Für $x \in \Omega$ gilt dann $h(x,t) \geq 0$. Nun erhalten wir für $(x,t) \in \Omega_T$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
Lh(x,t) &= -a_{11}(x,t)\alpha^2 e^{\alpha(x_1+d)} - b_1(x,t)\alpha e^{\alpha(x_1+d)} + c(x,t)(e^{2\alpha d} - e^{\alpha(x_1+d)}) \\
&\leq -(a_{11}(x,t)\alpha^2 + b_1(x,t)\alpha)e^{\alpha(x_1+d)} \\
&\leq -(\mu_0\alpha^2 - \beta\alpha)\ 1 \\
&= -\mu_0(1+\frac{\beta}{\mu_0})^2 + \beta(1+\frac{\beta}{\mu_0}) \\
&= -\mu_0 - 2\beta - \frac{\beta^2}{\mu_0} + \beta + \frac{\beta^2}{\mu_0} \\
&\leq -\mu_0
\end{aligned}$$

Wir wollen das Maximumprinzip auf die Funktion $v : \bar{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ mit

$$v(x,t) = u(x,t) - \sup_{(y,s)\in\Gamma_T} \{u^+(y,s)\} - \frac{1}{\mu_0} \sup_{(y,s)\in\Omega_T} \{f^-(y,s)\}\, h(x,t)$$

anwenden. Im parabolischen Zylinder Ω_T gilt

$$\begin{aligned} Lv(x,t) &= Lu(x,t) - \sup_{(y,s)\in\Gamma_T} \{u^+(y,s)\} c(x,t) - \frac{1}{\mu_0} \sup_{(y,s)\in\Omega_T} \{f^-(y,s)\} Lh(x,t) \\ &\geq f(x,t) + \sup_{(y,s)\in\Omega_T} \{f^-(y,s)\} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Auf dem parabolischen Rand Γ_T erhalten wir

$$v(x,t) \leq u(x,t) - \sup_{(y,s)\in\Gamma_T} \{u^+(y,s)\} \leq 0.$$

Durch Anwendung von Satz 3.6 folgt nun, dass in Ω_T kein positives Maximum von v liegen kann. Somit gilt für alle $(x,t) \in \Omega_T$

$$u(x,t) - \sup_{(y,s)\in\Gamma_T} \{u^+(y,s)\} - \frac{1}{\mu_0} \sup_{(y,s)\in\Omega_T} \{f^-(y,s)\}\, h(x,t) \leq 0.$$

Nach Umstellen der Ungleichung und Supremumsbildung erhalten wir

$$\sup_{(x,t)\in\Omega_T} \{u(x,t)\} \leq \sup_{(x,t)\in\Gamma_T} \{u^+(x,t)\} + \gamma \sup_{(x,t)\in\Omega_T} \{f^-(x,t)\}.$$

Dabei ist die Konstante gegeben durch

$$\gamma = \frac{1}{\mu_0}(e^{2\alpha d} - 1) = \frac{1}{\mu_0}(e^{2(1+\frac{\beta}{\mu_0})d} - 1).$$

Wendet man dieses Resultat auf die Gleicung $L(-u) = -f$ an, so erhält man

$$\sup_{(x,t)\in\Omega_T} \{-u(x,t)\} \leq \sup_{(x,t)\in\Gamma_T} \{u^-(x,t)\} + \gamma \sup_{(x,t)\in\Omega_T} \{f^+(x,t)\}.$$

Insgesamt folgt die Behauptung. □

Satz 4.2 liefert auch eine Stabilitätsaussage für das Problem

$$\begin{cases} Lu(x,t) = f(x,t) & \forall (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) = g(x,t) & \forall (x,t) \in \Gamma_T \end{cases}.$$

Sind u_1 und u_2 zwei Lösungen zu unterschiedlichen Anfangs- und Randdaten g_1, g_2 oder rechten Seiten f_1, f_2, so lässt sich die Differenz $u_1 - u_2$ abschätzen durch

$$\sup_{(x,t)\in\Omega_T} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \sup_{(x,t)\in\Gamma_T} |g_1(x,t) - g_2(x,t)| + \gamma \sup_{(x,t)\in\Omega_T} |f_1(x,t) - f_2(x,t)|.$$

Für $g_1 = g_2$ und $f_1 = f_2$ folgt daraus auch die Einzigkeit der Lösung.

Wir wollen noch eine Satz 4.2 entsprechende Aussage für den elliptischen Fall formulieren. Der Beweis kann völlig analog geführt werden. Es genügt überall $(x,t) \in \Omega_T$ durch $x \in D$ und $(x,t) \in \Gamma_T$ durch $x \in \partial D$ zu ersetzen. Ansonsten findet man auch einen Beweis bei Gilbarg und Trudinger [6, S.36].

Satz 4.3. *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. L sei gleichmäßig elliptisch mit $c \leq 0$ in D. $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ sei eine Lösung der Gleichung $Lu = f$ in D zu gegebener beschränkter rechter Seite f. Dann gibt es eine Konstante γ , welche von D und L abhängt, so dass gilt*

$$\sup_{x \in D} |u(x)| \leq \sup_{x \in \partial D} |u(x)| + \gamma \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

4.3 Vergleichsprinzip für nichtlineare Gleichungen

Bisher haben wir ausschließlich lineare Differentialgleichungen untersucht. Nun werden wir unsere bisherigen Resultate nutzen um auch Aussagen für nichtlineare Probleme herzuleiten. Als wichtigstes Hilfsmittel wird uns dabei der Mittelwertsatz[1] der mehrdimensionalen Differentialrechnung dienen. Wir beginnen mit elliptischen Differentialausdrücken und definieren zunächst, was wir im nichtlinearen Fall darunter verstehen wollen.

Gegeben sei ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion

$$F : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}.$$

Wir verwenden die Bezeichnungen $F = F(x, z, d, H)$ für $x \in D$, $z \in \mathbb{R}$, $d = (d_1, ..., d_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $H = (h_{ij})_{i,j=1,...,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ist F bezüglich aller Variablen $h_{i,j}$ differenzierbar, so heißt F **elliptisch** in einem Punkt (x, z, d, H) aus dem Definitionsbereich, falls die Matrix

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h_{ij}}(x, z, d, H) \right)_{i,j=1,...,n}$$

positiv definit ist. Es sei weiterhin $u \in C^2(D)$ gegeben. Wir sagen F ist **elliptisch in Bezug auf u**, falls F in jedem Punkt $(x, u(x), \nabla u(x), H_u(x))$ mit $x \in D$ elliptisch ist. Dabei bezeichnet H_u wie bereits zuvor die Hessematrix von u.

Eine erste Version des folgenden Vergleichsprinzips findet sich in ähnlicher Form bereits in Hopf's Veröffentlichung von 1927[2]. Varianten davon sind auch in den Büchern von Gilbarg und Trudinger [6, S.443] und Protter und Weinberger [12, S.151] abgedruckt.

Satz 4.4. *Es sei D ein beschränktes Gebiet und es seien $u, v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ und F stetig differenzierbar mit*

$$\begin{aligned} F(x, u(x), \nabla u(x), H_u(x)) &\geq F(x, v(x), \nabla v(x), H_v(x)) \qquad && \forall x \in D, \\ u(x) &\leq v(x) && \forall x \in \partial D. \end{aligned}$$

Die Funktion F und alle ihre partiellen Ableitungen seien beschränkt.
Für alle $\Theta \in [0, 1]$ sei F elliptisch in Bezug auf die Funktion $\Theta u + (1 - \Theta)v$ und in D gelte

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, (\Theta u + (1 - \Theta)v)(x), (\Theta \nabla u + (1 - \Theta)\nabla v)(x), (\Theta H_u + (1 - \Theta)H_v)(x)) \leq 0.$$

Dann folgt $\quad u(x) \leq v(x) \quad$ *in D.*

[1] siehe zum Beispiel Walter [14, S. 87 f.]
[2] siehe Fußnote auf Seite 7

Beweis: Wir setzen $w := u - v$. Für festes $x \in D$ folgt durch Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned} 0 &\leq F(x, u(x), \nabla u(x), H_u(x)) - F(x, v(x), \nabla v(x), H_v(x)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial h_{ij}}(\vartheta_x) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial d_i}(\vartheta_x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \right) + \frac{\partial F}{\partial z}(\vartheta_x) w(x) \end{aligned}$$

mit einer Zwischenstelle

$$\vartheta_x = (x, \Theta_x u(x) + (1-\Theta_x) v(x), \Theta_x \nabla u(x) + (1-\Theta_x) \nabla u(x), \Theta_x H_u(x) + (1-\Theta_x) H_v(x))$$

für ein $\Theta_x \in [0, 1]$.

Mit $a_{ij}(x) = \frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial h_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial h_{ji}})(\vartheta_x)$, $b_i(x) = \frac{\partial F}{\partial d_i}(\vartheta_x)$ und $c(x) = \frac{\partial F}{\partial z}(\vartheta_x)$ können wir schreiben

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) + c(x) w(x) := Lw(x).$$

Unsere Voraussetzungen sichern, dass die Koeffizienten a_{ij}, b_i und c beschränkt sind, L elliptisch und in D die Ungleichung $c(x) \leq 0$ erfüllt ist. Auf dem Rand ∂D gilt $w(x) \leq 0$. Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt $w(x) \leq 0$ in D und somit die Behauptung. □

Die Schwierigkeit in der Anwendung des Vergleichsprinzips besteht darin, die Voraussetungen des Satzes zu prüfen, wenn die Funktionen u und v nicht bekannt sind. Ein Beispiel dafür ist die Frage nach der Einzigkeit der Lösung des nichtlinearen Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x), H_u(x)) = f(x) & \forall x \in D \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial D \end{cases} .$$

Sind u und v zwei Lösungen, dann gilt

$$\begin{aligned} F(x, u(x), \nabla u(x), H_u(x)) = F(x, v(x), \nabla v(x), H_v(x)) \qquad & \forall x \in D, \\ u(x) = v(x) \qquad & \forall x \in \partial D. \end{aligned}$$

Falls F in Bezug auf die Funktionen $\Theta u + (1 - \Theta) v$ elliptisch ist, mit nichtpositiver Ableitung nach z, dann folgt $u \equiv v$. Für konkrete Beispiele sei auf Protter und Weinberger [12, S.151 ff.] verwiesen.

Wir kommen nun zum parabolischen Fall. Das Gebiet D sei wieder von der Form $D = \Omega \times (0, T)$. F sei eine reelwertige Funktion auf dem Definitionsbereich $\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n}$. Wir schreiben $F = F(x, t, z, d, H)$. Im übrigen bezeichnen wir zu gegebener zweimal differenzierbarer Funktion u mit $\nabla_x u(x, t)$ den Vektor mit den Einträgen $(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t))_{i=1,\ldots,n}$ und mit $H_{x,u}(x)$ die Matrix $(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t))_{i,j=1,\ldots,n}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} (F_u - u_t) : \Omega_T &\to \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto F(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t), H_{x,u}(x, t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

und nennen diese **parabolisch** in (x, t) falls die Matrix

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h_{ij}}(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t), H_{x,u}(x, t) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

positiv definit ist. Das Vergleichsprinzip nimmt jetzt die folgende Form an:

Satz 4.5. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet,* $T > 0$ *und es seien* u, v *in* $C^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ *und* F *stetig differenzierbar mit*

$$\begin{aligned} (F_u - u_t)(x,t) \geq (F_v - v_t)(x,t) & \qquad \forall (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) \leq v(x,t) & \qquad \forall (x,t) \in \Gamma_T. \end{aligned}$$

Die Funktion F *und alle ihre partiellen Ableitungen seien beschränkt.*
Für alle $\xi = \Theta u + (1-\Theta)v$ *mit* $\Theta \in [0,1]$ *sei* $(F_\xi - \xi_t)$ *parabolisch in* Ω_T *und es gelte*

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,t,(\Theta u+(1-\Theta)v)(x+t),(\Theta\nabla u+(1-\Theta)\nabla v)(x,t),(\Theta H_u+(1-\Theta)H_v)(x,t)) \leq 0.$$

Dann folgt $\qquad u(x,t) \leq v(x,t) \quad$ *in* Ω_T.

Beweis: Wir setzten wieder $w := u - v$ und erhalten nach Anwendung des Mittelwertsatz

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) + c(x,t)w(x,t) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,t),$$

mit $a_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial h_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial h_{ji}})(\vartheta_{(x,t)})$, $b_i(x,t) = \frac{\partial F}{\partial d_i}(\vartheta_{(x,t)})$ und $c(x,t) = \frac{\partial F}{\partial z}(\vartheta_{(x,t)})$.

Dabei liegt $\vartheta_{(x,t)}$ zwischen $(x,t,u(x,t),\nabla_x u(x,t),H_{x,u}(x,t))$ und
$(x,t,v(x,t),\nabla_x v(x,t),H_{x,v}(x,t))$.

Die Aussage folgt dann wieder aus dem schwachen Maximumprinzip. $\square$

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass klassische Lösungen linearer elliptischer und parabolischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung einem Maximumprinzip genügen. In einem einführenden Kapitel haben wir eine entsprechende Aussage über die Maxima subharmonischer Funktionen mit Hilfe der Mittelwertungleichung gezeigt. Um dieses Resultats auf elliptische und parabolische Gleichungen auszuweiten sind wir einem gänzlich anderen, zwar elementaren, aber vor allem im parabolischen Fall doch recht langwierigen Beweisweg gefolgt. Wir haben das Randpunktlemma bewiesen und dieses genutzt um Differentialgleichungsprobleme mit Randbedingungen zweiter und dritter Art zu studieren. Dazu mussten wir die innere Kugelbedingung, eine - wie wir gesehen haben - sehr starke Voraussetzung an die Glattheit des Randes heranziehen. Abschließend haben wir einige Anwendungen in der Theorie der linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen diskutiert.

Die in dieser Arbeit behandelten Themen bilden nur einen kleinen Ausschnitt aus einem sehr umfangreichen Gebiet ab. Für ein tiefergehendes Studium sei auf die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen verwiesen. Die Monographie von Protter und Weinberger [12] enthält viele weitere Anwendungen und Beispiele. Außerdem werden dort auch hyperbolische Gleichungen behandelt. Bei Gilbarg und Trudinger [6] findet sich ein Abschnitt über Maximumprinzipien schwacher Lösungen elliptischer Gleichungen. Eine weitere interessante Anwendungsmöglichkeit ist die *P-Funktionen-Methode*. Dabei wird ein Funktional - die so genannte P-Funktion, benannt nach dem Mathematiker Lawrence E. Payne - so bestimmt, dass dieses, angewandt auf die Lösung einer Differentialgleichung, ein Maximumprinzip erfüllt. Dieses Verfahren wird benutzt um allerhand Abschätzungen für (zumeist physikalisch relevante) Größen zu erhalten, welche mit der Lösung der Differentialgleichung gekoppelt sind. Einiges darüber findet man in dem Buch von Sperb [13]. Die Arbeit von Danet [1] behandelt dieses Thema ebenso. Außerdem enthält sie ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis in dem viele Bücher und Artikel zu weiterführenden Themen gelistet sind.

Anhang: n-dimensionale Polarkoordinaten

Im Beweis von Satz 1.1 wurde die Integration einer stetigen, reellwertigen Funktion u über den Rand einer beliebigen n-dimensionalen Kugel auf die Integration über die Einheitssphäre S^{n-1} zurückgeführt. Wir wollen an dieser Stelle ausführen, warum die angegebene Transformation durchgeführt werden kann. Dazu betrachten wir die Verallgemeinerung von ebenen Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten auf beliebige Dimensionen $n \geq 3$. Die Umrechnungsvorschrift ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (r, \varphi, \vartheta_1, ..., \vartheta_{n-2}) &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r\, cos\varphi\, sin\vartheta_1\, sin\vartheta_2\, sin\vartheta_3\, \dots\, sin\vartheta_{n-2} \\ x_2 &= r\, sin\varphi\, sin\vartheta_1\, sin\vartheta_2\, sin\vartheta_3\, \dots\, sin\vartheta_{n-2} \\ x_3 &= r\, cos\vartheta_1\, sin\vartheta_2\, sin\vartheta_3\, \dots\, sin\vartheta_{n-2} \\ x_4 &= r\, cos\vartheta_2\, sin\vartheta_3\, \dots\, sin\vartheta_{n-2} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r\, cos\vartheta_{n-3}\, sin\vartheta_{n-2} \\ x_n &= r\, cos\vartheta_{n-2}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass Φ auf der offenen Menge $(0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)^{n-2}$ ein Diffeomorphismus mit Werten in $\mathbb{R}^n \backslash \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ ist[1] und somit die Voraussetzungen des Transformationssatz[2] erfüllt. Die Funktionaldeterminante ist gegeben durch

$$\det \Phi'(r, \varphi, \vartheta_1, ..., \vartheta_{n-2}) = r^{n-1}\, sin\vartheta_1\, (sin\vartheta_2)^2\, ...\, (sin\vartheta_{n-2})^{n-2}.$$

Sei nun $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir wollen folgende Beziehung zeigen: Für jeden Punkt $\hat{x} \in D$ und $r > 0$, so dass der Abschluss der Kugel $B(\hat{x}, r)$ in D liegt gilt

$$\int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x) = r^{n-1} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(\hat{x} + ry)\, do(y).$$

Wir nehmen zunächst $\hat{x} = 0$ an. Um den Transformationssatz anwenden zu können, integrieren wir über die gesamte Kugel. Dabei vereinfachen wir die Natoation ein wenig, indem wir anstelle von $d\vartheta_1\, d\vartheta_2\, ...\, d\vartheta_{n-2}$ kurz $d\vartheta$ und statt

$$\int\limits_{\vartheta_1=0}^{\pi} \dots \int\limits_{\vartheta_{n-2}=0}^{\pi} \quad \text{einfach} \quad \int\limits_{\substack{\vartheta_i=0 \\ i=1,\dots,n-2}}^{\pi} \quad \text{schreiben.}$$

Die Integrationsreihenfolge ist nach dem Satz von Fubini[3] beliebig. Wir erhalten

$$\int\limits_{B(0,r)} u(x)\, dx = \int\limits_{s=0}^{r} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\substack{\vartheta_i=0 \\ i=1,\dots,n-2}}^{\pi} u(\Phi(s, \varphi, \vartheta_1, ...\vartheta_n)) s^{n-1} sin\vartheta_1 ...\, ds\, d\varphi\, d\vartheta.$$

[1] siehe zum Beispiel Walter [14, Abschnitt 7.19.4]
[2] Der Transformationssatz wird zum Beispiel bei Königsberger [7, Kapitel 9] behandelt.
[3] siehe etwa [14, S. 335 f.]

Wir fassen die Integration der Funktion u über die Kugel um Null mit Radius r als Funktion von r auf. Dazu definieren wir die Abbildung $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(r) = \int\limits_{B(0,r)} u(x)\, dx.$$

Differentiation liefert

$$\begin{aligned} f'(r) &= r^{n-1} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\substack{\vartheta_i=0 \\ i=1,\ldots,n-2}}^{\pi} u(\Phi(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots\vartheta_n)) sin\vartheta_1 \ldots\ d\varphi\ d\vartheta \\ &= \int\limits_{\partial B(0,r)} u(x)\, do(x). \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(1) &= 1 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\substack{\vartheta_i=0 \\ i=1,\ldots,n-2}}^{\pi} u(\Phi(1, \varphi, \vartheta_1, \ldots\vartheta_n)) sin\vartheta_1 \ldots\ d\varphi\ d\vartheta \\ &= \int\limits_{\partial B(0,1)} u(y)\, do(y). \end{aligned}$$

Da Φ im ersten Argument linear ist, gilt

$$r\ \Phi(1, \varphi, \vartheta_1, \ldots\vartheta_n) = \Phi(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots\vartheta_n)$$

und schließlich folgt

$$\int\limits_{\partial B(0,r)} u(x)\, do(x) = r^{n-1} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(ry)\, do(y).$$

Wir wollen nun auch Verschiebungen des Kugelmittelpunkts zulassen. Dazu setzen wir $z = x - \hat{x}$, wenden erneut den Transformationssatz an und erhalten

$$\int\limits_{B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x) = \int\limits_{B(0,r)} u(z + \hat{x})\, do(z).$$

Nach Umbenennung der Variablen können wir schreiben

$$\int\limits_{B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x) = \int\limits_{B(0,r)} u(x + \hat{x})\, do(x)$$

und dann fortfahren wir oben, so dass schließlich die Behauptung folgt. Nebenbei haben wir für $R > 0$ die folgende Beziehung gezeigt:

$$\int\limits_{B(\hat{x},R)} u(x)\, dx = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\partial B(\hat{x},r)} u(x)\, do(x)\ dr.$$

Literaturverzeichnis

[1] C.-P. Danet *The Classical Maximum Principle. Some of its Extensions and Applications*. Annals of the Academy of Romanian Scientists, Series on Mathematics and its Applications, 3 (2011), 273-299

[2] E. Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg, Wiesbaden, 2004

[3] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Band 19 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998

[4] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2008

[5] A. Friedman. *Remarks on the Maximum Principle for Parabolic Equations and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics, 8 (1958), 201-211

[6] D. Gilbarg und N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 2. Auflage, 1983

[7] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 5. korrigierte Auflage, 2004

[8] B. Krummel. *Strong Maximum Principle*. Lecture 3 aus der Vorlesungsreihe *Elliptic Partial Differential Equations*. Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge. 2012
https://www.dpmms.cam.ac.uk/ bk313/lecture3.pdf
(abgerufen am 02.07.2013)

[9] G. M. Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, überarbeitete Auflage, 2005

[10] L. Nirenberg. *A Strong Maximum Principle for Parabolic Equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 6 (1953), 167-177

[11] C. S. Morawetz, J. B. Serrin und J. G. Sinai. *Selected Works of Eberhard Hopf with commentaries*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002

[12] M. Protter und H. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967

[13] R. P. Sperb. *Maximum Principles and their Applications*. Academic Press, Inc., New York, 1981

[14] W. Walter. *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 5. erweiterte Auflage, 2002