

Polynominterpolation und numerische Integration im Zweidimensionalen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science

an der

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

angefertigt im Rahmen des Seminars „Numerische Mathematik“ der Dozenten W.-J. Beyn, E. Emmrich und T. Hüls

vorgelegt von

Robin Flohr

betreut von

Prof. Dr. Etienne Emmrich

Bielefeld, 29. März 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	5
2	Fehlerabschätzungen und der Peano-Kern	7
2.1	Grundlegende Notationen	7
2.2	Motivation der Peano-Kerne	7
2.3	Peano-Kerne	8
2.4	Anwendung der Peano-Kerne	12
2.4.1	Interpolationsrestglied nach Kowalewski	13
3	Zweidimensionale Polynominterpolation	17
3.1	Interpolation auf Normalgebieten	17
3.1.1	Existenz	18
3.1.2	Eindeutigkeit	18
3.2	Stückweise polynomiale Interpolation mittels Dreiecken	20
3.2.1	Existenz	23
3.3	Stückweise polynomiale Interpolation mittels Vierecken	24
4	Zweidimensionale numerische Integration	29
4.1	Integration auf Normalgebieten	30
4.2	Stückweise Integration mittels Dreiecken	30
4.3	Stückweise Integration mittels Vierecken	32
5	Fehlerdarstellung im Zweidimensionalen	35
5.1	Sard-Kerne	35

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese Bachelorarbeit befasst sich mit den Themen der Polynominterpolation und numerischen Integration im Zweidimensionalen. Desweiteren werden Fehlerdarstellungen mit Hilfe von Peano- und Sard-Kernen behandelt. Die Fehlerdarstellungen beziehen sich dabei in erster Linie nicht auf ein spezielles Problem sondern versuchen mehrere Problemstellungen zu umfassen. Sie dienen dazu, bei der Anwendung auf ein spezielles Problem, die Fehlerdarstellung mit weniger Aufwand herzuleiten. Die Peano-Kerne finden für Problemstellungen im Eindimensionalen Verwendung, wohingegen die Sard-Kerne im Zweidimensionalen den Fehler beschreiben. Zur Motivierung und als Anwendung dient bei den Peano-Kernen die Trapezregel und das Interpolationsrestglied nach Kowalewski. Das letztere ist eine Anwendung der Peano-Kerne auf das Lagrangesche Interpolationspolynom. Bei den Sard-Kernen sind es die Interpolation und die numerische Integration im Zweidimensionalen.

Bei der Lagrange Polynominterpolation im Zweidimensionalen kommen jedoch die gleichen Probleme zustande wie im Eindimensionalen. Deswegen wird, um ein besseres Interpolationspolynom zu finden, in dieser Arbeit auch die stückweise Interpolation mit Dreiecken und Vierecken betrachtet. Dabei wird unser Interpolationsgebiet in Dreiecke bzw. Vierecke unterteilt und anschließend darauf ein interpolierendes Polynom gesucht, welches von den anderen Dreiecken bzw. Vierecken unabhängig beschrieben werden kann. Zur Vereinfachung wird noch jedes Dreieck und Viereck auf das Einheitsdreieck bzw. Einheitsquadrat mit einer affin-linearen Transformation abgebildet. Dadurch brauchen nur noch für die Einheitsdreiecke bzw. Einheitsquadrate Basispolynome gesucht werden, um ein Interpolationspolynom zu bestimmen. Bei der Wahl der Interpolationsknoten ist jedoch das Einheitsquadrat problematischer als das Einheitsdreieck.

Die numerische Integration im Zweidimensionalen basiert wie im eindimensionalen Fall auch häufig auf der Interpolation, weil wir dann nur das Interpolationspolynom integrieren müssen. Wir übernehmen dabei die oben angesprochenen drei Möglichkeiten für ein Interpolationspolynom, also die Lagrangesche Polynominterpolation sowie die Interpolation mit Dreiecken und Vierecken.

In dieser Arbeit wurde aus Zeitgründen die Fehlerdarstellung und Fehlerabschätzung für die Polynominterpolation und numerische Integration nicht behandelt. Außerdem wird nicht auf die Konvergenz und die Konsistenz eingegangen.

1 Vorwort

Diese Arbeit orientiert sich bei dem Thema der Peano-Kerne besonders an dem Buch von *Plato* [8] und bei der Interpolation und numerischen Integration an dem Buch von *Quarteroni* [10]. Das Interpolationsrestglied nach Kowalewski sowie Themen aus dem Zweidimensionalen auf Normalgebieten orientieren sich an dem Buch von *Hämmerlin* [6].

2 Fehlerabschätzungen und der Peano-Kern

In diesem Kapitel wollen wir eine Fehlerdarstellung im Eindimensionalen herleiten, die nicht nur für ein spezielles Problem Verwendung findet, sondern auf mehrere Problemstellungen angewendet werden kann. Dafür werden wir zu Beginn zwei Notationen einführen.

2.1 Grundlegende Notationen

Notation 2.1.

Wir werden im späteren Verlauf die positiv abgeschnittene Potenz

$$(x - t)_+^m := \begin{cases} (x - t)^m & \text{für } x \geq t \\ 0 & \text{für } x < t \end{cases} \quad (2.1.1)$$

für $x, t \in \mathbb{R}$ häufig benötigen. Hier sei bemerkt, dass die Funktion $(x, y) \mapsto (x - t)_+^m$ stetig und integrierbar ist, denn dies ist Voraussetzung für spätere Beweisführungen.

Notation 2.2.

Der Raum $\mathcal{C}^m[a, b]$ mit $m \in \mathbb{N}$ bezeichne den Raum der m -mal stetigen differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Wenn $m = -1$ ist, also $\mathcal{C}^{-1}[a, b]$, wird dieser als Raum der stückweise stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bezeichnet.

2.2 Motivation der Peano-Kerne

Im Folgenden wird die Fehlerdarstellung von Peano motiviert. Dies geschieht mit dem

Beispiel 2.1 (Quadratur: Trapezregel).

Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $\int_{-1}^1 f(x) dx$ betrachten wir die Trapezregel auf dem Intervall $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathcal{Q}(f) = f(-1) + f(1) \quad (2.2.1)$$

2 Fehlerabschätzungen und der Peano-Kern

für eine gegebene Funktion $f: [-1, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die zweimal stetig differenzierbar sein soll. Der Fehler der Trapezregel lässt sich dann schreiben als

$$\mathcal{R}(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx - (f(-1) + f(1)). \quad (2.2.2)$$

Für den Fehler lässt sich ein $\xi \in [-1, 1]$ in Abhängigkeit von f finden, so dass

$$\mathcal{R}f = -\frac{2}{3}f''(\xi) \quad (2.2.3)$$

gilt. Diese Behauptung wird später mit Hilfe des *Satzes von Peano* bewiesen (siehe Abschnitt 2.2).

Bei diesem Beispiel wurden beliebige Funktionen betrachtet, die aus dem Raum $\mathcal{C}^2[-1, 1]$ stammen. Dies lässt sich nun auch noch allgemeiner fassen, indem wir für unsere Problemstellung das Funktional (2.3.1), das in dem nächsten Abschnitt definiert wird, verwenden.

2.3 Peano-Kerne

Die Peano-Kerne bieten uns eine Möglichkeit, für ganz unterschiedliche Verfahren sowie Problemstellungen aus der Numerik Fehlerdarstellungen einheitlich herzuleiten. Als Problemstellung kann zum Beispiel die Interpolation, Integration oder die Differenziation gemeint sein. Bei den sonst aus der Numerik üblichen Fehlerdarstellungen betrachten wir unseren Fehler meist als Fehlerfunktion. Dies wollen wir nun dahingehend ändern, dass wir unsere sonstige Fehlerfunktion durch ein Funktional $\mathcal{R}: \mathcal{C}^{-1}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}f = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k) + \beta \int_a^b f(x)dx \quad (2.3.1)$$

ersetzen. Hierbei seien $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ paarweise verschiedene Stützstellen und $\alpha_k, \beta \in \mathbb{R}$ gegebene Gewichte für das zu betrachtende Problem auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Außerdem existiere eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, so dass das Funktional \mathcal{R} für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich r verschwindet. Von nun an sollen alle Funktionale, die wir in diesem Kapitel betrachten, diese lineare Darstellung besitzen.

Definition 2.1 (Peano-Kern).

Sei \mathcal{R} ein Funktional wie in (2.3.1) gegeben. Der Peano-Kern ist durch

$$K_m(t) := \frac{1}{m!} \mathcal{R}_x((x-t)_+^m) \quad (2.3.2)$$

für eine natürliche Zahl m und rationale Zahlen x und t definiert. Hierbei bedeutet \mathcal{R}_x , dass das Argument von \mathcal{R} als Funktion in x aufgefasst wird.

Als Vorbereitung für den Beweis des *Satzes von Peano* wird nun folgendes Lemma angegeben.

Lemma 2.1.

Seien ein Funktional \mathcal{R} wie in (2.3.1) und eine Funktion $f \in C^{m+1}[a, b]$ gegeben. Dann gilt die Identität

$$\mathcal{R}_x\left(\frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dt\right) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t)\mathcal{R}_x((x-t)_+^m) dt. \quad (2.3.3)$$

Beweis. Da der Term $\frac{1}{m!}$ aus dem Funktional wegen der Linearität herausgezogen werden kann, wird die Gleichheit ohne diesen Term gezeigt. Da f nach Definition stetig und $(x, y) \mapsto (x-t)_+^m$ auch stetig ist, sind alle folgenden Integrale wohldefiniert. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_x\left(\int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dt\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \left(\int_a^b f^{(m+1)}(t)(x_k-t)_+^m dt\right) + \beta \int_a^b \left(\int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dt\right) dx \\ &= \int_a^b f^{(m+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k (x_k-t)_+^m\right) dt + \beta \int_a^b \left(\int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dx\right) dt \\ &= \int_a^b f^{(m+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k (x_k-t)_+^m\right) dt + \int_a^b f^{(m+1)}(t) \left(\beta \int_a^b (x-t)_+^m dx\right) dt \\ &= \int_a^b f^{(m+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k (x_k-t)_+^m + \beta \int_a^b (x-t)_+^m dx\right) dt \\ &= \int_a^b f^{(m+1)}(t)\mathcal{R}_x((x-t)_+^m) dt. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Hier lassen sich in der zweiten Zeile die Integrale nach dem *Satz von Fubini* vertauschen, da beide Intervalle kompakt und die Funktionen stetig sind.

q.e.d.

Nach dieser Vorbereitung kommen wir nun zum

2 Fehlerabschätzungen und der Peano-Kern

Satz 2.1 (Satz von Peano).

Seien eine natürliche Zahl r und ein lineares Funktional $\mathcal{R} : \mathcal{C}^{-1}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (2.3.1) gegeben, welches für alle Polynome p mit Grad kleiner oder gleich r verschwindet.

Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{C}^{m+1}[a, b]$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq m \leq r$,

$$\mathcal{R}f = \int_a^b f^{(m+1)}(t)K_m(t)dt. \quad (2.3.5)$$

Beweis. Wir entwickeln als erstes die Funktion f nach dem *Satz von Taylor* im linken Randpunkt a bis zum m -ten Glied. Das Restglied stellen wir in Integralform dar. Für jedes $x \in [a, b]$ gilt

$$f(x) = \sum_{i=0}^m \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \frac{1}{m!} \int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt. \quad (2.3.6)$$

Wir setzen

$$p_m(x) := \sum_{i=0}^m \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \quad (2.3.7)$$

und

$$r_m(x) := \frac{1}{m!} \int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt. \quad (2.3.8)$$

Weil das Funktional \mathcal{R} für alle Polynome mit dem Grad kleiner gleich r verschwindet und p_m ein Polynom vom Grad m ist, ist $\mathcal{R}p_m = 0$.

Das Restglied der Taylorentwicklung lässt sich wie folgt umformen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt \\ &= \frac{1}{m!} \int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt + \frac{1}{m!} \int_x^b f^{(m+1)}(t) \underbrace{(x-t)_+^m}_{=0 \text{ auf } [x,b]} dt \\ &= \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dt. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Folglich und weil \mathcal{R} und das Integral linear sind, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f &= \mathcal{R}(p_m + r_m) \\ &= \mathcal{R}p_m + \mathcal{R}r_m \\ &= \mathcal{R} \left(\frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dt \right). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Nun gilt weiter nach dem vorherigen Lemma 2.1

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left(\frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) (x-t)_+^m dt \right) &= \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) \mathcal{R}((x-t)_+^m) dt \\ &= \int_a^b f^{(m+1)}(t) K_m(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

q.e.d.

Es lässt sich folgendes Korollar aus dem Satz von Peano ziehen.

Korollar 2.1.

Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 2.1 (Satz von Peano) sei $\mathcal{R}(x^{r+1}) \neq 0$ erfüllt und außerdem wechsele der Peano-Kern K_r sein Vorzeichen nicht. Dann gilt die Darstellung

$$\mathcal{R}f = \frac{\mathcal{R}(x^{r+1})}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi) \quad (2.3.12)$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$ abhängig von dem gegebenen f .

Beweis. Hier wird der Fall $m = r$ betrachtet. f ist nach Definition stetig. Der Peano-Kern K_r ist integrierbar und ändert sein Vorzeichen nicht. Eine einfache Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf

$$\mathcal{R}f = \int_a^b f^{(r+1)}(t) K_r(t) dt \quad (2.3.13)$$

liefert dann

$$\mathcal{R}f = \left(\int_a^b K_r(t) dt \right) f^{(r+1)}(\xi) \quad (2.3.14)$$

mit einem passendem $\xi \in [a, b]$. Wir wenden diese Identität auf das Monom $x \mapsto x^{r+1}$ an und erhalten so

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x^{r+1}) &= \left(\int_a^b K_r(t) dt \right) (x^{r+1})^{(r+1)}(\xi) \\ &= \left(\int_a^b K_r(t) dt \right) (r+1)!. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Dies liefert mittels einfacher Umstellung

$$\int_a^b K_r(t) dt = \frac{\mathcal{R}(x^{r+1})}{(r+1)!}. \quad (2.3.16)$$

q.e.d.

2.4 Anwendung der Peano-Kerne

Beispiel 2.2 (Fortsetzung der Fehlerabschätzung der Trapezregel).

Wir betrachten wieder das Fehlerfunktional (2.2.2). Es ist bekannt, dass die Trapezregel exakt ist für Polynome vom Grad 1, nicht aber für Polynome vom Grad 2. Daher ist bei der Anwendung vom Satz 2.1 (Satz von Peano) $r = 1$ zu wählen. Damit können wir nun den Peano-Kern für $m = 1$ bestimmen,

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \mathcal{R}_x((x-t)_+) \\ &= \int_{-1}^1 (x-t)_+ dx - (1-t)_+ - (-1-t)_+ \\ &= \int_{-1}^t (x-t)_+ dx + \int_t^1 (x-t)_+ dx + t - 1 - 0 \\ &= \int_t^1 (x-t) dx + t - 1 \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - tx \right]_t^1 + t - 1 \\ &= \frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}t^2 + t^2 + t - 1 \\ &= \frac{1}{2}(t^2 - 1). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Folglich ändert der Peano-Kern auf $[-1, 1]$ sein Vorzeichen nicht. Desweiteren betrachten wir den Term $\mathcal{R}_x(x^{r+1})$ für $r = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(x^2) &= \int_{-1}^1 x^2 dx - 1^2 - (-1)^2 \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 - 2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2 \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Dieser ist ungleich Null, und somit lässt sich das Korollar 2.1 anwenden. Durch Einsetzen bekommen wir mit einem passendem $\xi \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f &= \frac{\mathcal{R}(x^{r+1})}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi) \\ &= \frac{-\frac{4}{3}}{2} f''(\xi) \\ &= -\frac{2}{3} f''(\xi). \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

2.4.1 Interpolationsrestglied nach Kowalewski

In diesem Abschnitt wollen wir den *Satz von Peano* auf das Lagrangesche Interpolationspolynom anwenden, um den Interpolationsfehler darzustellen.

Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ das Intervall und $f \in \mathcal{C}^{m+1}[a, b]$ unsere Funktion für unser Interpolationsproblem. Wir betrachten dafür dann $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ und für den Fehler einen beliebigen, aber festen Wert $x \in [a, b]$. Wir können dann das Fehlerfunktional

$$Rf = f(x) - \sum_{k=0}^n f(x_k) \mathcal{L}_k(x) \tag{2.4.4}$$

mit den Lagrangeschen Basispolynomen \mathcal{L}_k angeben. Dieses verschwindet für Polynome vom Grad kleiner oder gleich n , da $n + 1$ Stützstellen vorliegen. Der Peano-Kern lässt sich für dieses Funktional und $m \leq n$ dann schreiben als

$$\begin{aligned} m!K_m(t) &= \mathcal{R}_x((x-t)_+^m) \\ &= (x-t)_+^m - \sum_{k=0}^n (x_k-t)_+^m \mathcal{L}_k(x) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n \mathcal{L}_k(x) \right)}_{=0} (x-t)_+^m - \sum_{k=0}^n (x_k-t)_+^m \mathcal{L}_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n ((x-t)_+^m - (x_k-t)_+^m) \mathcal{L}_k(x). \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Desweiteren gilt für eine beliebige Stützstelle x_k mit $k = 0, 1, \dots, n$

2 Fehlerabschätzungen und der Peano-Kern

$$\begin{aligned}
& \int_a^b [(x-t)_+^m - (x_k-t)_+^m] f^{(m+1)}(t) dt \\
&= \int_a^b (x-t)_+^m f^{(m+1)}(t) dt - \int_a^b (x_k-t)_+^m f^{(m+1)}(t) dt \\
&= \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t) dt - \int_a^{x_k} (x_k-t)^m f^{(m+1)}(t) dt \\
&= \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t) dt - \int_a^x (x_k-t)^m f^{(m+1)}(t) dt \\
&\quad - \int_x^{x_k} (x_k-t)^m f^{(m+1)}(t) dt \\
&= \int_a^x [(x-t)^m - (x_k-t)^m] f^{(m+1)}(t) dt - \int_x^{x_k} (x_k-t)^m f^{(m+1)}(t) dt.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Dies in Verbindung mit dem Satz von Peano führt uns zu

$$\begin{aligned}
& m! \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt \\
&= \int_a^x f^{(m+1)}(t) \sum_{k=0}^n [(x-t)^m - (x_k-t)^m] \mathcal{L}_k(x) dt \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \mathcal{L}_k(x) \int_{x_k}^x (x_k-t)^m f^{(m+1)}(t) dt.
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Betrachten wir nun die Gleichheit

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n ((x-t)^m - (x_k-t)^m) \mathcal{L}_k(x) \\
&= (x-t)^m - \sum_{k=0}^n (x_k-t)^m \mathcal{L}_k(x).
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Dann ist $\sum_{k=0}^n (x_k-t)^m \mathcal{L}_k(x)$ für $m \leq n$ das Interpolationspolynom für $(x-t)^m$ und somit sind beide Seiten der Gleichung 2.4.8 null. Damit lässt sich der letzte Term von 2.4.6 überführen in

$$\begin{aligned}
Rf &= \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^n \mathcal{L}_k(x) \int_{x_k}^x (x_k-t)_+^m f^{(m+1)}(t) dt.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Wir sehen, dass wir den Fehler für die Interpolation etwas vereinfacht mit Hilfe des Satzes von Peano darstellen können.

Bemerkung 2.1.

Der *Satz von Peano* gilt auch für allgemeinere Funktionale der Form

$$\mathcal{R}f = \sum_{i=0}^s \sum_{k=0}^{n_i} \alpha_{ik} f^{(i)}(x_{ik}) + \beta \int_a^b f(x) dx \quad (2.4.10)$$

mit $f \in \mathcal{C}^{m+1}[a, b]$. Dafür muss man sich überlegen, warum das Lemma 2.1 auch für solche Funktionale seine Gültigkeit behält. Dies sei jedoch nur am Rande bemerkt und wird hier nicht weiter vertieft.

2 Fehlerabschätzungen und der Peano-Kern

3 Zweidimensionale Polynominterpolation

Zur numerischen Integration im Eindimensionalen wird häufig die Interpolation verwendet, da mittels dieser die Integration sehr einfach ist. Dies ist im Zwei- oder Mehrdimensionalen nicht anders und somit wird nun der numerischen Integration die Interpolation vorangestellt. Wir werden wegen der Kürze der Arbeit nur den zweidimensionalen Fall betrachten. Jedoch ist für die Erweiterung auf beliebige Dimensionen der zweidimensionale Fall von besonderer Bedeutung, da es sich damit relativ leicht zu mehreren Dimensionen übergehen lässt.

Wir bekommen nun anstatt des Interpolationsintervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ im Eindimensionalen ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, auf dem eine gegebene Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ interpoliert werden soll. In diesem Abschnitt bezeichne f immer unser zu interpolierendes Polynom und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ unser Interpolationsgebiet. Hier werden zwei Fälle von verschiedenen Interpolationsgebieten betrachtet: Einmal werden wir uns den einfachen Fall anschauen, wo unser Interpolationsgebiet Ω ein Normalgebiet in beiden Richtungen ist. Wenn kein Normalgebiet vorliegt oder wenn die Interpolationsknoten nicht gleichförmig auf einem kartesischem Gitter verteilt sind, ist das Interpolationsproblem meist schwierig zu lösen. Aus diesem Grund wird hier die stückweise Polynominterpolation mittels Dreiecken auf einem Polygon betrachtet. Wir geben zuerst noch die Definition für den Grad eines Interpolationspolynoms an.

3.1 Interpolation auf Normalgebieten

Zunächst einige Definitionen.

Definition 3.1 (Normalgebiet).

Ein Gebiet Ω heißt *Normalgebiet* bezüglich der x -Achse, wenn die x -Koordinate feste Grenzen besitzt, die nicht von den anderen Koordinaten abhängig sind. Ein Gebiet Ω heißt *Normalgebiet*, wenn es bezüglich aller Achsen ein *Normalgebiet* ist.

Definition 3.2.

Der Raum $\mathcal{P}_{n,m}$ bezeichne den Polynomraum mit den räumlichen Variablen x und y , wobei der Grad von x höchstens n und der Grad von y höchstens m sein soll.

3 Zweidimensionale Polynominterpolation

Wir betrachten den Fall, in dem das Interpolationsgebiet $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, also das kartesische Produkt zweier Intervalle ist. Dann können wir das Gebiet durch das Gitter $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und $c = y_0 < \dots < y_m = d$ mit $(n+1)(m+1)$ Gitterpunkten diskretisieren. Damit können wir unsere Interpolationsaufgabe für diesen Abschnitt angeben.

Definition 3.3 (Interpolationsaufgabe).

Zu vorgegebenen Werten $f(x_i, y_j)$ an den Stützstellen wird ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{n,m}$ gesucht, so dass die Interpolationsforderungen

$$p(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad (3.1.1)$$

für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ und alle $j \in \{0, \dots, m\}$ erfüllt sind.

3.1.1 Existenz

Für die zweidimensionale Interpolation auf einem Normalgebiet lässt sich analog zum Eindimensionalen mit den Lagrangeschen Basispolynomen ein Interpolationspolynom angeben. Das Interpolationpolynom lautet

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \mathcal{L}_i(x) \mathcal{L}_j(y). \quad (3.1.2)$$

Hierbei seien die $\mathcal{L}_i \in \mathcal{P}_n$ und $\mathcal{L}_j \in \mathcal{P}_m$ die eindimensionalen Lagrangeschen Basispolynome. Es gilt dabei, dass

$$\mathcal{L}_i(x_k) \mathcal{L}_j(y_l) = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (3.1.3)$$

und somit liefert das Interpolationspolynom für einen Punkt (x_i, y_j) genau den Wert $f(x_i, y_j)$. Somit ist dies eine Lösung unserer Interpolationsaufgabe 3.3. Hier sei jedoch bemerkt, dass die Nachteile der eindimensionalen Lagrange-Interpolation auch im Zweidimensionalen vorhanden sind. Auf den Stützstellen werden zwar exakte Werte geliefert, aber auf anderen Punkten können sehr starke Abweichungen entstehen.

3.1.2 Eindeutigkeit

Die Eindeutigkeit eines Interpolationspolynoms auf einem Normalgebiet wird mit dem folgendem Satz angegeben.

Satz 3.1.

Zu einer wie in 3.3 gegebenen Interpolationsaufgabe existiert genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{n,m}$, welches alle Interpolationsforderungen erfüllt.

Beweis. Da die Existenz eines solchen Polynoms schon nach Abschnitt 3.1.1 geklärt ist, muss nun noch die Eindeutigkeit bewiesen werden. Diese folgt indirekt aus der Eindeutigkeit eines Interpolationspolynoms in einer Dimension. Sei also nun

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} x^i y^j \quad (3.1.4)$$

ein gegebenes Interpolationspolynom. Dann interpoliert das eindimensionale Interpolationspolynom

$$q_k(y) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n \alpha_{ij} x_k^i \right) y^j = \sum_{j=0}^m \beta_{kj} y^j \quad (3.1.5)$$

für jedes feste x_k mit $k \in \{0, \dots, n\}$ bezüglich y die Werte $f(x_k, y_j)$, $0 \leq j \leq m$. Die Koeffizienten β_{kj} sind also eindeutig bestimmt. Nun müssen noch die $(m+1)$ Gleichungssysteme

$$\beta_{kj} = \sum_{i=0}^n \alpha_{ij} x_k^i, \quad 0 \leq k \leq n \quad (3.1.6)$$

für alle $j \in \{0, \dots, m\}$ gelöst werden. Diese Gleichungssysteme lassen sich in Matrixform schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Die linke Matrix ist eine *Vandermonde*-Matrix, da die Stützstellen x_0, \dots, x_n paarweise verschieden sind, und hat somit eine Determinante, die ungleich Null ist. Folglich lassen sich auch diese Gleichungssysteme eindeutig lösen. Da nun alle Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, ist das Interpolationspolynom durch diese eindeutig.

q.e.d.

3.2 Stückweise polynomiale Interpolation mittels Dreiecken

Da eine Interpolationaufgabe im Zwei- oder Mehrdimensionalen Gebiete von komplexer Struktur beinhalten kann, werden wir nun die stückweise Polynominterpolation mittels Dreiecken betrachten. Durch die größere Flexibilität ist es leichter, ein Interpolationspolynom zu finden. In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass das Interpolationsgebiet Ω ein offenes Polygon im \mathbb{R}^2 ist.

Definition 3.4 (Triangulation).

Wenn Ω ein offenes Polygon im \mathbb{R}^2 ist, kann Ω in $K \in \mathbb{N}$ nichtüberlappende abgeschlossene Dreiecke T zerlegt werden. Außerdem wird angenommen, dass die maximale Länge der Dreiecksanten kleiner als eine positive Zahl $h \in \mathbb{R}$ ist. Eine solche Zerlegung heißt Triangulation \mathcal{T}_h , wenn jedes Paar nicht disjunkter Dreiecke eine Ecke oder eine Kante gemeinsam hat.

Für eine Triangulation gilt

$$\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \bar{\Omega}. \quad (3.2.1)$$

Um nun die Interpolationaufgabe in diesem Abschnitt anzugeben, müssen noch folgende Definitionen vorangestellt werden.

Definition 3.5.

Durch $\mathcal{P}_k(\Omega)$ wird für $k \geq 0$ der Raum der algebraischen Polynome vom Grade $\leq k$ in den räumlichen Variablen x, y bezeichnet, also

$$\mathcal{P}_k(\Omega) := \left\{ p(x, y) = \sum_{\substack{i, j=0 \\ i+j \leq k}}^k \alpha_{ij} x^i y^j; x, y \in \Omega, \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.2.2)$$

Lemma 3.1.

Für die Dimension von $\mathcal{P}_k(\Omega)$ gilt

$$d_k := \dim \mathcal{P}_k(\Omega) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad (3.2.3)$$

3.2 Stückweise polynomiale Interpolation mittels Dreiecken

Beweis. Wir verwenden für den Beweis die vollständige Induktion nach k . Wenn $k = 0$ ist, gilt $d_0 = 1$, da 1 unser einziges Basiselement ist. Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für k erfüllt ist und zeigen sie für $k + 1$. Für $i + j \leq k$ gibt es also $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ Möglichkeiten der $x^i y^j$, so dass sie nicht linear abhängig sind. Also fehlen uns noch die $k + 2$ Kombinationen für $i + j = k + 1$. Dies ergibt

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{(2k+4)}{2} = \frac{k^2 + 5k + 6}{2} = \frac{(k+2)(k+3)}{2} = d_{k+1} \quad (3.2.4)$$

und führt uns zur Behauptung.

q.e.d.

Definition 3.6.

Für $k \geq 0$ bezeichne $\mathcal{P}_k^c(\Omega)$ den Raum der stückweisen Polynome vom Grade $\leq k$, so dass für jedes $p \in \mathcal{P}_k^c(\Omega)$ die Einschränkung $p|_T$ in $\mathcal{P}_k(T)$ für jedes $T \in \mathcal{T}_h$ liegt, d.h.

$$\mathcal{P}_k^c(\Omega) := \{ p \in \mathcal{P}_k(\Omega) \mid p|_T \in \mathcal{P}_k(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \}. \quad (3.2.5)$$

Wir fassen Z als die Menge der stückweisen Interpolationsknoten $z_i = (x_i, y_i) \in \mathcal{T}_h$ für $i = 1, \dots, N$ auf. Die Polynominterpolation wird, wie zu Beginn erwähnt, in diesen Abschnitt stückweise erfolgen.

Definition 3.7 (Interpolationsaufgabe).

Es ist ein Polynom $p \in \mathcal{P}_k^c(\Omega)$ gesucht, so dass

$$p(z_i) = f(z_i) \quad (3.2.6)$$

für jedes $z_i \in Z$ erfüllt ist.

Von wichtiger Bedeutung ist die affin-lineare Transformation $\tilde{F}_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b_T$, gegeben durch

$$B_T = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, b_T = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

wobei $(x_1, y_1)^\top$, $(x_2, y_2)^\top$ und $(x_3, y_3)^\top$ Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks $T \in \mathcal{T}_h$ sein sollen. Wenn wir nun ein Interpolationspolynom für ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)^\top$, $(1, 0)^\top$ und $(0, 1)^\top$ konstruiert haben, können wir es mit der Transformation $\tilde{F}_T(\hat{x})$ auf die eigentlichen Eckpunkte abbilden. Die Umkehrfunktion \tilde{F}_T^{-1} existiert immer, da die

3 Zweidimensionale Polynominterpolation

Matrix B_T wegen der paarweise verschiedenen Stützstellen invertierbar ist. Wenn wir F_T als die transponierte Funktion von \tilde{F}_T auffassen, also

$$F_T = (\tilde{F}_T)^\top, \quad (3.2.8)$$

können wir die Transformation auch auf Zeilenvektoren anwenden, was uns die Notationen im weiteren Verlauf der Arbeit erleichtert. Die Transformation F_T wird in der Abbildung 3.1 veranschaulicht.

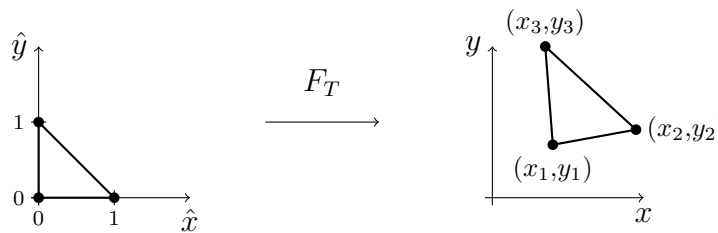


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Transformation F_T .

Der Einfachheit halber brauchen wir also nur noch Dreiecke mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ betrachten. Wir sind interessiert, lokale Basisfunktionen zu finden, die auf jedem Dreieck vollständig ohne zusätzliche Informationen benachbarter Dreiecke beschrieben werden können.

Eine einfache Basis für $\mathcal{P}_k^c(\Omega)$ besteht aus den Lagrangeschen charakteristischen Polynomen $l_i = l_i(x, y)$ mit den Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & l_i(z_j) = \delta_{ij} \\ \text{(ii)} \quad & l_i \in \mathcal{P}_k^c(\Omega) \end{aligned} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, N. \quad (3.2.9)$$

Dabei sei δ_{ij} das Kroneckersymbol. Die l_i sind jeweils auf einem Dreieck T durch ein lineares Gleichungssystem mit $\dim \mathcal{P}_k(T)$ Unbekannten und durch N Bedingungen gegeben. Diese Gleichungssysteme sind bei einer passenden Wahl der z_j eindeutig lösbar.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die z_j günstig gewählt wurden. Sie sollen das lineare Gleichungssystem eindeutig lösen und es soll für jedes Dreieck T genau $\dim \mathcal{P}_k(T)$ Interpolationsknoten geben. Knoten, die zu einer linearen Abhängigkeit im Gleichungssystem führen würden, gäben uns keine „neuen Informationen“ über unser Dreieck und wären somit zwecklos. Wenn unser Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist, existiert entweder kein Polynom, das unseren Bedingungen (3.2.9) genügt, oder es existieren mehrere Polynome, wodurch unser Interpolationspolynom nicht eindeutig wäre. Somit ist eine günstige Wahl gerechtfertigt. Eine ungünstige Wahl der Interpolationsknoten ist in Abbildung 3.2 angegeben.

3.2 Stückweise polynomiale Interpolation mittels Dreiecken

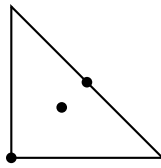


Abbildung 3.2: Eine nicht zulässige Wahl der Interpolationsknoten.

Wenn zum Beispiel $k = 0$ gilt, können die Interpolationsknoten als Schwerpunkte der Dreiecke gewählt werden, und im Fall $k = 1$ könnten die Eckpunkte der Dreiecke verwendet werden. Es sei bemerkt, dass es auch noch andere Möglichkeiten der Wahl der Interpolationsknoten gibt. Zum Beispiel könnten die Mittelpunkte der Dreieckskanten verwendet werden, was jedoch zu einer unstetigen stückweise polynomialen Interpolation über Ω führen kann. In Abbildung 3.3 werden für $k = 0, 1$ und 2 die lokalen Interpolationsknoten auf dem Einheitsdreieck dargestellt.

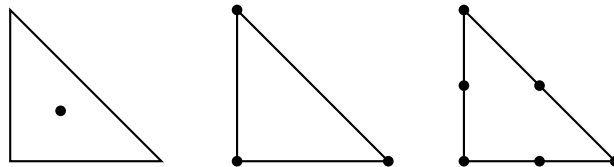


Abbildung 3.3: Möglichkeiten der Interpolationsknoten für $k = 0, 1$ und 2 von links nach rechts.

Auch könnte eine andere Basis für $\mathcal{P}_k^c(\Omega)$ verwendet werden, aber wir wollen im Folgenden die l_i als Basis beibehalten.

3.2.1 Existenz

Für die Existenz eines solchen stückweise interpolierenden Polynoms geben wir folgende Definition für ein derartiges Polynom an.

Definition 3.8 (Lagrangesche stückweise interpolierende Polynom).

Für $k \geq 0$ ist das Lagrangesche stückweise interpolierende Polynom $\Pi_h^k f \in \mathcal{P}_k^c(\Omega)$ von f durch

$$\Pi_h^k f(x, y) := \sum_{i=1}^N f(z_i) l_i(x, y) \tag{3.2.10}$$

definiert.

3 Zweidimensionale Polynominterpolation

Beachte, dass $\Pi_h^0 f$ eine stückweise konstante Funktion ist, wogegen $\Pi_h^1 f$ eine lineare Funktion auf jedem Dreieck darstellt, die in den Ecken stetig und damit auch global stetig ist. Für jedes $T \in \mathcal{T}_h$ bezeichnen wir durch $\Pi_T^k f$ die Einschränkung des stückweise interpolierenden Polynoms von f auf dem Element T . Nach Definition ist $\Pi_T^k f \in \mathcal{P}_k(T)$. Wir bezeichnen mit \tilde{z}_m^T für $m = 0, \dots, \dim \mathcal{P}_k(T) - 1$ die stückweisen Interpolationsknoten auf T und mit l_m^T die Einschränkung des Lagrangeschen charakteristischen Polynoms auf T . Die Zuordnung in (3.2.10) mit z_i ist zugeordnet l_i soll hier beibehalten werden. D.h. wenn der „lokale“ Interpolationsknoten \tilde{z}_m^T dem „globalen“ Knoten z_i entspricht, soll l_i eingeschränkt auf T genau l_m^T entsprechen.

Mit diesen Notationen können wir das stückweise interpolierende Polynom auf einem einzigen Dreieck T angeben

$$\Pi_T^k f(x, y) = \sum_{m=0}^{d_k-1} f(\tilde{z}_m^T) l_m^T(x, y). \quad (3.2.11)$$

Fahren wir mit dieser Notation fort, haben wir $l_j^T(x) = \hat{l}_j \circ F_T^{-1}(x)$, wobei $\hat{l}_j = \hat{l}_j(\hat{x})$ für $j = 0, \dots, d_k - 1$ die j -te Lagrangesche Basisfunktion für $\mathcal{P}_k(\hat{T})$ ist, die auf dem Referenzelement \hat{T} erzeugt wurde. Es sei bemerkt, dass, wenn $k = 0$ ist, $d_0 = 1$ gilt, d.h. es existiert nur ein lokaler Interpolationsknoten. Wenn $k = 1$ ist, gilt $d_1 = 3$, es existieren also drei lokale Interpolationsknoten.

Die Eindeutigkeit des stückweise interpolierenden Polynoms bei unserer Basiswahl hängt direkt von dem Gleichungssystem, gegeben durch die Bedingungen (3.2.9), ab.

3.3 Stückweise polynomiale Interpolation mittels Vierecken

In dieser Arbeit wollen wir nicht ausser Acht lassen, dass die Dreiecke nicht die einzige Möglichkeit bieten, das Interpolationsgebiet Ω stückweise zu betrachten. Wir wollen also in diesem Abschnitt noch die Polynominterpolation mit Vierecken ansprechen.

Als Einstieg betrachten wir die schon hergeleitete Transformation F_T , gegeben in (3.2.8), für Dreiecke. Wenn wir nun nicht von einem Einheitsdreieck ausgehen, sondern ein Quadrat der Kantenlänge eins verwenden, können wir die Transformation F_V für ein gegebenes Viereck V auf den Punkt $(1, 1)$ anwenden. Da nun V unser Viereck bezeichnen soll, gehen wir von den gegebenen Punkten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) und (x_4, y_4) aus, verwenden aber dennoch die ersten drei Punkte um die Transformation zu definieren. Dies liefert uns

3.3 Stückweise polynomiale Interpolation mittels Vierecken

$$\begin{aligned}
 F_V(1, 1) &= \tilde{F}_V \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_3 + x_2 - x_1 \\ y_3 + y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Der vierte Punkt wird also durch die anderen drei konstruiert und entspricht der Ergänzung der ersten drei Punkte zu einem Parallelogramm. Wenn wir nun also den vierten Punkt wie oben wählen, können wir unsere affin-lineare Transformation aus dem vorherigen Abschnitt übernehmen.

Nun wird analog zur Methode mit den Dreiecken verfahren. Wir gehen davon aus, dass unser Interpolationsgebiet Ω in $K \in \mathbb{N}$ nichtüberlappende Parallelogramme zerlegt ist, wobei die Kantenlängen kleiner oder gleich einer positiven Konstanten $h \in \mathbb{R}$ sind. Diese Zerlegung wollen wir in diesem Abschnitt mit \mathcal{V}_h bezeichnen. Wir benötigen jedoch andere Polynomräume, um passende Polynome für unsere Vierecke zu finden. Somit werden im Folgenden zwei Polynomräume und Eigenschaften dieser angegeben.

Definition 3.9.

Durch $\mathcal{Q}_k(\Omega)$ wird für $k \geq 0$ der Raum der Polynome vom Höchstgrad k in den Variablen x und y bezeichnet, also

$$\mathcal{Q}_k(\Omega) := \left\{ p(x, y) = \sum_{i,j=0, i \leq k, j \leq k}^k \alpha_{ij} x^i y^j, x, y \in \Omega \right\}. \tag{3.3.2}$$

Die Dimension des Raumes $\mathcal{Q}_k(\Omega)$ beträgt $(k + 1)^2$.

Lemma 3.2.

Für die Polynomräume gilt für $k \geq 0$

$$\mathcal{P}_k \subset \mathcal{Q}_k \subset \mathcal{P}_{2k}. \tag{3.3.3}$$

Lemma 3.3.

Für ein Polynom $p \in \mathcal{Q}_k(\Omega)$ lassen sich Polynome $p, q \in \mathcal{P}_k$ finden, so dass

$$p(x, y) = p(x) * q(y) \tag{3.3.4}$$

gilt.

3 Zweidimensionale Polynominterpolation

Definition 3.10.

Für $k \geq 0$ bezeichne $\mathcal{Q}_k^c(\Omega)$ den Raum der stückweisen Polynome vom Grade $\leq k$, so dass für jedes $p \in \mathcal{Q}_k^c(\Omega)$ die Einschränkung $p|_V$ in $\mathcal{Q}_k(V)$ für jedes $V \in \mathcal{V}_h$ liegt, d.h.

$$\mathcal{Q}_k^c(\Omega) := \{ p \in \mathcal{Q}_k(\Omega) \mid p|_V \in \mathcal{Q}_k(V) \text{ für alle } V \in \mathcal{V}_h \}. \quad (3.3.5)$$

Wir suchen analog ein Interpolynom $p \in \mathcal{Q}_k^c$, so dass das Polynom an den Stützstellen den Wert der zu interpolierenden Funktion f liefert. Für $k \geq 0$ können wir das stückweise interpolierende Polynom $\Pi_h^{k*} f \in \mathcal{Q}_k^c(\Omega)$ von f durch

$$\Pi_h^{k*} f(x, y) := \sum_{i=1}^N f(z_i) l_i(x, y) \quad (3.3.6)$$

angeben, wobei diesmal die Lagrangeschen charakteristischen Polynome l_i nicht aus P_k^c stammen, sondern aus dem Polynomraum \mathcal{Q}_k^c kommen. Die z_i seien die Interpolationsknoten. Bei der Verwendung von Parallelogrammen, ist es im Vergleich zu den Dreiecken etwas schwieriger, passende lokale Interpolationsknoten auf dem Einheitsquadrat zu finden. In Abbildung 3.4 sind zwei zulässige Möglichkeiten der Interpolationsknoten angegeben. Links wird der Mittelpunkt des Quadrates und rechts werden die Eckpunkte verwendet. Jedoch lässt sich für die Wahl der Interpolationsknoten wie in Abbildung 3.5, also die

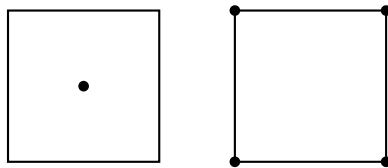


Abbildung 3.4: Möglichkeiten der Interpolationsknoten beim Einheitsquadrat.

Seitenmittelpunkte, kein Lagrangesches charakteristisches Interpolationspolynom finden. Wenn man das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für ein Lagrangesches charakteristisches

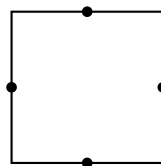


Abbildung 3.5: Diese Wahl der lokalen Interpolationsknoten besitzt keine Lösung für die Lagrangeschen charakteristischen Polynome.

Polynom aufstellt, ist die Determinante von A singulär und es lässt sich kein passendes

3.3 Stückweise polynomiale Interpolation mittels Vierecken

x finden, da b nicht im Bild von A liegt. Wenn man ein Basispolynom sucht, so dass $b = (1, 0, 0, 1)^\top$ gilt, liegt b im Bild von A und es lassen sich unendlich viele Polynome finden, die die Bedingungen erfüllen. In diesem Fall wäre also das Basispolynom nicht eindeutig lösbar. Bei den Parallelogrammen muss also noch stärker darauf geachtet werden, welche Interpolationsknoten verwendet werden.

Da wir nun die Polynominterpolation besprochen haben, können wir diese für die im nächsten Kapitel betrachtete numerische Integration verwenden.

3 Zweidimensionale Polynominterpolation

4 Zweidimensionale numerische Integration

Die mehrdimensionale Integration ist gegenüber dem Eindimensionalen genau wie bei der Interpolation deutlich schwieriger. Das Integrationsgebiet kann deutlich komplexere Strukturen aufweisen und es können nicht nur Punktsingularitäten auftreten, sondern auch Singularitäten über Mannigfaltigkeiten. Wir wollen uns nun auch wieder nur mit zwei Raumdimensionen beschäftigen.

Sei das Integrationsgebiet Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^2 mit einem hinreichend glatten Rand. In diesem Abschnitt werden wir für eine stetige Funktion f über $\bar{\Omega}$ das Problem der Approximation des Integrals

$$I(f) = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (4.0.1)$$

betrachten. Diese Approximation soll durch eine gewichtete Summe von Funktionsauswertungen stattfinden

$$Qf := \sum_{i=0}^N \alpha_i f(x_i). \quad (4.0.2)$$

Bei der Integration im Eindimensionalen wird Q oft als *Quadratur* bezeichnet, im Zweidimensionalen wird dies meist *Kubatur* genannt. Jedoch soll hier *Quadratur* für jede Raumdimension stehen. Für die Kubatur werden wir die im Kapitel 3 hergeleitete Polynominterpolation verwenden. Genau wie dort werden wir uns zunächst auf Normalgebiete einschränken und danach die stückweise Intergration mit Dreiecken anschauen. Zu Beginn definieren wir den *Grad* einer Quadraturformel.

Definition 4.1.

Sei eine Quadraturformel Q für ein Integral I über Ω gegeben. Dann besitzt Q den *Grad* k bezüglich des Polynomraumes \mathfrak{P} , falls sie exakt ist für alle Polynome $p \in \mathfrak{P}_k(\Omega)$ und es mindestens ein Polynom vom Grad $k + 1$ gibt, so dass die Quadraturformel Q nicht exakt ist.

4.1 Integration auf Normalgebieten

Wir betrachten den Fall, wo das Interpolationsgebiet ein Normalgebiet ist, also $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ gilt. Das Gebiet diskretisieren wir durch das Gitter $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und $c = y_0 < \dots < y_m = d$ mit $(n + 1)(m + 1)$ Gitterpunkten. Ähnlich wie im Eindimensionalen gehen wir von einer Interpolation über $\bar{\Omega}$ aus. Wenn wir nun f durch das Interpolationspolynom wie bei der Gleichung (3.1.2) ersetzen, bekommen wir

$$If = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \mathcal{L}_i(x) \mathcal{L}_j(y) dx dy + Rf, \quad (4.1.1)$$

wobei Rf dem Fehler entspricht.

Dies führt uns mit einfacher Umstellung zu der Kubaturformel

$$\begin{aligned} Qf &:= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \int_a^b \mathcal{L}_i(x) dx \int_c^d \mathcal{L}_j(y) dy \\ &= \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^n f(x_i, y_j) \int_a^b \mathcal{L}_i(x) dx \right] \int_c^d \mathcal{L}_j(y) dy. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Die Idee dahinter ist, dass zuerst in x -Richtung und danach in y -Richtung jeweils mit einer Eindimensionalen Newton-Cotes-Quadratur eine Näherung an das Integral bestimmt wird. Zur Veranschaulichung betrachte nun

Beispiel 4.1.

Seien $n = 2$, $m = 2$ und durch $h_x := \frac{b-a}{2}$, $h_y := \frac{d-c}{2}$ die Stützstellen in x - und y -Richtung jeweils äquidistant gegeben. Benutzt man nun bei der Kubaturformel in beiden Richtungen die Simpsons-Regel, dann entsteht die Vorschrift

$$\begin{aligned} Qf &:= \frac{h_x h_y}{9} [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2) \\ &\quad + 4(f(x_0, y_1) + f(x_1, y_0) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)) + 16f(x_1, y_1)] \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

für eine gegebene Funktion f . Diese Kubaturformel besitzt den Grad 2 bezüglich \mathcal{Q} .

4.2 Stückweise Integration mittels Dreiecken

In diesem Abschnitt wird die stückweise polynomiale Interpolation mit Dreiecken aus Abschnitt 3.2 verwendet um die Integrationsaufgabe zu lösen. Wir verwenden somit ebenso

eine Triangulierung \mathcal{T}_h , um unser Integrationsgebiet Ω , welches ein offenes Polygon im \mathbb{R}^2 sein soll, stückweise zu betrachten. Desweiteren übernehmen wir auch alle anderen Notationen aus dem genannten Abschnitt. Um die Integrationsaufgabe in diesem Abschnitt exakt anzugeben dient die

Definition 4.2 (Integrationsaufgabe).

Das Integral soll nähungsweise durch die Summe von integrierten Interpolationspolynomen über Dreiecken mit einer zugrundeliegenden Triangulation approximiert werden.

Wir verwenden das in der Definition 3.8 angegebene Lagrangesche stückweise interpolierende Polynom und betrachten das zugehörige Integral. Der Übergang zum Lokalen lässt sich zusammen mit der Additivität des Integrals wie folgt herleiten

$$\begin{aligned} I_k^c f &:= \int_{\Omega} \Pi_h^k f(x, y) dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Pi_T^k f(x, y) dx dy =: \sum_{T \in \mathcal{T}_h} I_k^T f \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{j=0}^{d_k-1} f(\tilde{z}_j^T) \int_T l_j^T(x, y) dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{j=0}^{d_k-1} \alpha_j^T f(\tilde{z}_j^T). \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Die Punkte \tilde{z}_j^T entsprechen wie im Abschnitt 3.2 den lokalen Interpolationsknoten und die Koeffizienten $\alpha_j^T \in \mathbb{R}$ werden lokale Gewichte genannt.

Wenn wir nun die affin-lineare Transformation F_T^{-1} (siehe 3.2.8) verwenden, die ein Dreieck T auf das Dreieck \hat{T} mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ abbildet, können wir die lokalen Gewichte α_j^T wie folgt bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_j^T &= \int_T l_j^T(x, y) dx dy = \int_T \hat{l}_j \circ F_T^{-1}(x, y) dx dy \\ &= 2|T| \int_{\hat{T}} \hat{l}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Es soll $|T|$ und $|\hat{T}|$ für die Fläche des Dreiecks T bzw. \hat{T} stehen. Da die Transformation F_T^{-1} das Dreieck T auf das Dreieck \hat{T} abbildet und somit die Integrationsfläche $|T|$ zu $|\hat{T}| = \frac{1}{2}$ wird, muss das Integral beim Übergang zu $|\hat{T}|$ mit $2|T|$ multipliziert werden.

Gilt $k = 0$, so erhalten wir für $\alpha_0^T = |T|$. Dagegen erhalten wir für $k = 1$ die Gewichte $\alpha_j^T = |T|/3$ für $j = 0, 1, 2$. Wenn wir zum Beispiel die gleichen Punkte für die Dreiecke nehmen wie bei der Interpolation (Abschnitt 3.2), erhalten wir die

Zusammengesetzte Mittelpunktformel

$$I_0^c(f) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| f(a^T) \quad (4.2.3)$$

und die **Zusammengesetzte Trapezformel**

$$I_1^c(f) = \frac{1}{3} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \sum_{j=1}^3 f(a_j^T). \quad (4.2.4)$$

Es sei dabei a^T der Schwerpunkt von jedem Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ und die a_j^T seien für $j = 1, 2, 3$ die jeweiligen Eckpunkte. Diese Formeln sind vom Grad 1 bezüglich \mathcal{P}^c . Wenn bei der Formel (4.2.4) anstatt der Eckpunkte die Seitenmittelpunkte verwendet werden, bekommen wir einen Grad 2 bezüglich \mathcal{P}^c .

Es gibt noch weitere Methoden, um das Integral im Zweidimensionalen numerisch zu approximieren. Es können zum Beispiel Vierecke anstatt Dreiecke verwendet werden. Außerdem ist es möglich, wenn das Integrationsgebiet nur bezüglich einer Achse ein Normalgebiet ist, eine Reduktionsformel anzuwenden und stückweise das Integral zu berechnen. Des Weiteren gibt es einen stochastischen Ansatz, die sogenannte Monte-Carlo-Methode, die besonders für die Integration in höheren Dimensionen gut geeignet ist.

4.3 Stückweise Integration mittels Vierecken

In diesem Abschnitt verwenden wir die im Abschnitt 3.3 hergeleitete Polynominterpolation auf Parallelogrammen. Dieser Abschnitt ist das Analogon mit Vierecken zum vorherigen Abschnitt und daher werden wir die Herleitungen und Argumente abkürzen. Wir können unser Interpolationspolynom mit Vierecken wie folgt angeben

$$I_k^{c*} f = \sum_{V \in \mathcal{V}_h} \sum_{j=0}^{d_k-1} f(\tilde{z}_j^V) \int_V l_j^V(x, y) dx dy = \sum_{V \in \mathcal{V}_h} \sum_{j=0}^{d_k-1} \alpha_j^V f(\tilde{z}_j^V). \quad (4.3.1)$$

Dabei bezeichnen die Variablen, die mit einem V gekennzeichnet sind, jeweils die Einschränkung auf das Viereck V und d_k bezeichnet die Dimension des Polynoms. Die Punkte \tilde{z}_j^V entsprechen den lokalen Interpolationsknoten und die Koeffizienten α_j^V werden lokale Gewichte genannt. Weitere Notationen lassen sich aus dem vorherigen Abschnitt und aus dem Abschnitt 3.2 entnehmen.

Wir verwenden wieder die affin-lineare Transformation F_V^{-1} (siehe 3.2.8) für ein gegebenes Viereck V und berechnen die lokalen Gewichte wie folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_j^V &= \int_V l_j^V(x, y) dx dy = \int_V \hat{l}_j \circ F_V^{-1}(x, y) dx dy \\
&= |V| \int_{\hat{V}} \hat{l}_j(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}.
\end{aligned}
\tag{4.3.2}$$

Nun werden kurz drei Möglichkeiten für die Wahl der Interpolationsknoten auf dem Einheitsquadrat angegeben, da sich die Verallgemeinerung mit den zuvor hergeleiteten Methoden fast von selbst versteht. Die *Mittelpunktregel* verwendet als Interpolationsknoten nur den Mittelpunkt, also den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, und ist als Kubaturformel vom Grad 1 bezüglich \mathcal{Q} . Die *Rechteckregel* verwendet die vier Eckpunkte des Vierecks und ist vom Grad 1 bezüglich \mathcal{Q} . Eine bessere Wahl bieten die *Gauß-Punkte*. Dabei werden die Punkte $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}})$ und $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}})$ verwendet und diese Kubatur ist vom Grad 3 bezüglich \mathcal{Q} . Diese verschiedenen Möglichkeiten der Interpolationsknoten sind in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt.

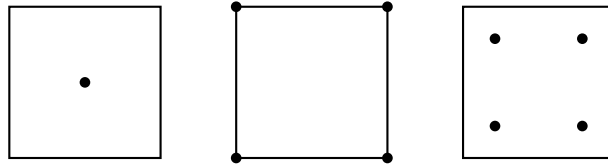


Abbildung 4.1: Darstellung der verwendeten Interpolationsknoten auf dem Einheitsquadrat für die Mittelpunktregel, Rechteckregel und die Gauß-Quadratur von links nach rechts.

4 Zweidimensionale numerische Integration

5 Fehlerdarstellung im Zweidimensionalen

In diesem Abschnitt wollen wir die allgemeine Fehlerdarstellung, die wir schon im Abschnitt 2.3 mit dem Satz 2.1 (*Satz von Peano*) hergeleitet haben, auf zwei Raumdimensionen erweitern. Dazu werden wir die *Sard-Kerne* betrachten, die im Wesentlichen eine Erweiterung der *Peano-Kerne* sind.

5.1 Sard-Kerne

Wie auch bei den Peano-Kernen, werden wir erst die Sard-Kerne definieren und anschließend den *Satz von Sard* angeben. Jedoch wäre der Beweis des Satzes zu umfangreich für diese Arbeit und deswegen wird er nur grob skizziert und auf die Erläuterung von *Engels* [4] verwiesen. Wir gehen nun auch wieder von einem gegebenen Fehlerfunktional \mathcal{R} aus, wobei diesmal aber das Fehlerfunktional Funktionen mit zwei Raumdimensionen als Argumente hat. Wir wollen uns hier nur mit dem Fehler von zweidimensionaler Integration beschäftigen, der nun als

$$\mathcal{R}f = If - Qf \quad (5.1.1)$$

definiert ist, wobei If für den exakten Wert des Integrals steht und Qf den Wert der Kubaturformel entspricht. Jedoch kann der *Satz von Sard* mit kleinen Umstellungen auch für andere Problemstellungen verwendet werden.

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein hinreichend glatt berandetes beschränktes Gebiet mit $(0, 0) \in \bar{\Omega}$ und wir nehmen zur Vereinfachung an, dass für alle Punkte $(x, y) \in \bar{\Omega}$ $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt. Für den Satz benötigen wir die

Definition 5.1 (Sard-Kerne).

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ gegeben, dann werden

$$\begin{aligned} K_1^\mu(u) &:= \mathcal{R}^{x,y}[y^\mu(x-u)_+^{k-\mu}], \\ K_2^\mu(v) &:= \mathcal{R}^{x,y}[x^\mu(y-v)_+^{k-\mu}], \\ K_{\nu,\nu}(u,v) &:= \mathcal{R}^{x,y}[(x-u)_+^\nu(y-v)_+^\nu], & k = 2\nu + 1 \\ K_{\nu,\nu-1}(u,v) &:= \mathcal{R}^{x,y}[(x-u)_+^\nu(y-v)_+^{\nu-1}], & k = 2\nu \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

für $\mu = 0, 1, \dots, \nu$ und $(x, y) \in \bar{\Omega}$ als *Sard-Kerne* bezeichnet, wobei $\mathcal{R}^{x,y}$, wie bei den

5 Fehlerdarstellung im Zweidimensionalen

Peano-Kernen, die Anwendung des Fehlerfunktionals bezüglich der Variablen x und y bedeutet.

Desweiteren benötigen wir zwei Funktionen τ und σ , die im Folgenden definiert werden.

Definition 5.2.

Für einen gegebenen Punkt $(x, y) \in \overline{\Omega}$ seien $\tau(y) > 0$ und $\sigma(x) > 0$ zwei Zahlen, für die

$$\begin{aligned}\tau(y) &\geq x, \\ (\tau(y), y) &\in \partial\Omega, \\ \sigma(x) &\geq y \quad \text{und} \\ (x, \sigma(x)) &\in \partial\Omega\end{aligned}\tag{5.1.3}$$

gilt. D.h. wir bekommen die maximale Fortsetzung von dem Punkt (x, y) jeweils nur in der x - oder in der y -Richtung, so dass der Punkt die y - bzw. x -Koordinate behält, aber im Rand von Ω liegt.

Außerdem benötigen wir noch die Definition von \sum^* .

Definition 5.3.

Wir definieren

$$\sum^* := \sum, \quad \text{für } k = 2\nu + 1\tag{5.1.4}$$

und

$$\sum^* := \sum', \quad \text{für } k = 2\nu\tag{5.1.5}$$

mit

$$\sum_{i=0}^{\nu} 'a_i := a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu-1} + \frac{1}{2}a_{\nu}.\tag{5.1.6}$$

Satz 5.1 (Satz von Sard).

Seien Ω , wie zu Beginn dieses Abschnittes, und ein $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega})$ gegeben. Des Weiteren seien σ und τ , wie in Definition 5.2, und Q , eine Kubaturformel vom Grad $k > 0$, gegeben. Dann kann das Fehlerfunktional $\mathcal{R}f = If - Qf$ dargestellt werden als

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_n f &= \frac{1}{k!} \sum_{\mu=0}^{\nu} * \binom{k}{\mu} \left[\int_0^{\tau} K_1^{\mu}(u) f_{k+1-\mu, \mu}(u, 0) du + \int_0^{\sigma} K_2^{\mu}(v) f_{\mu, k+1-\mu}(0, v) dv \right] \\
&+ \begin{cases} \frac{1}{\nu! \nu!} \iint_{\Omega} K_{\nu, \nu}(u, v) f_{\nu+1, \nu+1}(u, v) du dv, & k = 2\nu + 1 \\ \frac{1}{2(\nu-1)! \nu!} \left\{ \iint_{\Omega} K_{\nu, \nu-1}(u, v) f_{\nu+1, \nu}(u, v) du dv \right. \\ \quad \left. + \iint_{\Omega} K_{\nu-1, \nu}(u, v) f_{\nu, \nu+1}(u, v) du dv \right\}, & k = 2\nu. \end{cases} \quad (5.1.7)
\end{aligned}$$

Der Beweis dieses Satzes lässt sich in dem Buch von *Engels* [4, S. 100 ff] in Abschnitt 3.2 finden. Dabei wird der *Satz von Taylor* in Integralschreibweise verwendet und des Weiteren wird eine Induktion über k angewendet.

5 Fehlerdarstellung im Zweidimensionalen

Literaturverzeichnis

- [1] BUSING, HENRIK: *Multivariate numerische Integration und Anwendungen in der Peridynamik*. Berlin, 2008.
- [2] CIARLET, P.G. und J.L. LIONS: *Finite Element Methods (Part 1)*, Band 2 der Reihe *Handbook of Numerical Analysis*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [3] DAVIS, PHILIP J. und PHILIP RABINOWITZ: *Methods of numerical integration*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers] New York-London, 1975. Computer Science and Applied Mathematics.
- [4] ENGELS, H.: *Numerical quadrature and cubature*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1980. Computational Mathematics and Applications.
- [5] GOERING, HERBERT, HANS-GÖRG ROOS und LUTZ TOBISKA: *Finite-Element-Methode*, Band 285 der Reihe *Wissenschaftliche Taschenbücher, Reihe Mathematik/Physik [Scientific Paperbacks, Mathematics/Physics Series]*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1988. Eine Einführung. [An introduction].
- [6] HÄMMERLIN, GÜNTHER und KARL-HEINZ HOFFMANN: *Numerische Mathematik*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1994. Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics].
- [7] ISAACSON, EUGENE und HERBERT BISHOP KELLER: *Analysis of numerical methods*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.
- [8] PLATO, ROBERT: *Numerische Mathematik kompakt*. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2. Auflage, 2004. Grundlagenwissen für Studium und Praxis. [Foundations for study and practice].
- [9] QUARTERONI, ALFIO, RICCARDO SACCO und FAUSTO SALERI: *Numerical mathematics*, Band 37 der Reihe *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [10] QUARTERONI, ALFIO, RICCARDO SACCO, FAUSTO SALERI und LUTZ TOBISKA: *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Literaturverzeichnis

- [11] QUARTERONI, ALFIO und ALBERTO VALLI: *Numerical approximation of partial differential equations*, Band 23 der Reihe *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Hiermit versichere ich, Robin Flohr, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle zitierten oder sinn- gemäß übernommenen Textstellen sind als solche gekennzeichnet und die Zitierquellen vollständig angegeben.
