Approximation nichtlinearer Evolutionsgleichungen erster Ordnung

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Dipl.-Math.

an der

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT BIELEFELD

vorgelegt von: Gero Schnücke
Matrikelnummer: 1834580

betreut von: Prof. Dr. Etienne Emmrich

Bielefeld, 17.Juli 2012

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Bielefeld, 17.Juli 2012

Gero Schnücke

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Etienne Emmrich bedanken. Seine Zeit an der Universität Bielefeld hat meinen mathematischen Werdegang entscheidend geprägt. Durch ihn habe ich zur nichtlinearen Funktionalanalysis gefunden und die Bedeutung der numerischen Mathematik in der Theorie partieller Differentialgleichungen kennen gelernt. Seine Ratschläge und sein Fachwissen haben mir bei vielen Problemen, mathematischer sowie menschlicher Natur, weitergeholfen. Insbesondere möchte ich ihn für sein Vertrauen und seine Geduld danken.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Approximierbarkeit von nichtlinearen Evolutionsgleichungen erster Ordnung diskutiert. Der prägende Operator der zugrunde liegenden Evolutionsgleichungsprobleme ist monoton, hemistetig und genügt einer $(p-1)$- Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung. Der Parameter p ergibt sich im Allgemeinen aus einem Ausgangsproblem, das in eine Evolutionsgleichung erster Ordnung überführt werden kann.

Zunächst wird wie in einer Arbeit von Emmrich und Šiška [15] eine volle Diskretisierung des zugrunde liegenden Evolutionsgleichungsproblems mit dem impliziten Euler-Verfahren und einem Galerkin-Schema angegeben. Mittels eines diskreten Ersatzproblems werden Näherungswerte an die Lösung des Evolutionsgleichungsproblems bestimmt. Aus diesen Näherungswerten werden Folgen stückweise konstanter und stückweise affine linearer abstrakter Funktionen konstruiert. Anschließend wird mit A-priori-Abschätzungen und dem Monotonie-Trick von Minty die schwache Konvergenz der konstruierten Folgen gegen eine Lösung des Evolutionsgleichungsproblems nachgewiesen. Unter geeigneten Bedingungen an den zugrunde liegenden Banach-Raum V kann mit dem Satz von Lions-Aubin die starke Konvergenz der konstruierten Folgen gegen eine Lösung des Evolutionsgleichungsproblems nachgewiesen werden, sofern eine stabile H-Orthogonalprojektion existiert. Dabei bezeichnet H einen stetigen und dicht in V eingebetteten Hilbert-Raum. Ebenso ergibt sich die starke Konvergenz der konstruierten Folgen gegen eine Lösung des Evolutionsgleichungsproblems, wenn die Voraussetzungen an den zugrunde liegenden Operator verschärft werden.

Danach wird eine volle Diskretisierung des zugrunde liegenden Evolutionsgleichungsproblems mit dem impliziten Euler-Verfahren und einem äußeren Approximationsschema angegeben. Dieser Ansatz wurde bislang nur zur Approximation stationärer Operatorgleichungen oder linearer Evolutionsgleichungen verwendet. Erneut werden mit einem diskreten Ersatzproblem Näherungswerte an eine Lösung des Evolutionsgleichungsproblems bestimmt und Folgen stückweise konstanter sowie stückweise affine linearer abstrakter Funktionen konstruiert. Wie für das zuvor beschriebene Näherungsverfahren wird die schwache Konvergenz der so konstruierten Folgen gegen eine Lösung des Evolutionsgleichungsproblems nachgewiesen. Um dieses Konvergenzresultat zu erzielen, ist es erforderlich eine instationäre Kompatibilitäts- und Synchronisationsbedingung für das verwendete äußere Approximationsschema nachzuweisen. Ferner werden Konsistenzbedingungen für die Approximation an den Operator benötigt. Schließlich kann mit A-priori-Abschätzungen und dem Monotonie-Trick von Minty die schwache Konvergenz der konstruierten Folgen gegen eine Lösung des Evolutionsgleichungsproblems gezeigt werden.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Theorie der Evolutionsgleichungen ermöglicht einen abstrakten Zugang zu Rand- und Anfangswertprobleme für partielle Differentialgleichungen. Unter anderem lassen sich die Poröse-Medien-Gleichung, die bei der Beschreibung des Flusses eines idealen Gases in einem homogenen porösen Medium verwendet wird, oder instationäre p-Laplace Gleichungssysteme, die in der Modellierung elektrorheologischer Flüssigkeiten eine Anwendung finden, in Evolutionsgleichungsprobleme übertragen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Approximierbarkeit von nichtlinearen Evolutionsgleichungen erster Ordnung diskutiert. Der prägende Operator dieser Evolutionsgleichungsprobleme ist monoton, hemistetig und genügt einer $(p-1)$- Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung. Der Parameter p ergibt sich im Allgemeinen aus einem Ausgangsproblem, das in eine Evolutionsgleichung erster Ordnung überführt werden kann. In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass $p \geq 2$ ist.

Im Folgenden wird die verwendete Notation festgelegt. Des Weiteren werden die Evolutionsgleichungsprobleme, die in dieser Arbeit betrachtet werden, vorgestellt. Es wird sichergestellt, dass diese Probleme mindestens eine Lösung besitzen. Anschließend wird die Problemstellung und Zielsetzung dieser Arbeit dargelegt. Zum Abschluss dieses Kapitels wird ein Überblick über den Aufbau der vorliegenden Arbeit verschafft.

1.1. Notation

Die Schreibweise (V, H, V^*) gibt an, dass der reelle, reflexive, separable Banach-Raum V, der reelle, separable Hilbert-Raum H und der topologische Dualraum V^* von V einen Gelfand-Dreier bilden. In diesem Fall bezeichnet $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt im Hilbert-Raum H. Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm wird mit $|\cdot|$ angegeben. Die Norm des Banach-Raums V und die duale Paarung von V und den zugehörigen Dualraum V^* werden mit $\|\cdot\|$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gekennzeichnet. Wie üblich ist der Dualraum V^* von V mit der Norm

$$\|f\|_* = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, v \rangle|_{\mathbb{R}}}{\|v\|}$$

versehen, wobei $f \in V^*$ ein beliebiges Funktional ist.

Bemerkung 1.1.1. Ist (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier, folgt

$$H \cong H^* \overset{d}{\hookrightarrow} V^*.$$

Diese Beobachtung ergibt sich aus dem Darstellungssatz von Riesz (vergleiche Brézis [10, Kapitel V, Theorem V.5] oder Werner [38, Kapitel V, Theorem V.3.6]) sowie dem Satz von Hahn-Banach (vergleiche Brézis [10, Kapitel I, Korollar I.8] oder Werner [38, Kapitel III, Korollar III.1.8 und Korollar III.1.9]), der Reflexivität von V sowie der stetigen und dichten Einbettung $V \overset{d}{\hookrightarrow} H$. Eine detailliertere Darstellung dieser Beobachtung ist in Emmrich [16, Kapitel 8], Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel I] oder Zeidler [41, Kapitel 23, Vereinbarung 23.14] zu finden.

Es sei T eine beliebige, fest gewählte positive reelle Zahl, so dass das Zeitintervall $[0, T]$ eine kompakte Teilmenge der reellen Zahlen ist. Mit p wird ein reeller Parameter aus dem Intervall $[2, \infty[$ bezeichnet. Dieser Parameter ergibt sich aus einem Ausgangsproblem, dass in eine Evolutionsgleichung erster Ordnung überführt werden kann. Ferner sei $q = \frac{p}{p-1}$. Aufgrund der Konjugation zu p ist $q \in [1, 2]$.

Für Lebesgue-, Sobolev-, Bochner-Lebesgue-Räume und Räume stetig differenzierbarer Funktionen wird die übliche Notation verwendet. Der Raum aller reellwertigen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompakten Träger in einer Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ wird mit $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ bezeichnet. Mit $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(0, T; V)$ wird der Raum von Äquivalenzklassen fast überall gleicher, lokal Bochner-integrierbarer Funktionen mit Werten in einen reellen Banach-Raum V bezeichnet. Die Funktionenräume sind mit den üblichen Normen versehen.

Da $p \in [2, \infty[$ ist, kann der Dualraum von $\mathrm{L}^p(0, T; V)$ mit dem Raum $\mathrm{L}^q(0, T; V^*)$ identifiziert werden, sofern $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller, reflexiver, separabler Banach-Raum ist (vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.14] oder Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.6]). Die duale Paarung von $\mathrm{L}^p(0, T; V)$ und $\mathrm{L}^q(0, T; V^*)$ ist für alle $v \in \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$ und $w \in \mathrm{L}^p(0, T; V)$ durch

$$\langle v, w \rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*) \times \mathrm{L}^p(0,T;V)} = \int_0^T \langle v(t), w(t) \rangle \, dt$$

gegeben. Ebenso kann gemäß Edwards [13, Kapitel 8, 8.18.3 Theorem]) der Dualraum von $\mathrm{L}^1(0, T; V)$ mit dem Raum $\mathrm{L}^\infty(0, T; V^*)$ identifiziert werden, sofern der reelle Banach-Raum $(V, \|\cdot\|)$ reflexiv und separabel ist. Die duale Paarung von $\mathrm{L}^1(0, T; V)$ und $\mathrm{L}^\infty(0, T; V^*)$ ist für alle $v \in \mathrm{L}^1(0, T; V)$ und $w \in \mathrm{L}^\infty(0, T; V^*)$ durch

$$\langle v, w \rangle_{\mathrm{L}^\infty(0,T;V^*) \times \mathrm{L}^1(0,T;V)} = \int_0^T \langle v(t), w(t) \rangle \, dt$$

gegeben. Ist $(H, |\cdot|, (\cdot, \cdot))$ ein reeller Hilbert-Raum, so ist $\mathrm{L}^2(0, T; H)$ auch ein Hilbert-Raum (vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.13] oder

Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (e)]). Das $\mathrm{L}^2(0,T;H)$-Skalarprodukt ist für alle $v, w \in \mathrm{L}^2(0,T;H)$ durch

$$(v,w)_{\mathrm{L}^2(0,T;H)} = \int_0^T (v(t), w(t))\, dt$$

gegeben.

Wie für reellwertige Funktionen lässt sich der Ableitungsbegriff für abstrakte Funktionen verallgemeinern.

Definition 1.1.1. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum und u sowie v seien aus $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(0,T;V)$. Dann heißt v verallgemeinerte Ableitung von u, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$

$$\int_0^T u(t)\,\varphi'(t)\, dt = -\int_0^T v(t)\,\varphi(t)\, dt$$

gilt. In diesem Fall wird v mit u' bezeichnet.

Bemerkung 1.1.2. Die Aussage des Fundamentallemmas der Variationsrechnung (vergleiche Emmrich [16, Kapitel 3, Lemma 3.1.5]) kann für abstrakte Funktionen verallgemeinert werden (vergleiche Emmrich [16, Kapitel 8, Satz 8.1.3]) oder Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.10]). Demgemäß ist die verallgemeinerte Ableitung einer abstrakten Funktion bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt. Ist eine abstrakte Funktion klassisch differenzierbar, stimmen klassische und verallgemeinerte Ableitung der Funktion überein.

Wie für reellwertige Funktionen besteht ein Zusammenhang zwischen absolut stetigen Funktionen und der verallgemeinerten Ableitung. Ein Beweis für die folgende Äquivalenzaussage ist in Emmrich [16, Kapitel 8, Satz 8.1.5] zu finden.

Theorem 1.1.1. *(Charakterisierung der verallgemeinerten Ableitung): Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum und $u, v \in \mathrm{L}^1(0,T;V)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die verallgemeinerte Ableitung von u ist v. Also $u' = v$.*

(ii) *Es existiert ein $u_0 \in V$, so dass für fast alle $t \in]0,T[$ gilt*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\, ds.$$

(iii) *Die reellwertige Funktion $t \mapsto \langle f, v(t)\rangle_{V^* \times V}$ ist für jedes Funktional $f \in V^*$ die verallgemeinerte Ableitung der Funktion $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle_{V^* \times V}$. Also gilt für alle $f \in V^*$*

$$\frac{d}{dt}\langle f, u(t)\rangle_{V^* \times V} = \langle f, v(t)\rangle_{V^* \times V}.$$

Ist (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier, bezeichnet der Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ die Menge von Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen aus $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ mit verallgemeinerter Ableitung in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$. Versehen mit der Norm $\|v\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} + \|v'\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}$, für alle $v \in \mathcal{W}^p(0,T)$, ist $\mathcal{W}^p(0,T)$ ein reeller Banach-Raum (vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.16]).

1.2. Das kontinuierliche Problem

Im Folgenden sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier, $\mathrm{A} : V \to V^*$ ein hemistetiger, monotoner Operator und $\mathrm{B} : V \to V^*$ ein Operator. Des Weiteren seien die Konstanten $c_\mathrm{A}, c_\mathrm{B}, c_\mathcal{H}, \mu \in \,]0,\infty[$ sowie $\lambda_\mathrm{A}, \lambda_\mathrm{B} \in [0,\infty[$ und ein Parameter $\delta \in \,]0,1]$ gegeben, so dass der Operator A für alle $v \in V$ der folgenden $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \|\mathrm{A}v\|_* & \leq c_\mathrm{A}\left(\|v\|^{p-1} + 1\right), \\ \langle \mathrm{A}v, v\rangle & \geq \mu \|v\|^p - \lambda_\mathrm{A} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

genügt und der Operator B für alle $v \in V$ die Eigenschaften

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \|\mathrm{B}v\|_* & \leq c_\mathrm{B}\left(\|v\|^{p-1} + 1\right), \\ \langle \mathrm{B}v, v\rangle & \geq -\frac{\mu}{2}\|v\|^p - \lambda_\mathrm{B}, \\ \|\mathrm{B}v - \mathrm{B}w\|_* & \leq c_\mathcal{H} \max\left(\|v\|, \|w\|\right)^{p-1-\delta} |v-w|^{\frac{\delta}{p}} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

besitzt.

Der Kern dieser Arbeit ist die volle Diskretisierung des nachfolgenden variationellen Problems mit unterschiedlichen Approximationsschemata.

Problem 1.2.1. Zu einem gegebenen $u_0 \in H$ und $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ wird ein $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ mit $u(0) = u_0$ gesucht, so dass für alle $v \in V$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(u(t), v\right) + \langle \mathrm{A}u(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle$$

im verallgemeinerten Sinne auf $]0,T[$ gilt.

Bevor mit dem Studium von Problem 1.2.1 begonnen werden kann, sollte die Lösbarkeit des Problems gesichert sein.

Theorem 1.2.1. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier, $u_0 \in H$ und $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$. Es sei $\mathrm{A} : V \to V^*$ ein hemistetiger, monotoner Operator, welcher der $(p-1)$-Wachstums- und p-Koerzitivitätsbedingung* (1.2.1) *genügt. Dann existiert genau eine Lösung für das Problem 1.2.1.*

Die Aussage von Theorem 1.2.1 wird in Barbu [6, Kapitel III, Theorem 2.6] mit Methoden aus der Halbgruppentheorie und in Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel VI, Satz 1.1] mit einem Galerkin-Schema nachgewiesen. Für eine Familie zeitabhängiger Operatoren $\mathrm{A}(t)$ bleibt die Existenz- und Einzigkeitsaussage erhalten (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 30, Theorem 30.A]).

Ist $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ eine Lösung für das Problem (1.2.1), ergibt sich für alle $v \in V$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ die Gleichung

$$\int_0^T \langle u(t), v\rangle \varphi'(t)\, dt = -\int_0^T \langle f(t) - \mathrm{A}u(t), v\rangle \varphi(t)\, dt.$$

Ferner kann gemäß Theorem A.2.2 durch $(\mathcal{A}v)(t) = \mathrm{A}(v(t))$, für alle $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ und $t \in]0,T[$, ein beschränkter, monotoner, hemistetiger, koerzitiver Operator

$$\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;V) \to \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$$

konstruiert werden. Infolgedessen gilt gemäß Theorem 1.1.1 die Identität $u' = f - \mathcal{A}u$. Demnach ist Problem (1.2.1) zu dem folgenden Evolutionsgleichungsproblem äquivalent.

Problem 1.2.2. Zu einem gegebenen $u_0 \in H$ und $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ wird ein $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ gesucht, so dass das abstrakte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' + \mathcal{A}u &= f, \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Da der Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ stetig in den Raum $\mathcal{C}([0,T];H)$ eingebettet ist (vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.17]), kann zu jeder Lösung von Problem 1.2.1, aufgrund der Anfangsbedingung $u(0) = u_0$, genau ein stetiger Repräsentant aus $\mathcal{C}([0,T];H)$ bestimmt werden. Insofern ist es sinnvoll den Anfangswert u_0 aus den reellen Hilbert-Raum H zu wählen und nicht aus den reellen Banach-Raum V.

Das Problem 1.2.1 kann auch mit einer Störung durch den Operator B betrachtet werden.

Problem 1.2.3. Zu einem gegebenen $u_0 \in H$ und $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ wird ein $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ mit $u(0) = u_0$ gesucht, so dass für alle $v \in V$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \langle \mathrm{A}u(t) + \mathrm{B}u(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle$$

im verallgemeinerten Sinne auf $]0,T[$ gilt.

Ist der reelle Banach-Raum V kompakt in den reellen Hilbert-Raum H eingebettet, kann eine Existenzaussage für das Problem 1.2.3 formuliert werden. Diese Existenzaussage wird im folgenden Theorem angegeben. In Emmrich [16, Kapitel 8, Satz 8.4.2] ist ein Beweis mit einem Galerkin-Schema für eine Familie zeitabhängiger Operatoren $\mathrm{A}(t)$ und $\mathrm{B}(t)$ zu finden. Ein Beweis für einen pseudomonotonen Operator durch eine Semidiskretisierung in der Zeit, ist in Roubíček [32, Kapitel 8, Theorem 8.9] aufgezeigt.

Theorem 1.2.2. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier, $u_0 \in H$ und $f \in \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$. Der reelle, separable, reflexive Banach-Raum V sei kompakt in den reellen, separablen Hilbert-Raum H eingebettet, $\mathrm{A} : V \to V^*$ sei ein hemistetiger, monotoner Operator, welcher der $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung* (1.2.1) *genügt und $\mathrm{B} : V \to V^*$ ein Operator, welcher den Bedingungen* (1.2.2) *genügt. Dann besitzt das Problem 1.2.2 mindestens eine Lösung.*

Gemäß Theorem A.2.3 kann durch $(\mathcal{B}v)(t) = \mathrm{B}(v(t))$, für alle $v \in \mathrm{L}^p(0, T; V)$ und $t \in]0, T[$, ein beschränkter Operator

$$\mathcal{B} : \mathrm{L}^p(0, T; V) \to \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$$

konstruiert werden. Ist der reelle Banach-Raum V kompakt in den reellen Hilbert-Raum H eingebettet, ist der Operator $\mathcal{B}$, eingeschränkt auf $\mathcal{W}^p(0, T)$, verstärkt stetig. Folglich kann das Evolutionsgleichungsproblem (1.2.2) mit einer verstärkt stetigen Störung durch den Operator $\mathcal{B}$ betrachtet werden.

Problem 1.2.4. Zu einem gegebenen $u_0 \in H$ und $f \in \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$ wird ein $u \in \mathcal{W}^p(0, T)$ gesucht, so dass das abstrakte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' + \mathcal{A}u + \mathcal{B}u &= f, \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Dieses Evolutionsgleichungsproblem ist zu dem Problem 1.2.3 äquivalent.

1.3. Problemstellung und Zielsetzung

In der vorliegenden Arbeit werden die Probleme 1.2.1 und 1.2.3 betrachtet. Gemäß der Theoreme 1.2.1 und 1.2.2 besitzt das Problem 1.2.1 genau eine Lösung und das Problem 1.2.3 mindestens eine Lösung, wenn der reelle Banach-Raum V kompakt in den reellen Hilbert-Raum H eingebettet ist. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht möglich eine Lösung für diese Probleme explizit anzugeben. Diese Beobachtung wirft die Frage auf, ob Näherungslösungen konstruiert werden können, die eine Lösung von Problem 1.2.1 oder 1.2.3 charakterisieren.

Um ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen zu konstruieren, ist es erforderlich das zugrunde liegende Problem mittels diskreter Ersatzprobleme zu approximieren. Die diskreten Ersatzprobleme sollten so konzipiert sein, dass Näherungswerte an eine Lösung des zugrunde liegenden Problems bestimmt werden können. Anschließend wird nachgewiesen, dass eine Teilfolge aus Näherungswerten schwach*, schwach oder stark gegen eine Lösung des zugrunde liegenden Problems konvergiert.

Es besteht die Absicht, die Probleme 1.2.1 und 1.2.3 mit verschiedenen Techniken zu approximieren. Anschließend soll die schwach*, schwache oder starke Konvergenz gegen eine Lösung des Problems 1.2.1, bzw. 1.2.3, nachgewiesen werden.

Zunächst werden die Probleme 1.2.1 und 1.2.3 mit dem impliziten Euler-Verfahren und einem Galerkin-Schema approximiert. Es wird sich zeigen, dass die konstruierten Folgen in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach, in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* und unter zusätzlichen Vorraussetzungen in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$, für jedes $r \in [1,\infty[$, stark gegen eine Lösung des Problems 1.2.1, bzw. 1.2.3, konvergieren. Das so konstruierte Näherungsverfahren für die Probleme 1.2.1 sowie 1.2.3 und die aufgeführten Konvergenzresultate sind nicht neu. Unter anderem sind diese Resultate in einer Arbeit von Emmrich und Šiška [15] über die volle Diskretisierung der Poröse-Medien-Gleichung zu finden.

Eine Alternative zu diesem Ansatz ist eine Semidikretisierung in der Zeit oder eine Zerlegung des Banach-Raums mit einem geeigneten Approximationsverfahren. Eine Semidikretisierung in der Zeit wird auch als Rothe-Methode bezeichnet (vergleiche Roubíček [32, Kapitel 8]). Diese Methode wird in Emmrich und Thalhammer [17] oder Emmrich [18] und [19] zur Approximation nichtlinearer Evolutionsgleichungen verwendet. Die Zerlegung des Banach-Raums erfolgt häufig mit einem Galerkin-Schema. Eine Approximation nichtlinearer Evolutionsgleichungen erster Ordnung unter Verwendung eines Galerkin-Schemas kann unter anderem in Emmrich [16, Kapitel 8, Satz 8.4.2], Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.17], Shioji [35] oder Zeidler [42, Kapitel 30, Theorem 30.A] gefunden werden.

Anschließend wird das Problem 1.2.1 mit dem impliziten Euler-Verfahren und einem äußeren Approximationsschema für den reellen Banach-Raum V approximiert. Unter der Voraussetzung, dass die rechte Seite, aus Problem 1.2.1, in $\mathrm{L}^q(0,T;H)$ enthalten ist, ergibt sich, dass die konstruierten Folgen in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ schwach und in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen die Lösung des Problems 1.2.1 konvergieren. Dabei ist F ein reeller Banach-Raum, der aus dem äußeren Approximationsschema für V hervorgeht. Zum Nachweis der aufgeführten Konvergenzresultate sind eine instationäre Kompatibilitäts- sowie Synchronisationsbedingung für das verwendete äußere Approximationsschema und Konsistenzbedingungen für die Approximation an den Operator erforderlich.

Die Approximation nichtlinearer Evolutionsgleichungen erster Ordnung mittels äußerer Approximation und die aufgeführten Konvergenzresultate sind neu. Allerdings können in der Literatur Konstruktionen ähnlicher Näherungsverfahren für andere Operatorgleichungen gefunden werden. Unter anderem wird in Emmrich [14] und in Zeidler [42, Kapitel 35] die Diskretisierung stationärer, nichtlineare Operatorgleichungen mittels äußerer Approximation und Anwendungen auf quasilinearer, elliptischer Differentialgleichungen diskutiert. Temam betrachtet in [36] oder [37] lineare Operatorgleichungen mittels äußerer Approximation. Insbesondere gibt Temam in [36, Kapitel 3, Abschnitt 5] eine volle Diskretisierung für die Navier-Stokes Gleichungen an. Dabei erfolgt die Diskretisierung in der Zeit mit verschiedenen Einschrittverfahren. Die Diskretisierung des zugrunde liegenden Banach-Raums erfolgt mittels äußerer Approximation.

1.4. Aufbau der Arbeit

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über den Aufbau der vorliegenden Arbeit gegeben.

In Kapitel 2 werden mit dem impliziten Euler-Verfahren und einem Galerkin-Schema diskrete Ersatzprobleme für die Probleme 1.2.1 und 1.2.3 formuliert. Es wird die Lösbarkeit der diskreten Ersatzprobleme gezeigt und es werden A-priori-Abschätzungen für die mit den diskreten Ersatzproblemen bestimmten Näherungswerte angegeben. Anschließend werden aus den Näherungswerten Folgen stückweise konstanter und stückweise affine linearer abstrakter Funktionen konstruiert. Dann wird mit den A-priori-Abschätzungen, funktionalanalytischer Kompaktheitsargumenten und dem Monotonie-Trick von Minty die schwache Konvergenz in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ und die schwach*-Konvergenz in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ der konstruierten Folgen gegen die Lösung von Problem 1.2.1 nachgewiesen. Danach wird gezeigt, dass die konstruierten Folgen für jedes $r \in [1,\infty[$ in $\mathrm{L}^\mathrm{r}(0,\mathrm{T};\mathrm{H})$ stark gegen die Lösung von Problem 1.2.1 konvergieren, sofern $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ ist oder der Operator $\mathrm{A}: V \to V$ stärkere Monotonieeigenschaften aufweist. Schließlich wird gezeigt, dass Teilfolgen der konstruierten Folgen in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach, in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* und für jedes $r \in [1,\infty[$ in $\mathrm{L}^\mathrm{r}(0,\mathrm{T};\mathrm{H})$ stark gegen eine Lösung des Problems 1.2.3 konvergieren, sofern $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ ist. Die in Kapitel 2 vorgestellten Resultate orientieren sich an einer Arbeit von Emmrich und Šiška [15] über die volle Diskretisierung der Poröse-Medien-Gleichung und an einer Arbeit von Emmrich [19] zum ϑ-Verfahren.

In Kapitel 3 wird erklärt, was unter einem äußeren Approximationsschema für einen normierten Raum zu verstehen ist. Anschließend wird mit dem impliziten Euler-Verfahren und einem äußeren Approximationsschema ein diskretes Ersatzproblem für das Problem 1.2.1 formuliert. Im Unterschied zu Kapitel 2, ist es bei diesem Ansatz erforderlich, dass die rechte Seite, aus Problem 1.2.1, in $\mathrm{L}^q(0,T;H)$

enthalten ist. In Anschnitt 3.2 wird auf diese Problematik genauer eingegangen. Wie in Kapitel 2 wird die Lösbarkeit des Ersatzproblems nachgewiesen. Es werden A-priori-Abschätzungen angegeben und Folgen stückweise konstanter und stückweise affine linearer abstrakter Funktionen bestimmt. Des Weiteren wird eine Konsistenzbedingung für eine Approximation an den Operator A angegeben und es werden eine instationäre Kompatibilitäts- sowie Synchronisationsbedingung für das verwendete äußere Approximationsschema nachgewiesen. Schließlich wird mit den A-priori-Abschätzungen, funktionalanalytischer Kompaktheitsargumenten und dem Monotonie-Trick von Minty die schwache Konvergenz in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ und schwach*-Konvergenz in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ der konstruierten Folgen gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1 nachgewiesen. Dabei ist F ein reeller Banach-Raum, der aus dem äußeren Approximationsschema für V hervorgeht. Anschließend wird das konstruierte Verfahren an einem eindimensionalen, instationären p-Laplace-Gleichungsproblem mit Dirichlet-Randdaten getestet.

Im Anhang finden sich funktionalanalytische Hilfsresultate. Des Weiteren wird erklärt wie ein demistetiger Operator, der einer Wachstumsbedingung genügt und einen reellen, separablen, reflexiven Banach-Raum auf den zugehörigen topologischen Dualraum abbildet, auf geeignete Bochner-Lebesgue-Räumen fortgesetzt werden kann.

2. Diskretisierung mit dem impliziten Euler-Verfahren und einem Galerkin-Schema

In diesem Kapitel sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier, $p \in [2, \infty[$ ein Parameter mit Konjugierten $q = \frac{p}{p-1}$ und $T \in]0, \infty[$ ein beliebiger Wert. Mit $\mathrm{A} : V \to V^*$ wird ein hemistetiger, monotoner Operator und mit $\mathrm{B} : V \to V^*$ ein Operator bezeichnet. Der Oprator A erfülle die $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1) und der Operator B genüge den Bedingungen (1.2.2).

Im Folgenden wird ein Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung von Problem 1.2.1 beschrieben. Dabei werden zunächst das implizite Euler-Verfahren und ein Galerkin-Schema verwendet, um für Problem 1.2.1 ein diskretes Ersatzproblem zu formulieren. Anschließend soll die Lösbarkeit für das diskrete Ersatzproblem nachgewiesen werden und es werden A-priori-Abschätzungen formuliert. Darauf aufbauend werden aus den Lösungen des Ersatzproblems Folgen konstruiert. Schließlich wird unter Zuhilfenahme der A-priori-Abschätzungen und funktionalanalytischer Kompaktheitsargumenten die schwache und, unter zusätzlichen Vorraussetzungen, starke Konvergenz der konstruierten Folgen gegen die Lösung von Problem 1.2.1 nachgewiesen. Zum Abschluss dieses Kapitels wird der Nutzen des angegebenen Näherungsverfahrens für das modifizierte Problem 1.2.3 studiert. Die Konstruktion des Näherungsverfahrens und der Beweis der schwachen sowie starken Konvergenz der konstruierten Folgen gegen die Lösung von Problem 1.2.1 orientieren sich an einer Arbeit von Emmrich und Šiška [15] zur vollen Diskretisierung der Poröse-Medien-Gleichung. Die Resultate des Näherungsverfahrens für Problem 1.2.3 orientieren sich an einer Arbeit von Emmrich [19] zum ϑ-Verfahren für nichtlineare Evolutionsgleichungen.

2.1. Das diskrete Ersatzproblem

Vorweg wird eine Diskretisierung für das Zeitintervall $[0, T]$ und den Banach-Raum V gegeben.

Für das Zeitintervall $[0, T]$ kann zu jeder natürliche Zahl $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine äquidistante Zerlegung mit $\tau_N = \frac{T}{N}$ als Schrittweite und $t_n = n\tau_N$ für jedes $n = 0, ..., N$

als Knoten bestimmt werden. Eine so generierte Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ wird im Folgenden durch

$$\mathbb{I}_N : \begin{cases} \tau_N = \frac{T}{N}, & \text{für ein } N \in \mathbb{N} \\ t_n = n\tau_N, & \text{für jedes } n = 0, ..., N \end{cases}$$

gekennzeichnet.

Der Banach-Raum V wird mit einem Galerkin-Schema diskretisiert.

Definition 2.1.1. (Galerkin-Schema): Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banach-Raum und $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Familie endlich dimensionaler Teilräume, welche die Eigenschaft der limitierten Vollständigkeit besitzt, das heißt für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{m\to\infty} \inf_{y\in X_m} \|x - y\|_X = 0.$$

Dann heißt $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ Galerkin-Schema in X.

Bemerkung 2.1.1. Ist $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ein Galerkin-Schema in X, so liegt die Vereinigung aller Teilräume X_m dicht in X, das heißt $\operatorname{clos}_{\|\cdot\|_X} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m = X$. Denn angenommen, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m$ liegt nicht dicht in X. Dann existiert zu einem $x \in X$ ein $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$\|x - x_m\|_X \geq \varepsilon_0 \text{ für alle } x_m \in X_m.$$

Damit ergibt sich aus der limitierten Vollständigkeit der Widerspruch

$$0 < \varepsilon_0 \leq \lim_{m\to\infty} \inf_{y\in X_m} \|x - y\|_X = 0.$$

Liegt $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m$ dicht in X, so kann zu jedem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ und ein $x^* \in X_{m_0}$ mit $\|x - x^*\|_X < \varepsilon$ bestimmt werden. Es folgt

$$\inf_{y\in X_m} \|x - y\|_X \leq \|x - x^*\|_X < \varepsilon \text{ für alle } m \geq m_0.$$

Daher liegt die Menge $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m$ genau dann dicht in X, wenn die Familie $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ein Galerkin-Schema in X ist.

Im Folgenden wird ein Galerkin-Schema für den reellen, separablen Banach-Raum V angegeben. Aufgrund der Separabilität von V existiert eine abzählbare und dichte Teilmenge $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq V$. Mittels dieser Menge kann sukzessiv ein Galerkin-Schema in V konstruiert werden. Dazu wird zunächst die rekursive Vorschrift

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \varphi_0, \\ \psi_m &= \varphi_k, \text{ wobei } k \geq m \text{ und } \varphi_k \text{ linear unabhängig zu } \psi_1, ..., \psi_{m-1} \text{ ist,} \end{aligned}$$

verwendet um eine Familie linear unabhängiger Vektoren $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ zu generieren. Anschließend kann eine Familie endlich dimensionaler Teilräume $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ von V definiert werden, wobei $V_m := \operatorname{span}\{\psi_0, ..., \psi_m\}$ für jedes beliebige, fest gewählte $m \in \mathbb{N}$ ist. Aus der Konstruktion geht hervor, dass $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} V_m$ und somit $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} V_m$ dicht in V liegt. Insofern ist durch $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ein Galerkin-Schema[1] in V gegeben. Ferner folgt aus der Konstruktion $V_m \subseteq V_{m+1}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Nachdem das Zeitintervall $[0, T]$ und der reelle Banach-Raum V diskretisiert sind, werden Näherungswerte $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$ mit $u_m^n \approx u(t_n)$ für jedes $n = 1, ..., N$ gesucht, wobei $u \in \mathcal{W}^p(0, T)$ die Lösung von Problem 1.2.1 ist. Diese Näherungswerte gehen aus dem folgenden diskreten Analogon für das variationelle Problem 1.2.1 hervor.

Problem 2.1.1. Zu einem gegebenen Startwert $u_m^0 \in V_m$ und einer Approximation $(f^n)_{n=1}^N \subseteq V^*$ an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$, aus Problem 1.2.1, werden Werte $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$ gesucht, so dass für alle $v \in V_m$ und $n = 1, ..., N$ gilt

$$\left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau_N}, v\right) + \langle \mathrm{A} u_m^n, v\rangle = \langle f^n, v\rangle .$$

Eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$ kann mit einer Clément-Interpolation nullter Ordnung an f bestimmt werden. Dann ergibt sich für jedes $n = 1, ..., N$

$$f^n := \frac{1}{\tau_N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\, dt. \tag{2.1.1}$$

Ein Startwert $u_m^0 \in V_m$ kann auf unterschiedliche Weise bestimmt werden. Allerdings sollte sicher gestellt sein, dass $u_m^0 \in V_m$ eine Approximation an den Anfangswert $u_0 \in H$ aus Problem 1.2.1 ist. Zur Bestimmung eines Startwerts $u_m^0 \in V_m$ kann der Projektionssatz abgeschlossener, konvexer Mengen in Hilbert-Räumen (vergleiche Brézis [10, Kapitel V, Theorem V.2] oder Werner [38, Kapitel V, Satz V.3.2]) verwendet werden. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist V_m ein endlich dimensionaler Teilraum von H und als solcher abgeschlossen und konvex. Daher existiert nach dem Projektionssatz für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $u_m^0 \in V_m$ mit $|u_0 - u_m^0| = \inf\limits_{v\in V_m} |u_0 - v|$. Da V dicht in H liegt, kann zu $u_0 \in H$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $u_\varepsilon \in V$ mit $|u_0 - u_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}$ bestimmt werden. Aufgrund der limitierten Vollständigkeit des Galerkin-Schemas exisiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\inf\limits_{v\in V_m} \|u_\varepsilon - v\| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ für alle $m \geq m_0$. Die Konstante $\alpha > 0$ ergibt sich aus der stetigen Einbettung von V in H. Somit folgt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$

$$\left|u_0 - u_m^0\right| = \inf_{v\in V_m} |u_0 - v| \leq |u_0 - u_\varepsilon| + \alpha \inf_{v\in V_m} \|u_\varepsilon - v\| < \frac{\varepsilon}{2} + \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha} = \varepsilon.$$

[1]Diese Konstruktion ist für jeden reellen, separablen Banach-Raum zulässig. Daher existiert in jedem reellen, separablen Banach-Raum ein Galerkin-Schema.

Also liefert der Projektionssatz eine Folge $(u_m^0)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq V$, die bezüglich der H-Norm stark gegen u_0 konvergiert. Insbesondere ist jedes Folgeglied u_m^0 ein V_m-Proximum an u_0, also die bestmögliche Approximation an $u_0 \in H$ durch Werte aus dem Raum V_m. In Plato [30, Kapitel 15, Theorem 15.25]) ist ein ein Verfahren zur Bestimmung eines Proximums angegeben. Da V_m ein endlichdimensionaler Teilraum von H ist, darf dieses Verfahren zur Bestimmung eines V_m-Proximums angewendet werden. Das nachfolgende Lemma sichert die Lösbarkeit des diskreten Ersatzproblems 2.1.1.

Lemma 2.1.1. *Zu jedem Startwert $u_m^0 \in V_m$ und einer Approximation $(f^n)_{n=1}^N \subseteq V^*$ an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ aus Problem 1.3.1 existieren Werte $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$, die das diskrete Ersatzproblem 2.1.1 eindutig lösen.*

Beweis. [2] Sei $u_m^0 \in V_m$ ein beliebiger, fest gewählter Startwert und $(f^n)_{n=1}^N \subseteq V^*$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ aus Problem 1.2.1. Dann können die Werte $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$ sukzessiv mit dem Satz von Browder-Minty (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 26, Theorem 26.A]) bestimmt werden.

Für ein $n = 1, ..., N$ sei $u_m^{n-1} \in V_m$ bekannt. Dann ist $(\tau_N f^n + u_m^{n-1}) \in V_m^*$, weil $V_m \subseteq V$ und $V \hookrightarrow V^*$ ist.

Durch
$$\langle \mathrm{T}v, w\rangle = (v,w) + \tau_N \langle \mathrm{A}v, w\rangle\,, \text{ für alle } v,w \in V_m,$$
kann ein Operator $\mathrm{T} : V_{m_k} \to V_{m_k}^*$ konstruiert werden. Da das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ stetig ist und der Operator A hemistetig ist, ist der Operator T hemistetig. Aus der Monotonie und der p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1) des Operators A ergeben sich für alle $v, w \in V_m$ mit $v \neq w$ die Abschätzungen
$$\langle \mathrm{T}v, v\rangle = |v|^2 + \tau_N \langle \mathrm{A}v, v\rangle \geq \tau_N \mu \|v\|^p - \tau_N \lambda_{\mathrm{A}} \tag{2.1.2}$$
und
$$\begin{aligned} &\langle \mathrm{T}v - \mathrm{T}w, v-w\rangle \\ =\ & |v-w|^2 + \tau_N \langle \mathrm{A}v - \mathrm{A}w, v-w\rangle \geq |v-w|^2 > 0. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$
Aus (2.1.2) folgt die Koerzitivität und aus (2.1.3) die strikte Monotonie von T.

Also ist der Operator T hemistetig, strikt monoton und koerzitiv. Da jeder endlichdimensionale Raum reflexiv und separabel ist, ist V_m reflexiv und separabel. Demzufolge existiert gemäß dem Satz von Browder-Minty (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 26, Theorem 26.A (c)]) genau ein $u_m^n \in V_m$, so dass für alle $v \in V_m$ die Gleichung
$$\langle \mathrm{T}u_m^n, v\rangle = (u_m^n, v) + \tau_N \langle \mathrm{A}u_m^n, v\rangle = \left\langle \tau_N f^n + u_m^{n-1}, v\right\rangle$$

[2]Der in dieser Arbeit angegebene Beweis für die Aussage von Lemma 2.1.1 ist auch in Emmrich und Šiška [15] zu finden. Ein alternativer Beweis basiert auf einer Folgerung aus dem Fixpunksatz von Brouwer.

erfüllt ist.

Auf diese Weise können sukzessiv Werte $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$ bestimmt werden, die dem Problem 2.1.1 genügen. Da der Operator T strikt monoton ist, sind die Werte $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$ eindeutig bestimmt. □

Da H ein reeller Hilbert-Raum ist, gilt für alle $v, w \in H$ die Identität

$$2\,(v-w,v) = |v|^2 - |w|^2 + |v|^2 - 2\,(v,w) + |w|^2 = |v|^2 - |w|^2 + |v-w|^2 . \quad (2.1.4)$$

Aus der Identität (2.1.4) und der p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1) von A ergibt sich eine A-priori-Abschätzung für die mit Problem 2.1.1 bestimmten Näherungswerte $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$.

Lemma 2.1.2. *Sei $u_m^0 \in V_m$ ein beliebiger Startwert, $(f^n)_{n=1}^N \subseteq V^*$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ aus Problem 1.2.1 und $(u_m^n)_{n=1}^N \subseteq V_m$ Näherungswerte, die sich aus Problem 2.1.1 ergeben. Dann existiert eine Konstante $\mathcal{M} > 0$, so dass die A-priori-Abschätzung*

$$\begin{aligned} &\max_{n\in\{1,\dots,N\}} |u_m^n|^2 + \sum_{n=1}^N \left|u_m^n - u_m^{n-1}\right|^2 + \mu\tau_N \sum_{n=1}^N \|u_m^n\|^p \\ \leq\ & \mathcal{M}\left(\left|u_m^0\right|^2 + \tau_N \sum_{n=1}^N \|f^n\|_*^q + T\right) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

gilt.

Beweis. [3] Der Beweis dieser A-priori-Abschätzung basiert auf der folgenden Young-Ungleichung. Für alle $a, b \in [0,\infty[$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$ab \leq \varepsilon a^p + c_\varepsilon b^q, \quad (2.1.6)$$

wobei $c_\varepsilon = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}$ ist.

Da die Werte $(u_m^n)_{n=1}^N$ dem diskreten Ersatzproblem 2.1.1 genügen, ergibt sich aus der p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1) von A und der Young-Ungleichung (2.1.6) für jedes beliebige, fest gewählte $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau_N}, u_m^n\right) + \mu\,\|u_m^n\|^p &\leq \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau_N}, u_m^n\right) + \langle \mathrm{A}u_m^n, u_m^n\rangle + \lambda_\mathrm{A} \\ &= \langle f^n, u_m^n\rangle + \lambda_\mathrm{A} \leq \|f^n\|_*\,\|u_m^n\| + \lambda_\mathrm{A} \\ &\leq c_{\frac{\mu}{2}}\,\|f^n\|_*^q + \frac{\mu}{2}\,\|u_m^n\|^p + \lambda_\mathrm{A}, \end{aligned}$$

[3]Der angegebene Beweis für diese A-priori-Abschätzung ist auch in Emmrich und Šiška [15] zu finden.

wobei $c_{\frac{\mu}{2}} = \frac{1}{q}\left(p\frac{\mu}{2}\right)^{-\frac{q}{p}}$ ist. Eine Multiplikation mit $2\tau_N$ und die Identität (2.1.4) liefern die Abschätzung

$$|u_m^n|^2 - \left|u_m^{n-1}\right|^2 + \left|u_m^n - u_m^{n-1}\right|^2 + \tau_N \mu \left\|u_m^n\right\|^p \leq 2\tau_N c_{\frac{\mu}{2}} \left\|f^n\right\|_*^q + 2\tau_N \lambda_{\mathrm{A}}.$$

Durch Summation von 1 bis N folgt

$$\left|u_m^N\right|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left|u_m^n - u_m^{n-1}\right|^2 + \tau_N \mu \sum_{n=1}^{N} \left\|u_m^n\right\|^p \leq \left|u_m^0\right|^2 + 2\tau_N c_{\frac{\mu}{2}} \sum_{n=1}^{N} \left\|f^n\right\|_*^q + 2\lambda_{\mathrm{A}} T.$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich mit der Konstanten $\mathcal{M} := \max\left(1, 2c_{\frac{\mu}{2}}, 2\lambda_{\mathrm{A}}\right)$ die Abschätzung (2.1.5). □

2.2. Schwache Konvergenz gegen eine Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1

Im Folgenden seien $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ Teilfolgen der natürlichen Zahlen, die für $k \to \infty$ gegen unendlich streben. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\mathbb{I}_{N_k}$ für das Zeitintervall $[0, T]$ und ein endlichdimensionaler Raum $V_{m_k} \subseteq V$. Die Schrittweiten der Zerlegungen $\mathbb{I}_{N_k}$ und die Startwerte für die diskreten Ersatzprobleme vom Typus Problem 2.1.1 werden mit τ_k und u_k^0 gekennzeichnet.

Zu jeder Zerlegung $\mathbb{I}_{N_k}$ und jedem Raum V_{m_k} können mit dem Ersatzproblem 2.1.1 Näherungswerte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$ bestimmt werden. Mit einem Interpolationsansatz kann zu den Stützstellen $(t_n, u_k^n)_{n=1}^{N_k}$ eine stückweise konstante abstrakte Funktion $u_k : [0, T] \to V_{m_k}$ mit

$$t \mapsto u_k(t) := \begin{cases} u_k^n, & \text{falls } t \in \left]t_{n-1}, t_n\right] \text{ und } n = 1, ..., N_k, \\ u_k^1, & \text{falls } t = 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

und eine stückweise affine lineare abstrakte Funktion $v_k : [0, T] \to V_m$ mit

$$t \mapsto v_k(t) := \begin{cases} \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}(t - t_n) + u_k^n, & \text{falls } t \in \left]t_{n-1}, t_n\right] \\ & \text{und } n = 1, ..., N_k, \\ u_k^0, & \text{falls } t = 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

bestimmt werden. Ebenso kann aus den Stützstellen $(t_n, f^n)_{n=1}^{N_k}$ eine stückweise konstante abstrakte Funktion $f_k : [0, T] \to V^*$ mit

$$t \mapsto f_k(t) := f^n, \text{ falls } t \in \left]t_{n-1}, t_n\right] \text{ und } n = 1, ..., N_k \tag{2.2.3}$$

bestimmt werden. Es wurden bereits verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, um geeignete Werte f^n zu generieren, so dass $(f^n)_{n=1}^{N_k}$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$, aus Problem 1.2.1 ist. In diesem Abschnitt wird die Clément-Interpolation (2.1.1) verwendet um Werte $(f^n)_{n=1}^{N_k}$ zu bestimmen. Die Vorzüge dieses Ansatzes werden durch das nachfolgende Lemma veranschaulicht.

Lemma 2.2.1. *Es sei* $f^n = \frac{1}{\tau_k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\,dt$*, für jedes* $n = 1, ..., N_k$*. Dann hat die abstrakte Funktion* (2.2.3) *die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *ist* f_k *in* $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ *enthalten und es gilt*

$$\|f_k\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q = \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|f^n\|_*^q \leq \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q .$$

(ii) *Die Folge* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in* $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ *stark gegen die gegebene rechte Seite* $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ *aus Problem 1.2.1.*

Beweis. Zu (i): Die abstrakte Funktion $t \mapsto f_k(t)$ ist eine einfache Funktion und als solche Bochner-integrierbar. Aus der Hölder-Ungleichung folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|f_k\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q &= \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\| \frac{1}{\tau_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\,dt \right\|_*^q \\
&\leq \tau_k^{\left(1-\frac{(p-1)q}{p}\right)} \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|f(t)\|_*^q\,dt \\
&= \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|f(t)\|_*^q\,dt = \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q .
\end{aligned}$$

Demgemäß ist $f_k \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$.

Zu (ii): Der Raum $\mathcal{C}([0,T];V^*)$ liegt dicht in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (c)]). Daher kann zu jedem $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ und $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $f_\varepsilon \in \mathcal{C}([0,T];V^*)$ so bestimmmt werden, dass gilt

$$\|f - f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.2.4}$$

Da das Intervall $[0,T]$ kompakt ist, ist f_ε gleichmäßig stetig auf $[0,T]$. Insofern kann ein $\delta \geq \tau > 0$ so bestimmt werden, dass für alle $s,t \in [0,T]$ mit $|s-t| \leq \tau < \delta$ die Abschätzung

$$\|f_\varepsilon(s) - f_\varepsilon(t)\|_* < T^{-\frac{1}{q}} \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.5}$$

erfüllt ist.

Es sei $f_\varepsilon^n := \frac{1}{\tau_k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f_\varepsilon(t)\,dt$ für alle $n = 1, ..., N_k$. Dann ist durch $t \mapsto f_\varepsilon^k(t) = f_\varepsilon^n$, falls $t \in \,]t_{n-1}, t_n]$ und $n = 1, ...N_k$, eine abstrakte Funktion gegeben. Da die abstrakte Funktion f_ε in $\mathcal{C}([0,T];V^*)$ enthalten ist, ist gemäß Teil (i) dieses Lemmas $f_\varepsilon^k \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$. Insbesondere impliziert (2.2.5) die Abschätzung

$$\left\|f_\varepsilon - f_\varepsilon^k\right\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} \leq \left\|f_\varepsilon - f_\varepsilon^k\right\|_{\mathcal{C}([0,T];V^*)} T^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.2.6}$$

Aus (2.2.4), (2.2.6) und der Bedingung (i) dieses Lemmas folgt

$$\begin{aligned}
& \|f - f_k\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} \\
\leq\ & \|f - f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} + \left\|f_\varepsilon - f_\varepsilon^k\right\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} + \left\|f_\varepsilon^k - f_k\right\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} \\
<\ & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\|\frac{1}{\tau_k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} f_\varepsilon(t) - f(t)\,dt\right\|_*^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{2\varepsilon}{3} + \|f - f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2.1. Ist die Approximation $(f^n)_{n=1}^{N_k}$ an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ aus Problem 1.2.1 mit der Clément-Interpolation (2.1.1) bestimmt worden, ergibt sich für Näherungswerte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$, die dem diskreten Ersatzproblem 2.1.1 genügen, gemäß Lemma 2.1.2 und Lemma 2.2.1 (i) die A-priori-Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \max_{n\in\{1,\dots,N_k\}} |u_k^n|^2 + \sum_{n=1}^{N_k} \left|u_k^n - u_k^{n-1}\right|^2 + \mu\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|^p \\
\leq\ & \mathcal{M}\left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q + T\right).
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Ist die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ in H beschränkt, ergibt sich aus (2.2.7) und den Theoremen A.1.1 und A.1.2 die Existenz von in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach*-konvergenter Teilfolgen von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ebenso kann die Existenz einer in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach konvergenten Teilfolge von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nachgewiesen werden. Um die Existenz einer in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach konvergenten Teilfolge von $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nachzuweisen, wird neben der Beschränktheit der Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ in H die folgende Bedingung benötigt

$$\left\|u_k^0\right\| = \mathcal{O}\left(\tau_k^{-\frac{1}{p}}\right). \tag{2.2.8}$$

Lemma 2.2.2. *Ist die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ *in* H *beschränkt, so haben die durch* (2.2.1) *und* (2.2.2) *gegebenen abstrakten Funktionen die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *sind* u_k *und* v_k *in* $\mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *enthalten. Insbesondere ist* $v_k \in \mathcal{C}([0,T];V)$. *Des Weiteren sind* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *beschränkt. Die Folge* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist in* $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ *beschränkt. Ferner ist die Folge* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ *beschränkt, wenn die Bedingung* (2.2.8) *erfüllt ist.*

(ii) *Die Differenz* $(u_k - v_k)$ *konvergiert in* $\mathrm{L}^2(0,T;H)$ *für* $k \to \infty$ *stark gegen Null. Des Weiteren existiert ein* $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *und eine Teilfolge* $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$, *so dass* $u_{k'}, v_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *und* $u_{k'} \rightharpoonup u$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ *für* $k' \to \infty$. *Ferner gilt* $v_{k'} \rightharpoonup u$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ *für* $k' \to \infty$, *sofern die Bedingung* (2.2.8) *erfüllt ist.*

Beweis. Zu (i): Die abstrakte Funktion $t \mapsto u_k(t)$ ist als einfache Funktion Bochner-integrierbar und die abstrakte Funktion $t \mapsto v_k(t)$ ist im Intervall $]t_{n-1}, t_n]$, für jedes $n = 1, ...N_k$, stetig. Sei $n \in \{1, ..., N_k\}$ ein beliebiges, fest gewähltes Element. Dann folgt für alle $t \in\,]t_{n-1}, t_n]$ mit $|t - t_{n-1}|_{\mathbb{R}} < \delta$

$$\begin{aligned} \|v_k(t) - v_k(t_{n-1})\| &= \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} (t - t_n + \tau_k) \right\| \\ &= \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\| |t - t_{n-1}|_{\mathbb{R}} < \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\| \delta. \end{aligned}$$

Daher ist $t \mapsto v_k(t)$ auch für jedes $n = 1, ..., N_k$ in t_{n-1} stetig. Also ist v_k als abstrakte Funktion aus $\mathcal{C}([0,T];V)$ Bochner-integrierbar (vergleiche Emmrich [16, Kapitel 7, Satz 7.1.16]).

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ergeben sich aus der A-priori-Abschätzung (2.2.7) die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{H})} &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]0,T[} |u_k(t)| = \max_{n\in\{1,...,N_k\}} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]t_{n-1},t_n]} |u_k^n| \\ &= \max_{n\in\{1,...,N_k\}} |u_k^n| \le \mathcal{M}\left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} + T \right), \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{H})} &= \max_{n\in\{1,...,N_k\}} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]t_{n-1},t_n]} \left| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} (t - t_n) + u_k^n \right| \\ &= \max_{n\in\{1,...,N_k\}} |u_k^n| \le \mathcal{M}\left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} + T \right) \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

und

$$\begin{aligned}
\|u_k\|^p_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} &= \int_0^T \|u_k(t)\|^p \, dt = \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_k^n\|^p \, dt \\
&= \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|^p \le \frac{\mathcal{M}}{\mu} \left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} + T \right). \qquad (2.2.11)
\end{aligned}$$

Des Weiteren ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ aus der diskreten Hölder-Ungleichung und der A-priori-Abschätzung (2.2.7) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|v_k\|^p_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} &= \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} (t - t_n) + u_k^n \right\|^p dt \\
&\le \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{|(t-t_n)|_{\mathbb{R}}}{\tau_k} \left(\|u_k^n\| + \left\|u_k^{n-1}\right\| \right) + \|u_k^n\| \right)^p dt \\
&\le 3^{p-1} \left(\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\|u_k^{n-1}\right\|^p + 2\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|^p \right) \\
&\le 3^p \left(\tau_k \left\|u_k^0\right\|^p + \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|^p \right) \\
&\le 3^p \left(\tau_k \left\|u_k^0\right\|^p + \frac{\mathcal{M}}{\mu} \left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} + T \right) \right). \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

Folglich sind $u_k, v_k \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Da die Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ in der H-Norm beschränkt ist, sind $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gemäß (2.2.9) sowie (2.2.10) in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ beschränkt. Des Weiteren ergibt sich aus der Relation (2.2.11) die Beschränktheit der Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$. Die Beschränktheit der Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ ergibt sich aus (2.2.12), wenn die Bedingung (2.2.8) erfüllt ist.

Zu (ii): Gemäß Teil (i) dieses Lemmas sind u_k und v_k in $\mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ enthalten. Damit sind $u_k, v_k \in \mathrm{L}^2(0,T;H)$. Dieses Resultat ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung, weil $[0,T]$ ein beschränktes Intervall ist. Aus der A-priori-Abschätzung (2.2.7) folgt

$$\begin{aligned}
0 \le \|u_k - v_k\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;H)} &= \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} (t - t_n) \right|^2 dt \\
= \frac{1}{3} \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left|u_k^n - u_k^{n-1}\right|^2 &\le \frac{1}{3} \tau_k \mathcal{M} \left(\left|u_m^0\right|^2 + \|f\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} + T \right).
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Differenz aus u_k und v_k in der $\mathrm{L}^2(0,T;H)$-Norm für $k \to \infty$ gegen Null, weil die Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ in der H-Norm beschränkt ist und die Folge der Schrittweiten $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Der Primalraum von $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ kann mit dem Raum $\mathrm{L}^1(0,T;H)$ identifiziert werden (vergleiche Edwards [13, Kapitel 8, 8.18.3 Theorem]). Da H ein reeller, separabler Hilbert-Raum ist, ist der Raum $\mathrm{L}^1(0,T;H)$ separabel (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (f)]). Infolgedessen existiert gemäß Theorem A.1.2 eine Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ und $w_1, w_2 \in \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$, so dass gilt

$$u_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} w_1 \text{ und } v_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} w_2 \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k' \to \infty,$$

weil die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Teil (i) dieses Lemmas in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ beschränkt sind. Ferner liefert Teil (i) dieses Lemmas, dass die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ beschränkt ist. Da der Raum $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ reflexiv ist (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]), existiert gemäß Theorem A.1.1 ein $w_3 \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ und eine Teilfolge $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$ von $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\begin{aligned} u_{k''} \overset{*}{\rightharpoonup} w_1 \text{ und } v_{k''} \overset{*}{\rightharpoonup} w_2 \quad & \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k'' \to \infty, \\ u_{k''} \rightharpoonup w_3 \quad & \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k'' \to \infty. \end{aligned}$$

Als Elemente aus $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ sind $w_1, w_2 \in \mathrm{L}^2(0,T;H)$. Daher folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|w_1 - w_2\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;H)} = \int_0^T (w_1(t) - w_2(t), w_1(t) - w_2(t))\, dt \\ &= \lim_{k''\to\infty} \int_0^T (u_{k''}(t) - v_{k''}(t), w_1(t) - w_2(t))\, dt \\ &\leq \lim_{k''\to\infty} \|u_{k''} - v_{k''}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;H)} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{\mathrm{L}^2(0,T;H)} = 0. \qquad (2.2.13) \end{aligned}$$

Aus der schwach*-Konvergenz der Folge $(u_{k''})_{k''\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ gegen w_1 folgt, dass $(u_{k''})_{k''\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;H)$ schwach* gegen w_1 konvergiert. Allerdings ist der Raum $\mathrm{L}^p(0,T;H)$ reflexiv (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]) und in jedem reflexiven Raum sind schwach*-Konvergenz und schwache Konvergenz äquivalent. Also konvergiert die Folge $(u_{k''})_{k''\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;H)$ schwach gegen w_1 und in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen w_3. Da $(V;H;V^*)$ ein Gelfand-Dreier ist, gilt $\mathrm{L}^p(0,T;V) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(0,T;H)$ und $\mathrm{L}^q(0,T;H) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$. Daher folgt $w_1 = w_3$. Also gilt

$$\begin{aligned} u_{k''}, v_{k''} \overset{*}{\rightharpoonup} w_1 \quad & \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k'' \to \infty, \\ u_{k''} \rightharpoonup w_1 \quad & \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k'' \to \infty. \end{aligned}$$

Ist die Bedingung (2.2.8) erfüllt, ist die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ beschränkt. Infolgedessen existiert, gemäß Theorem A.1.1, ein $w_4 \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ und eine Teilfolge $(k''')_{k'''\in\mathbb{N}}$ von $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$, so dass

$$u_{k'''}, v_{k'''} \overset{*}{\rightharpoonup} w_1 \qquad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k''' \to \infty,$$

$$u_{k'''} \rightharpoonup w_1 \text{ und } v_{k'''} \rightharpoonup w_4 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k''' \to \infty.$$

Da die Folge $(v_{k'''})_{k'''\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen w_1 konvergiert, ergibt sich die Identität $w_1 = w_4$ mit der gleichen Argumentation, die zum Nachweis der Identität $w_1 = w_3$ verwendet wurde. □

Mit den Konvergenzresultaten aus den Lemmata 2.2.1 und 2.2.2 kann das Haupt-Konvergenz-Theorem dieses Abschnitts nachgewiesen werden. Allerdings ist für dieses Konvergenzresultat erforderlich, dass die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ in H stark gegen den Anfangswert u_0 konvergiert.

Bemerkung 2.2.2. Liegt der reelle Banach-Raum $(V, \|\cdot\|)$ dicht in dem reellen Hilbertraum $(H, (\cdot,\cdot), |\cdot|)$, kann eine Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ bestimmt werden, die in H stark gegen u_0 konvergiert und der Bedingung (2.2.8) genügt. Denn aufgrund der Dichtheit ist es möglich zu u_0 eine Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ zu bestimmen, die in H stark gegen u_0 konvergiert. Anschließend kann zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein N_k mit $T\,\|u_k^0\|^p \leq N_k$ bestimmt werden. Dann folgt (2.2.8) für die Schrittweite $\tau_k = \frac{T}{N_k}$.

Insofern sind die Vorraussetzungen an das nachfolgende Theorem realisierbar.

Theorem 2.2.1. *Der Operator* $\mathrm{A} : V \to V^*$ *sei monoton, hemistetig und genüge der p-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung* (1.2.1), $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *seien Folgen abstrakter Funktionen* (2.2.1) *sowie* (2.2.2) *und die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ *konvergiere in* H *stark gegen den Anfangswert* u_0*. Des Weiteren sei* $\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;V) \to \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ *eine, gemäß Theorem A.2.2 konstruierte, Erweiterung des Operators* A*. Dann existiert ein* $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$*, so dass die Folgen* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *schwach* gegen* u *konvergieren. Des Weiteren konvergieren die Folge* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ *schwach gegen* u *und die Folge* $(\mathcal{A}u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^q(0,T;V)$ *schwach gegen* $\mathcal{A}u$*. Ist die Bedingung* (2.2.8) *erfüllt konvergiert die Folge* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ *schwach gegen* u*. Ferner ist* $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ *die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1.*

Beweis. [4] Der Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$ kann gemäß Theorem A.2.2 zu einen monotonen, hemiststigen, beschränkten und koerzitiven Operator

$$\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;V) \to \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$$

[4] Der in dieser Arbeit angegebene Beweis für die Aussage von Theorem 2.2.1 ist auch in Emmrich und Šiška [15] zu finden.

mit $(\mathcal{A}u)(t) = \mathrm{A}(u(t))$ für alle $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ und $t \in]0,T[$ fortgesetzt werden. Insbesondere gilt für alle $v, w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$

$$\langle \mathcal{A}v, w \rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times \mathrm{L}^p(0,T;V)} = \int_0^T \langle \mathrm{A}v(t), w(t) \rangle \, dt.$$

Die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ ist als in H stark konvergente Folge beschränkt. Folglich ist gemäß Lemma 2.2.2 (i) die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ beschränkt. Damit ist die Folge $(\mathcal{A}u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ beschränkt, weil der Operator $\mathcal{A}$ beschränkt ist. Des Weiteren folgt aus der A-priori-Abschätzung (2.2.7), dass die Folge $\left(u_k^{N_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in H beschränkt ist. Der Hilbert-Raum H und der Raum $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ sind reflexiv. Die Reflexivität des reellen Hilbert-Raums ergibt sich aus dem Darstellungssatz von Riesz (vergleiche Brézis [10, Kapitel V, Theorem V.5] oder Werner [38, Kapitel V, Theorem V.3.6]). Der Bochner-Lebesgue-Raum $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ ist gemäß Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)] reflexiv. Insofern existieren gemäß Theorem A.1.1 und Lemma 2.2.2 (ii) ein $\xi \in H$, ein $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ sowie ein $a \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ und eine Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ von $(k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$u_{k'}, v_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } \mathrm{k}' \to \infty, \tag{2.2.14}$$

$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k' \to \infty, \tag{2.2.15}$$

$$\mathcal{A}u_{k'} \rightharpoonup a \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V^*) \quad \text{für } k' \to \infty, \tag{2.2.16}$$

und

$$u_{k'}^{N_{k'}} \rightharpoonup \xi \quad \text{in } H \quad \text{für } k' \to \infty. \tag{2.2.17}$$

Ist die Bedingung (2.2.8) erfüllt ergibt sich

$$v_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k' \to \infty. \tag{2.2.18}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $n = 1, ..., N_k$ ist die stückweise affine lineare abstrakte Funktion (2.2.2) in dem offenen Intervall $]t_{n-1}, t_n[$ klassisch differenzierbar mit $v_k'(t) = \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}$ für alle $t \in]t_{n-1}, t_n[$. Die zur Interpolation von (2.2.1) und (2.2.2) verwendeten Stützstellen $(t_n, u_k^n)_{n=1}^{N_k}$ wurden mit dem diskreten Ersatzproblem 2.1.1 bestimmt. Dadurch ergibt sich für jedes $v_{m_k} \in V_{m_k}$ die Gleichung

$$(v_k'(t), v_{m_k}) + \langle \mathrm{A}u_k(t), v_{m_k} \rangle = \langle f_k(t), v_{m_k} \rangle. \tag{2.2.19}$$

Dabei sollte beachtet werden, dass diese Gleichung nicht global erfüllt ist, sondern punktweise für alle $t \in \left]t_{n-1}, t_n\right[$ und $n = 1, ..., N_k$ zu verstehen ist. Des Weiteren ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T])$ sowie $v_{m_k} \in V_{m_k}$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle v_k(t), v_{m_k}\rangle \psi'(t)\,dt &= \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}(t-t_n) + u_k^n, v_{m_k}\right) \psi'(t)\,dt \\ = \sum_{n=1}^{N_k} &\left((u_k^n, v)\,\psi(t_n) - \left(u_k^{n-1}, v_{m_k}\right)\psi(t_{n-1}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}, v_{m_k}\right)\psi(t)\,dt\right) \\ = &\left(u_k^{N_k}, v_{m_k}\right)\psi(T) - \left(u_k^0, v_{m_k}\right)\psi(0) - \int_0^T \langle v_k'(t), v_{m_k}\rangle \psi(t)\,dt. \qquad (2.2.20)\end{aligned}$$

Aus (2.2.19) und (2.2.20) folgt für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ und $v_{m_{k'}} \in V_{m_{k'}}$

$$\begin{aligned}-\int_0^T \left(v_{k'}(t), v_{m_{k'}}\right)\varphi'(t)\,dt &= \int_0^T \left(v_{k'}'(t), v_{m_{k'}}\right)\varphi(t)\,dt \\ &= \int_0^T \left(\left\langle f_{k'}(t), v_{m_{k'}}\right\rangle - \left\langle \mathrm{A}u_{k'}(t), v_{m_{k'}}\right\rangle\right)\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

An dieser Stelle ergibt sich das Problem, dass für $k' \to \infty$ die Folge der Räume $V_{m_{k'}}$ mitläuft. Um diese Problematik zu umgehen wird ein beliebiges, fest gewähltes $\ell \in \mathbb{N}$ verwendet und die obige Gleichung nur mit Werten aus V_{m_ℓ} getestet. Da die Räume $(V_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ geschachtelt liegen, gilt für jedes $k' \geq \ell$ und $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ sowie $v_{m_\ell} \in V_{m_\ell}$

$$-\int_0^T (v_{k'}(t), v_{m_\ell})\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^T \left(\langle f_{k'}(t), v_{m_\ell}\rangle - \langle \mathrm{A}u_{k'}(t), v_{m_\ell}\rangle\right)\varphi(t)\,dt.$$

Für $k' \to \infty$ ergibt sich aus den Konvergenzresultaten (2.2.14) sowie (2.2.16) und Lemma 2.2.1 (ii) für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ und $v_{m_\ell} \in V_{m_\ell}$

$$-\int_0^T (u(t), v_{m_\ell})\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^T \left(\langle f(t), v_{m_\ell}\rangle - \langle a(t), v_{m_\ell}\rangle\right)\varphi(t)\,dt.$$

Damit ergibt sich aus der limitierten Vollständigkeit des Galerkin-Schemas für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ und $v \in V$

$$-\int_0^T (u(t), v)\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^T \left(\langle f(t), v\rangle - \langle a(t), v\rangle\right)\varphi(t)\,dt.$$

Also ist $f - a \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ gemäß Theorem 1.1.1 die verallgemeinerte Ableitung von u. Folglich ist $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$.

Für Elemente aus $\mathcal{W}^p(0,T)$ gilt eine verallgemeinerte Regel partieller Integration[5]. Da u ein Element aus $\mathcal{W}^p(0,T)$ ist, darf diese Regel für u und Funktionen aus $\mathcal{C}^1([0,T])$ verwendet werden. Um zu vermeiden, dass die Räume $V_{m_{k'}}$ für $k' \to \infty$ mitlaufen, wird ein beliebiges, fest gewähltes $\ell \in \mathbb{N}$ verwendet. Dann folgt aus der Regel partieller Integration für den Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$, der Identität $u' = f - a$ und den Relationen (2.2.19) sowie (2.2.20) für jedes $k' \geq \ell$ und für alle $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T])$ sowie $v_{m_\ell} \in V_{m_\ell}$

$$
\begin{aligned}
& (u(T), v_{m_\ell})\,\psi(T) - (u(0), v_{m_\ell})\,\psi(0) \\
= & \int_0^T \left(\langle u'(t), v_{m_\ell}\rangle\,\psi(t) + \langle u(t), v_{m_\ell}\rangle\,\psi'(t)\right) dt \\
= & \int_0^T \left(\langle f(t) - f_{k'}(t) - a(t) + \mathrm{A}u_{k'}(t) + v_{k'}'(t), v_{m_\ell}\rangle\,\psi(t) + \langle u(t), v_{m_\ell}\rangle\,\psi'(t)\right) dt \\
= & \int_0^T \langle f(t) - f_{k'}(t) - a(t) + \mathrm{A}u_{k'}(t), v_{m_\ell}\rangle\,\psi(t)\,dt \\
& + \int_0^T \langle u(t) - v_{k'}(t), v_{m_\ell}\rangle\,\psi'(t)\,dt + \left(u_{k'}^{N_{k'}}, v_{m_\ell}\right)\psi(T) - \left(u_{k'}^0, v_{m_\ell}\right)\psi(0).
\end{aligned}
$$

Da die Folge der Startwerte in H stark gegen den Anfangswert u_0 konvergiert, ergibt sich für $k' \to \infty$ aus den Konvergenzresultaten (2.2.14), (2.2.16) sowie (2.2.17) und Lemma 2.2.1 (ii) für alle $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T])$ und $v_{m_\ell} \in V_{m_\ell}$

$$(u(T), v_{m_\ell})\,\psi(T) - (u(0), v_{m_\ell})\,\psi(0) = (\xi, v_{m_\ell})\,\psi(T) - (u_0, v_{m_\ell})\,\psi(0).$$

Werden in dieser Gleichung für ψ die speziellen Funktionen $\psi_1(t) = T - t$ und $\psi_2(t) = t$ eingesetzt, so folgt aus der limitierten Vollständigkeit des Galerkin-Schemas und der Dichtheit von V in H

$$(u(T) - \xi, v) = 0 \ \text{ und } \ (u(0) - u_0, v) = 0 \ \text{ für alle } v \in H.$$

Folglich ist $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ mit $u' = f - a$. Ferner nimmt u in Null den Anfangswert u_0 an. Insofern ist u die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.3.1, wenn die Identität $\mathcal{A}u = a$ gilt. Im Folgenden wird mit dem Monotonie-Trick von Minty diese Identität nachgewiesen.

[5]Die Regel partieller Integration für den Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ ist unter anderem in Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.17], Roubíček [32, Kapitel 7, Lemma 7.3] oder Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.23] zu finden. Ein Beweis für den Spezialfall $p = 2$ ist in Barbu und Precupanu [7, Kapitel 1, Proposition 3.3] oder Emmrich [16, Kapitel 8, Satz 8.1.9] angegeben.

Da die Folge der Startwerte in H stark gegen $u(0) = u_0$ konvergiert und $u(T) = \xi$ ist, ergibt sich aus der Identität (2.1.4), den Konvergenzresultat (2.2.17) und den Lemmata A.1.2 und A.1.6 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle \, dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt} |u(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}\left(|u(T)|^2 - |u(0)|^2\right) \\
&\leq \liminf_{k'\to\infty} \frac{1}{2}\left|u_{k'}^{N_{k'}}\right|^2 + \liminf_{k'\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\left|u_{k'}^0\right|^2\right) \\
&\leq \liminf_{k'\to\infty} \frac{1}{2}\left(\left|u_{k'}^{N_{k'}}\right|^2 - \left|u_{k'}^0\right|^2\right) \\
&\leq \liminf_{k'\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_{k'}}\left(\left|u_{k'}^n\right|^2 - \left|u_{k'}^{n-1}\right|^2 + \left|u_{k'}^n - u_{k'}^{n-1}\right|^2\right) \\
&= \liminf_{k'\to\infty} \sum_{n=1}^{N_{k'}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{u_{k'}^n - u_{k'}^{n-1}}{\tau}, u_{k'}^n\right) dt \\
&= \liminf_{k'\to\infty} \int_0^T \left(v_{k'}'(t), u_{k'}(t)\right) dt. \qquad (2.2.21)
\end{aligned}$$

Gemäß Lemma 2.2.1 (ii) konvergiert $(f_{k'})_{k'\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ stark gegen f. Also folgt aus den Konvergenzresultat (2.2.15) und Lemma A.1.1 (i)

$$\lim_{k'\to\infty} \int_0^T \langle f_{k'}(t), u_{k'}(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt. \qquad (2.2.22)$$

Damit folgt aus der Identität $a = f - u'$, (2.2.19), (2.2.21) und (2.2.22) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle a(t), u(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t) - u'(t), u(t)\rangle \, dt \\
\geq\ & \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt - \liminf_{k'\to\infty} \int_0^T \left(v_{k'}'(t), u_{k'}(t)\right) dt \\
=\ & \limsup_{k'\to\infty} \int_0^T \langle f_{k'}(t), u_{k'}(t)\rangle \, dt + \limsup_{k'\to\infty}\left(-\int_0^T \left(v_{k'}'(t), u_{k'}(t)\right) dt\right) \\
\geq\ & \limsup_{k'\to\infty} \int_0^T \langle f_{k'}(t), u_{k'}(t)\rangle - \left(v_{k'}'(t), u_{k'}(t)\right) dt \\
\geq\ & \limsup_{k'\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}u_{k'}(t), u_{k'}(t)\rangle \, dt. \qquad (2.2.23)
\end{aligned}$$

Da der Operator A monoton ist, folgt für alle $v, w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle \mathrm{A}v(t), v(t)\rangle \, dt \\
= & \int_0^T \langle \mathrm{A}v(t) - \mathrm{A}w(t), v(t) - w(t)\rangle + \langle \mathrm{A}w(t), v(t) - w(t)\rangle + \langle \mathrm{A}v(t), w(t)\rangle \, dt \\
\geq & \int_0^T \langle \mathrm{A}w(t), v(t) - w(t)\rangle + \langle \mathrm{A}v(t), w(t)\rangle \, dt. \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Aus den Konvergenzresultaten (2.2.15) sowie (2.2.16) und den Abschätzungen (2.2.23) und (2.2.24) ergibt sich für alle $w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle a(t), u(t)\rangle \, dt \geq \limsup_{k'\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}u_{k'}(t), u_{k'}(t)\rangle \, dt \\
\geq & \limsup_{k'\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}w(t), u_{k'}(t) - w(t)\rangle + \langle \mathrm{A}u_{k'}(t), w(t)\rangle \, dt \\
= & \int_0^T \langle \mathrm{A}w(t), u(t) - w(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle a(t), w(t)\rangle \, dt.
\end{aligned}$$

Sei $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ ein beliebiger, fest gewählter Wert und $\theta \in]0,1]$. Dann folgt für $w_1 = u - \theta v$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}(u - \theta v), v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times\mathrm{L}^p(0,T;V)} &= \int_0^T \langle \mathrm{A}(u(t) - \theta v(t)), v(t)\rangle \, dt \\
&\leq \int_0^T \langle a(t), v(t)\rangle \, dt = \langle a, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times\mathrm{L}^p(0,T;V)}
\end{aligned}$$

und für $w_2 = u + \theta v$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}(u + \theta v), v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times\mathrm{L}^p(0,T;V)} &= \int_0^T \langle \mathrm{A}(u(t) - +\theta v(t)), v(t)\rangle \, dt \\
&\geq \int_0^T \langle a(t), v(t)\rangle \, dt = \langle a, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times\mathrm{L}^p(0,T;V)}.
\end{aligned}$$

Da der Operator $\mathcal{A}$ hemistetig ist, ergibt sich für $\theta \to 0$ die Abschätzung

$$\langle \mathcal{A}u - a, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times\mathrm{L}^p(0,T;V)} \leq 0 \leq \langle \mathcal{A}u - a, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times\mathrm{L}^p(0,T;V)}.$$

Folglich ist $\mathcal{A}u = a$. Also existiert eine Teilfolge von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* und in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen die Lösung von Problem 1.2.1 konvergiert. Des Weiteren existiert eine Teilfolge von $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen die Lösung von Problem 1.2.1 konvergiert. Ist die Bedingung (2.2.8) erfüllt existiert eine Teilfolge von $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen die Lösung von Problem 1.2.1 konvergiert. Ferner existiert eine Teilfolge von $(\mathcal{A}u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach gegen $\mathcal{A}u$ konvergiert, wenn u die Lösung von Problem 1.2.1 ist.

Es bleibt nachzuweisen, dass die beschriebenen Konvergenzresultate nicht nur auf Teilfolgen beschränkt sind, sondern für die ganze Folge $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ gültig bleiben. Dieser Nachweis erfolgt mit einen Widerspruchsbeweis und den Lemmata A.1.4 und A.1.5.

Zunächst wird gezeigt, dass alle in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* konvergente Teilfolgen von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen die Lösung von Problem 1.2.1 konvergieren. Sei $u\in\mathcal{W}^p(0,T)$ die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1. Angenommen, es existiert ein $v\in\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ mit $u\neq v$ und eine Teilfolge $(u_{k''})_{k''\in\mathbb{N}}$ von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $u_{k''}\overset{*}{\rightharpoonup} v$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ für $k''\to\infty$.

Da der Operator $\mathcal{A}$ beschränkt und der Raum $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ reflexiv ist (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]), existiert gemäß Lemma 2.2.2 (ii) und Theorem A.1.1 ein $a_0\in\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ und eine Teilfolge $(k''')_{k'''\in\mathbb{N}}$ von $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$, so dass

$$u_{k'''}, v_{k'''}\overset{*}{\rightharpoonup} v \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k'''\to\infty,$$

$$u_{k'''}\rightharpoonup v \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k'''\to\infty,$$

und

$$\mathcal{A}u_{k'''}\rightharpoonup a_0 \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V) \quad \text{für } k'''\to\infty.$$

Ist die Bedingung (2.2.8) erfüllt, ergibt sich

$$v_{k'''}\rightharpoonup v \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k'''\to\infty.$$

Dann kann wie für die Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ nachgewiesen werden, dass $\mathcal{A}v=a_0$ gilt und v eine Lösung für das kontinuierliche Problem 1.2.1 ist. Das Problem 1.2.1 besitzt genau eine Lösung $u\in\mathcal{W}^p(0,T)$. Also ergibt sich der Widerspruch $u=v$. Folglich konvergiert jede in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach*-konvergente Teilfolge von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach* gegen u. Da der Primalraum von $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ mit den separablen Raum $\mathrm{L}^1(0,T;H)$ identifiziert werden kann und aus Lemma 2.2.2 (i) folgt, dass die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ beschränkt ist, konvergiert gemäß Lemma A.1.5 die ganze Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen u.

Analog kann nachgewiesen werden, dass die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen u konvergiert. Ebenso kann mit dem Lemma A.1.4 gezeigt werden, dass die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen u konvergiert und die Folge $(\mathcal{A}u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach gegen $\mathcal{A}u$ konvergiert. Ist die Bedingung (2.2.8) erfüllt, ergibt sich aus dem Lemma A.1.4, dass die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen u konvergiert. □

2.3. Starke Konvergenz gegen eine Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Folge stückweise konstanter abstrakter Funktionen (2.2.1) in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* und in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1 konvergiert, sofern die Folge der Startwerte in H stark gegen den Anfangswert u_0 aus Problem 1.2.1 konvergiert. Die Folge stückweise affine linearer abstrakter Funktione (2.2.2) konvergiert in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* und in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1, wenn die Bedingung (2.2.8) erfüllt ist. Diese Konvergenzresultate sollen nun etwas präzisiert werden. Es besteht die Absicht, starke Konvergenz nachzuweisen. Dazu ist es hilfreich, auf den Satz von Lions-Aubin zurückzugreifen.

Ist der reelle Banach-Raum V kompakt in den reellen Hilbert-Raum H eingebettet, impliziert der Satz von Lions-Aubin, dass für jedes $r \in [1,\infty[$ der Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ kompakt in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ eingebettet ist (vergleiche Theorem A.1.3). Mit diesem Kompaktheitsargument soll die starke Konvergenz der Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$, für jedes $r \in [1,\infty[$, nachgewiesen werden. Allerdings ist eine stückweise konstante abstrakte Funktion vom Typus (2.2.1) nicht in $\mathcal{W}^p(0,T)$ enthalten. Denn einer solchen abstrakten Funktion kann keine verallgemeinerte Ableitung in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ zugeordnet werden. Die abstrakte Funktion (2.2.2) besitzt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die verallgemeinerte Ableitung

$$t \mapsto v_k'(t) = \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}, \text{ falls } t \in]t_{n-1}, t_n] \text{ und } n = 1, ..., N_k, \tag{2.3.1}$$

weil aus (2.2.20) und der limitierten Vollständigkeit des Galerkin-Schemas für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $v \in V$ sowie $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$

$$\int_0^T \langle v_k(t), v\rangle \psi'(t)\,dt \quad = \quad -\int_0^T \langle v_k'(t), v\rangle \psi(t)\,dt \tag{2.3.2}$$

folgt. Folglich ist v_k', für jedes $k \in \mathbb{N}$, gemäß Theorem 1.1.1 die verallgemeinerte Ableitung der abstrakten Funktion (2.2.2).

Damit das obige Kompaktheitsargument auf die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ angewendet werden kann, ist es erforderlich, dass die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt ist. Dazu werden die Bedingung (2.2.8) und eine weitere A-priori-Abschätzung benötigt.

Lemma 2.3.1. *Sei $u_k^0 \in V_k$ ein beliebiger Startwert, $(f^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V^*$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$, aus Problem 1.2.1, und $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_k$ Näherungswerte, die sich aus Problem 2.1.1 ergeben. Ferner sei $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$*

die Orthogonalprojektion, die sich aus den Projektionssatz abgeschlossener, konvexer Mengen in Hilbert-Räumen (vergleiche Brézis [10, Kapitel V, Theorem V.2] oder Werner [38, Kapitel V, Satz V.3.2]) ergebe, und $\kappa > 0$ eine von $k \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|\mathrm{P}_{m_k}\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \kappa \tag{2.3.3}$$

sei. Dann existiert eine Konstante $\mathcal{M}_1 > 0$, so dass die A-priori-Abschätzung

$$\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\|_*^q \;\leq\; \mathcal{M}_1 \left(\left|u_k^0\right|^2 + \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|f^n\|_*^q + T \right) \tag{2.3.4}$$

gilt.

Beweis. [6] Da die Näherungswerte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k}$ dem diskreten Ersatzproblem 2.1.1 genügen, folgt aus der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (1.2.1) von A, der diskreten Hölder-Ungleichung und der Relation (2.3.3) für alle $n = 1, ..., N$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\|_*^q &= \left(\sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\left| \left\langle \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}, v \right\rangle \right|_{\mathbb{R}}}{\|v\|} \right)^q \\
= \left(\sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\left| \left(\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_N}, \mathrm{P}_{m_k} v \right) \right|_{\mathbb{R}}}{\|v\|} \right)^q &= \left(\sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{|\langle f^n - \mathrm{A}u_k^n, \mathrm{P}_{m_k} v\rangle|_{\mathbb{R}}}{\|v\|} \right)^q \\
&\leq \|\mathrm{P}_{m_k}\|_{\mathcal{L}(V,V)}^q \left(\|f^n\|_* + \|\mathrm{A}u_k^n\|_*\right)^q \\
&\leq \kappa \left(\|f^n\|_* + c_\mathrm{A} \|u_k^n\|^{p-1} + c_\mathrm{A}\right)^q \\
&\leq 3^{q-1}\kappa \left(\|f^n\|_*^q + c_\mathrm{A}^q \|u_k^n\|^p + c_\mathrm{A}^q\right).
\end{aligned}$$

Nach einer Summation von 1 bis N_k und einer Multiplikation mit τ_k folgt aus der A-priori-Abschätzung (2.1.5)

$$\begin{aligned}
&\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\|_*^q \\
&\leq 3^{q-1}\kappa \left(\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|f^n\|_*^q + c_\mathrm{A}^q \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|^p + c_\mathrm{A}^q T \right) \\
&\leq 3^{q-1}\kappa \max\left(1, c_\mathrm{A}^q\right) \left(1 + \frac{\mathcal{M}}{\mu}\right) \left(\left|u_k^0\right|^2 + \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|f^n\|_*^q + T \right).
\end{aligned}$$

[6] Der angegebene Beweis für diese A-priori-Abschätzung ist auch in Emmrich und Šiška [15] zu finden.

Aus dieser Ungleichung folgt mit der Konstanten

$$\mathcal{M}_1 := 3^{q-1}\kappa \max\left(1, c_{\mathrm{A}}^q\right)\left(1 + \frac{\mathcal{M}}{\mu}\right)$$

die Abschätzung (2.3.4). □

Bemerkung 2.3.1. Die Bedingung (2.3.3) impliziert die Stabilität der Orthogonalprojektion $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$ in V. Im Allgemeinen ist die Orthogonalprojektion $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$ nicht in V stabil. Allerdings kann für spezielle Funktionenräume eine stabile Orthogonalprojektion, die auf geeignete Finite-Elemente-Räume abbildet, bestimmt werden. Unter anderem werden in Bramble, Pasciak und Steinbach [9] Finite-Elemente-Räume angegeben, so dass die L^2-Projektion in H_0^1 stabil ist. Crouzeix und Thomée [11] geben Finite-Elemente-Räume an, so dass die L^2-Projektion in L^p und $\mathrm{W}^{1,p}$ stabil ist. In der Arbeit von Emmrich und Šiška [15] über die volle Diskretisierung der Poröse-Medien-Gleichung werden Finite-Elemente-Räume angegeben, so dass die H^{-1}-Projektion in L^p stabil ist.

Wie in Abschnitt 2.2 wird die Approximation $(f^n)_{n=1}^{N_k}$ an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$, aus Problem 1.2.1, mit der Clément-Interpolation (2.1.1) bestimmt. Also ergibt sich für Näherungswerte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$, die dem Ersatzproblem 2.1.1 genügen, gemäß Lemma 2.2.1 (i) und Lemma 2.3.1 die A-priori-Abschätzung

$$\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\|_*^q \leq \mathcal{M}_1 \left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q + T \right). \tag{2.3.5}$$

Aus dieser Abschätzung folgt die Beschränktheit der Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$, sofern die Bedingung (2.2.8) erfüllt ist.

Lemma 2.3.2. *Die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ *sei in* H *beschränkt, es sei die Bedingung* (2.2.8) *erfüllt und die Orthogonalprojektion* $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$ *sei in* V *stabil. Dann ist für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *die abstrakte Funktion* (2.2.2) *in* $\mathcal{W}^p(0,T)$ *enthalten und die Folge* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{W}^p(0,T)$ *beschränkt.*

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine beliebige, fest gewählte natürliche Zahl. Die abstrakte Funktion (2.3.1) ist als einfache Funktion Bochner-integrierbar und aus der A-priori-Abschätzung (2.3.5) folgt

$$\begin{aligned} \|v_k'\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q &= \int_0^T \|v_k'(t)\|_*^q \, dt = \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\|_*^q \\ &\leq \mathcal{M}_1 \left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}^q + T \right). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Folglich ist $v'_k \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$. Gemäß Lemma 2.2.2 (i) ist $v_k \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$. Ferner folgt aus (2.3.2), dass v'_k die verallgemeinerte Ableitung von v_k ist. Also ist $v_k \in \mathcal{W}^p(0,T)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Da die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ in H beschränkt ist, ergibt sich aus der Abschätzung (2.3.6), dass die Folge $(v'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ beschränkt ist. Des Weiteren ist die Bedingung (2.2.8) erfüllt. Daher ist gemäß Lemma 2.2.2 (i) die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ beschränkt. Also ist $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt. □

Nun kann mit den Lemmata A.1.7 und 2.3.2 nachgewiesen werden, dass die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ für jedes $r \in [1,\infty[$ stark gegen die Lösung des Problems 1.2.1 konvergieren.

Theorem 2.3.1. *Der Operator* $\mathrm{A} : V \to V^*$ *sei monoton, hemistetig und genüge der* $(p-1)$*-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung* (1.2.1), $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *seien Folgen abstrakter Funktionen* (2.2.1), (2.2.2) *sowie* (2.3.1), *der reelle Banach-Raum* V *sei kompakt im reellen Hilbert-Raum* H *eingebettet und die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ *konvergiere in* H *stark gegen den Anfangswert* u_0, *aus Problem 1.2.1. Des Weiteren sei die Orthogonalprojektion* $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$ *in* V *stabil und es sei die Bedingung* (2.2.8) *erfüllt. Dann konvergieren die Folgen* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ *für jedes* $r \in [1,\infty[$ *stark gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1. Ferner konvergiert die Folge* $(v'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ *schwach gegen die verallgemeinerte Ableitung der Lösung des Problems 1.2.1.*

Beweis. [7] Gemäß Theorem 2.2.1 gilt

$$u_k, v_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{für } k \to \infty \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H)\,, \tag{2.3.7}$$

wobei $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ die Lösung für das kontinuierliche Problem 1.2.1 ist.

Sei $r \in [1,\infty[$ ein beliebiger, fest gewählter Parameter. Da der Raum $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ reflexiv ist (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]) und in jedem reflexiven Raum die schwach*-Konvergenz einer Folge äquivalent zur schwachen Konvergenz der Folge ist, folgt aus dem Konvergenzresultat (2.3.7), dass

$$v_k \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathrm{L}^r(0,T;H) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Da die Bedingung (2.2.8) erfüllt ist, ist gemäß Lemma 2.3.2 die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt. Daher folgt aus Lemma A.1.7, dass

$$v_k \to u \quad \text{in } \mathrm{L}^r(0,T;H) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen u. Also ist die Folge $(u_k - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ beschränkt. Ferner konvergiert gemäß

[7] Der in dieser Arbeit angegebene Beweis für die Aussage von Theorem 2.3.1 ist auch in Emmrich und Šiška [15] zu finden.

Lemma 2.2.2 (ii) die Folge $(u_k - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^2(0,T;H)$ stark gegen Null. Also ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \\ \leq\ & \lim_{k\to\infty} \Big(\|u_k - v_k\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} + \|v_k - u\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \Big) \\ \leq\ & \lim_{k\to\infty} \Big(\|u_k - v_k\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;H)}^{\frac{r-2}{r}} \|u_k - v_k\|_{\mathrm{L}^2(0,T;H)}^{\frac{2}{r}} + \|v_k - u\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \Big) = 0. \end{aligned}$$

Demgemäß konvergieren die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ für jedes $r \in [0,\infty[$ stark gegen u.

Es bleibt nachzuweisen, dass die Folge $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach gegen die verallgemeinerte Ableitung der Lösung von Problem 1.2.1 konvergiert. Dieser Nachweiß erfolgt mit einem Widerspruchsbeweis und Lemma A.1.4. Da die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt ist, ist die Folge $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ beschränkt. Der Bochner-Lebesgue-Raum $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ ist reflexiv (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]). Folglich besitzt die Folge $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ gemäß Theorem A.1.1 eine in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach konvergente Teilfolge. Nun wird gezeigt, dass jede schwach konvergente Teilfolge von $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach gegen u' konvergiert. Angenommen, es existiert ein $w \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ mit $u' \neq w$ und eine Teilfolge $(v_{k'}')_{k'\in\mathbb{N}}$ von $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$v_{k'}' \rightharpoonup w \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V^*) \quad \text{für } k' \to \infty.$$

Dann folgt aus (2.3.7) für alle $v \in V$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle w(t), v\rangle \varphi(t)\, dt &= \lim_{k'\to\infty} \int_0^T \langle v_{k'}'(t), v\rangle \varphi(t)\, dt \\ &= -\lim_{k'\to\infty} \int_0^T \langle v_{k'}(t), v\rangle \varphi'(t)\, dt \\ &= -\int_0^T \langle u(t), v\rangle \varphi'(t)\, dt. \end{aligned}$$

Also ergibt sich gemäß Theorem 1.1.1 der Widerspruch $u' = w$. Folglich konvergiert jede in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach konvergente Teilfolge von $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ schwach gegen u'. Da die Folge $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ beschränkt ist und der Raum $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ reflexiv ist, folgt aus Lemma A.1.4, dass die Folge $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach gegen u' konvergiert. □

Die Orthogonalprojektion $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$ ist im Allgemeinen nicht stabil in V. Insofern ist es sinnvoll, eine weitere Bedingung für die starke Konvergenz, der Folgen abstrakter Funktionen (2.2.1) und (2.2.2), anzugeben. Dafür ist es erforderlich die Monotoniebedingung für den Operator A zu verschärfen.

Im Folgenden sei $\mathrm{A} : V \to V^*$ ein hemistetiger Operator. Dieser genüge der $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1). Ferner seien $\rho, \varrho \in]0, \infty[$, so dass A für alle $v, w \in V$ der Bedingung

$$\langle \mathrm{A}v - \mathrm{A}w, v - w \rangle \geq \rho \left(\|v\|^{p-1} - \|w\|^{p-1} \right) \left(\|v\| - \|w\| \right) \tag{2.3.8}$$

oder

$$\langle \mathrm{A}v - \mathrm{A}w, v - w \rangle \geq \varrho \, \|v - w\|^p \tag{2.3.9}$$

genüge. Aus der Young-Ungleichung folgt für alle $a, b \in [0, \infty[$

$$\begin{aligned} 0 &= a^p + b^p - \left(\frac{a^p}{q} + \frac{b^p}{p} \right) - \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q} \right) \\ &\leq a^p + b^p - a^{p-1}b - ab^{p-1} = \left(a^{p-1} - b^{p-1} \right) (a - b) \,. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Also ist der Operator A monoton, wenn die Bedingung (2.3.8) erfüllt ist. Genügt A der Bedingung (2.3.9), ist die Monotonie von A evident.

Bemerkung 2.3.2. Die Monotoniebedingung (2.3.8) ist ein Spezialfall der d-Monotonie und (2.3.9) der gleichmäßigen Monotonie (vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel III, Definition 1.2]).

Als Konsequenz der stärkeren Monotoniebedingungen an den Operator A ergibt sich aus Lemma A.1.3, dass die Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0, T; H)$ für jedes $r \in [1, \infty[$ stark gegen die Lösung des Problems 1.2.1 konvergieren, sofern der reelle Banach-Raum V gleichmäßig konvex ist.

Theorem 2.3.2. *Der reelle Banach-Raum V sei gleichmäßig konvex, $\mathrm{A} : V \to V^*$ sei ein hemistetiger Operator, welcher der Monotoniebedingung* (2.3.8) *oder* (2.3.9) *und der $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung* (1.2.1) *genüge. Es seien $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sowie $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folgen abstrakter Funktionen* (2.2.1) *sowie* (2.2.2) *und die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq V$ konvergiere in der H-Norm gegen den Anfangswert u_0, aus Problem 1.2.1. Dann konvergieren die Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0, T; H)$ für jedes $r \in [1, \infty[$ stark gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1. Ferner konvergiert die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0, T; V)$ stark gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1.*

Beweis. [8] Der Operator A ist hemistetig und genügt der $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1). Die Monotoniebedingung (2.3.8) oder (2.3.9) impliziert, dass der Operator A monoton ist. Insofern kann gemäß Theorem A.2.2 ein

[8] Der in dieser Arbeit angegebene Beweis für die Aussage von Theorem 2.3.2 ist auch in Emmrich und Šiška [15] zu finden.

hemistetiger, monotoner, beschränkter und koerzitiver Operator

$$\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;V) \to \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$$

mit $\mathcal{A}u(t) = \mathrm{A}(u(t))$ für alle $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ und $t \in \,]0,T[$ konstruiert werden. Gemäß Theorem 2.2.1 gilt

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k \to \infty \tag{2.3.11}$$

und

$$\mathcal{A}u_k \rightharpoonup \mathcal{A}u \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V^*) \quad \text{für } k \to \infty, \tag{2.3.12}$$

wobei $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1 ist. Da $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ die Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.1 ist, gilt die Identität $f - \mathcal{A}u - u' = 0$. Ferner folgt aus den Abschätzungen (2.2.21) sowie (2.2.22) und den Konvergenzresultaten (2.3.11) sowie (2.3.12)

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}u_k(t) - \mathrm{A}u(t), u_k(t) - u(t)\rangle\, dt \\
\leq\;& \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \langle f_k(t), u_k(t)\rangle\, dt - \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \langle v_k'(t), u_k(t)\rangle\, dt \\
&- \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}u_k(t), u(t)\rangle\, dt - \liminf_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}u(t), u_k(t) - u(t)\rangle\, dt \\
\leq\;& \int_0^T \langle f(t) - u'(t) - \mathrm{A}u(t), u(t)\rangle\, dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Für alle $v, w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung

$$\int_0^T \|v(t)\| \, \|w(t)\|^{p-1}\, dt \leq \|v\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} \|w\|^{p-1}_{\mathrm{L}^p(0,T;V)}.$$

Demnach folgt aus der Hölder-Ungleichung, der Monotoniebedingung (2.3.8) und den Abschätzungen (2.3.10) sowie (2.3.13)

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\;& \limsup_{k\to\infty} \left(\rho\left(\|u_k\|^{p-1}_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} - \|u\|^{p-1}_{\mathrm{L}^p(0,T;V)}\right)\left(\|u_k\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} - \|u\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)}\right)\right) \\
\leq\;& \limsup_{k\to\infty} \left(\int_0^T \rho\left(\|u_k(t)\|^{p-1} - \|u(t)\|^{p-1}\right)\left(\|u_k(t)\| - \|u(t)\|\right) dt\right) \\
\leq\;& \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}u_k(t) - \mathrm{A}u(t), u_k(t) - u(t)\rangle\, dt \leq 0.
\end{aligned}$$

Demzufolge ergibt sich aus der obigen Abschätzung

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\|u_k\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} - \|u\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)}\right) = 0.$$

Da der reelle Banach-Raum V gleichmäßig konvex ist, ist der Raum $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ gleichmäßig konvex (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (g)]). Infolgedessen konvergiert die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ gemäß Lemma A.1.3 stark gegen u.

Genügt der Operator A der Monotoniebedingung (2.3.9), folgt aus der Abschätzung (2.3.13)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{k\to\infty} \varrho \left\|u_k - u\right\|^p_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} = \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \varrho \left\|u_k(t) - u(t)\right\|^p dt \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \left\langle \mathrm{A}u_k(t) - \mathrm{A}u(t), u_k(t) - u(t)\right\rangle dt \leq 0. \end{aligned}$$

Dementsprechend konvergiert $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ stark gegen u, wenn A die Monotoniebedingung (2.3.9) erfüllt.

Aus der stetigen Einbettung $V \hookrightarrow H$ folgt, dass $\mathrm{L}^p(0,T;V) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(0,T;H)$ (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (h)]). Daher konvergiert die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;H)$ stark gegen u.

Im Folgenden sei $r \in [1,\infty[$ ein beliebiger, fest gewählter Parameter. Gemäß Theorem 2.2.1 konvergiert $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen u. Also ist die Folge $(u_k - u)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ beschränkt. Folglich ergibt sich die Abschätzung

$$\lim_{k\to\infty} \left\|u_k - u\right\|^r_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \leq \lim_{k\to\infty} \left\|u_k - u\right\|^{r-p}_{\mathrm{L}^\infty(0,T;H)} \left\|u_k - u\right\|^p_{\mathrm{L}^p(0,T;H)} = 0.$$

Auch die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gemäß Theorem 2.2.1 schwach* in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ gegen u. Also ist die Folge $(u_k - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ beschränkt. Ferner folgt aus Lemma 2.2.2 (ii), dass die Folge $(u_k - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^2(0,T;H)$ stark gegen Null konvergiert. Folglich ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \left\|v_k - u\right\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \\ \leq\ &\lim_{k\to\infty} \Big(\left\|v_k - u_k\right\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} + \left\|u_k - u\right\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \Big) \\ \leq\ &\lim_{k\to\infty} \Big(\left\|v_k - u_k\right\|^{r-2}_{\mathrm{L}^\infty(0,T;H)} \left\|v_k - u_k\right\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;H)} + \left\|u_k - u\right\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \Big) = 0. \end{aligned}$$

Infolgedessen konvergieren die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ für jedes $r \in [0,\infty[$ stark gegen u. Des Weiteren konvergiert die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ stark gegen u. □

Bemerkung 2.3.3. Die Aussage von Theorem 2.3.2 bleibt gültig, wenn der Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$ der Monotoniebedingung (2.3.9) genügt und der reelle Banach-Raum V nicht gleichmäßig konvex ist.

2.4. Störung durch einen verstärkt stetigen Operator

In den vorherigen Abschnitten wurde ein Näherungsverfahren für die Lösung von Problem 1.2.1 konstruiert und die Konvergenz des Verfahrens nachgewiesen. In diesem Abschnitt wird das kontinuierliche Problem 1.2.3 betrachtet. Das Problem 1.2.3 besitzt gemäß Theorem 1.2.2 mindestens eine Lösung. Es ergibt sich die Frage, ob eine Lösung des Problems 1.2.3 mit dem in den vorhergegangenen Abschnitten beschriebenen Näherungsverfahren charakterisiert werden kann. Dieser Frage wird in diesem Abschnitt nachgegangen.

Im Folgenden sei der reelle Banach-Raum V kompakt in den reellen Hilbert-Raum H eingebettet und es seien $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sowie $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ Teilfolgen der natürlichen Zahlen, die für $k \to \infty$ gegen unendlich streben. Wie in Abschnitt 2.2 kann für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine äquidistante Zerlegung

$$\mathbb{I}_{N_k} : \begin{cases} \tau_k = \frac{T}{N_k}, & \text{für ein } N_k \in \mathbb{N} \\ t_n = n\tau_k, & \text{für jedes } n = 0, ..., N \end{cases}$$

für das Zeitintervall $[0, T]$ angegeben werden. Der reelle Banach-Raum V wird mit dem Galerkin-Schema $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus Abschnitt 2.1 diskretisiert. Also existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein endlichdimensionaler Raum V_{m_k}.

Wie zu dem Problem 1.2.1 kann auch zu dem Problem 1.2.3 ein diskretes Ersatzproblem formuliert werden.

Problem 2.4.1. Zu einem gegebenen Startwert $u_k^0 \in V_m$ und einer Approximation $(f^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V^*$ an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$, aus Problem 1.2.3, werden Werte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$ gesucht, so dass für alle $v_{m_k} \in V_{m_k}$ und $n = 1, ..., N_k$ gilt

$$\left(\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}, v_{m_k} \right) + \langle \mathrm{A}u_k^n + \mathrm{B}u_k^n, v_{m_k} \rangle = \langle f^n, v_{m_k} \rangle .$$

Die Existenz von Werten $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$, die dem diskreten Ersatzproblem 2.4.1 genügen, ergibt sich sukzessiv aus dem Satz von Brézis über pseudomonotone Operatoren (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 27, Theorem 27.A]). Aufgrund der Störung durch den Operator $\mathrm{B} : V \to V^*$ sind diese Werte, im Unterschied zum diskreten Ersatzproblem 2.1.1, nicht eindeutig bestimmt. Ferner können für Werte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$, die dem Ersatzproblem 2.4.1 genügen, A-priori-Abschätzungen vom Typus (2.1.5) und (2.3.4) angegeben werden.

Lemma 2.4.1. *Sei $u_k^0 \in V_{m_k}$ ein beliebiger Startwert und $(f^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V^*$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$, aus Problem 1.2.3. Für jedes $k \in \mathbb{N}$*

sei die Orthogonalprojektion $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$ in V stabil. Dann existieren Werte $(u_m^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$, die Problem 2.4.1 genügen und es existieren positive Konstante $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3 \in \,]0,\infty[$, so dass gilt

$$\begin{aligned} &\max_{n\in\{1,\dots,N_k\}} |u_k^n|^2 + \sum_{n=1}^{N_k} \left|u_k^n - u_k^{n-1}\right|^2 + \tau_k \frac{\mu}{2} \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|^p \\ \leq\ & \mathcal{M}_2 \left(\left|u_k^0\right|^2 + \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|f^n\|_*^q + T \right) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

und

$$\tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \left\| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k} \right\|_*^q \ \leq\ \mathcal{M}_3 \left(\left|u_k^0\right|^2 + \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|f^n\|_*^q + T \right). \tag{2.4.2}$$

Beweis. [9] Aus der $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1) von A und den Eigenschaften (1.2.2) von B ergeben sich für den Operator A + B die folgende $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung. Für alle $v \in V_{m_k}$ gilt

$$\|\mathrm{A}v + \mathrm{B}v\|_* \ \leq\ (c_\mathrm{A} + c_\mathrm{B}) \left(\|v\|^{p-1} + 1\right) \tag{2.4.3}$$

und

$$\langle \mathrm{A}v + \mathrm{B}v, v\rangle \geq \frac{\mu}{2} \|v\|^p - (\lambda_\mathrm{A} + \lambda_\mathrm{B}). \tag{2.4.4}$$

Die Werte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$ können sukzessiv mit dem Satz von Brézis (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 27, Theorem 27.A]) bestimmt werden. Für ein $n = 1, ..., N_k$ sei $u_k^{n-1} \in V_{m_k}$ bekannt. Dann ist $\left(\tau_k f^n + u_k^{n-1}\right) \in V_{m_k}^*$, weil $V_{m_k} \subseteq V$ und $V \hookrightarrow V^*$ ist. Durch

$$\langle \mathrm{T}v, w\rangle := (v,w) + \tau_k \langle \mathrm{A}v + \mathrm{B}v, w\rangle, \text{ für alle } v,w \in V_{m_k},$$

kann ein Operator $\mathrm{T} : V_{m_k} \to V_{m_k}^*$ definiert werden. Der Operator A ist pseudomonoton, weil ein hemistetiger, monotoner Operator pseudomonoton ist (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 27, Proposition 27.6 (a)]). Es sei $\mathrm{T}_1 : V_{m_k} \to V_{m_k}^*$ ein Operator mit

$$\langle \mathrm{T}_1 v, w\rangle := (v,w) + \tau_k \langle \mathrm{B}v, w\rangle, \text{ für alle } v,w \in V_{m_k}.$$

Dann folgt aus der Stetigkeit des Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)$ und den Eigenschaften (1.2.2) von B, dass der Operator T_1 stetig ist. Der Raum V_m ist endlichdimensional und der Operator T_1 ist stetig. Folglich ist T_1 pseudomonoton (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 27, Proposition 27.6 (d)]). Dementsprechend ist der Operator $\mathrm{T} = \mathrm{A} + \mathrm{T}_1$ gemäß Zeidler [42, Kapitel 27, Proposition 27.6 (e)] pseudomonoton.

[9] Der angegebene Beweis orientiert sich an den Beweisen in Emmrich und Šiška [15, Theorem 3.1 und Theorem 3.2] und in Emmrich [19, Theorem 4].

Aus der stetigen Einbettung $V \hookrightarrow H$, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (2.4.3) von $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ ergibt sich für alle $v \in V_{m_k}$ die Abschätung

$$\begin{aligned}\|\mathrm{T}v\|_{V_{m_k}^*} &\leq \sup_{w\in V_{m_k}\setminus\{0\}} \left(\frac{|(v,w)|_{\mathbb{R}} + \tau_k\,|\langle \mathrm{A}v+\mathrm{B}v, w\rangle|_{\mathbb{R}}}{\|w\|}\right)\\ &\leq \sup_{w\in V_{m_k}\setminus\{0\}} \left(\frac{|v|\,|w| + \tau_k\,(c_{\mathrm{A}}+c_{\mathrm{B}})\left(\|v\|^{p-1}+1\right)\|w\|}{\|w\|}\right)\\ &\leq \alpha\,|v| + \tau_k\,(c_{\mathrm{A}}+c_{\mathrm{B}})\left(\|v\|^{p-1}+1\right) < \infty,\end{aligned}$$

wobei $\alpha > 0$ die Einbettungskonstante ist, die sich aus der stetigen Einbettung $V \hookrightarrow H$ ergibt. Des Weiteren ergibt sich aus der p-Koerzitivitätsbedingung (2.4.4) von $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ für alle $v \in V_{m_k}$ die Abschätung

$$\langle \mathrm{T}v, v\rangle \;=\; |v|^2 + \tau_k\,\langle \mathrm{A}v+\mathrm{B}v, v\rangle \geq \tau_k\left(\frac{\mu}{2}\,\|v\|^p - \lambda_{\mathrm{A}} - \lambda_{\mathrm{B}}\right).$$

Dementsprechend ist der Operator T pseudomonoton, beschränkt und koerzitiv. Da jeder endlichdimensionale Raum reflexiv und separabel ist, ist der Raum V_{m_k} reflexiv und separabel. Folglich existiert gemäß dem Satz von Brézis (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 26, Theorem 26.A (c)]) ein $u_k^n \in V_{m_k}$, so dass für alle $v \in V_{m_k}$ die Gleichung

$$\langle \mathrm{T}u_k^n, v\rangle = (u_k^n, v) + \tau_k\,\langle \mathrm{A}u_k^n + \mathrm{B}u_k^n, v\rangle = \left\langle \tau_k f^n + u_k^{n-1}, v\right\rangle$$

erfüllt ist. Auf diese Weise können sukzessiv Werte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$ bestimmt werden, die dem Problem 2.4.1 genügen.

Genügen die Werte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k}$ dem Ersatzproblem 2.4.1 folgt aus der Identität (2.1.4), der Young-Ungleichung (2.1.6) und der p-Koerzitivitätsbedingung (2.4.4) von $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, wie im Beweis von Lemma 2.1.2, die A-priori-Abschätzung (2.4.1). Dabei ergibt sich die Konstante

$$\mathcal{M}_2 := \max\left(1, 2c_{\frac{\mu}{4}}, 2\,(\lambda_{\mathrm{A}}+\lambda_{\mathrm{B}})\right),$$

wobei $c_{\frac{\mu}{4}} = \frac{1}{q}\left(\frac{\mu}{4}p\right)^{-\frac{q}{p}}$ ist. Ebenso folgt für Werte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k}$, die dem diskreten Ersatzproblem 2.4.1 genügen, aus der diskreten Hölder-Ungleichung, der A-priori-Abschätzung (2.4.1) und der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (2.4.3) von $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, wie im Beweis von Lemma 2.3.1, die A-priori-Abschätzung (2.4.2). Dabei ergibt sich die Konstante

$$\mathcal{M}_3 := 3^{q-1}\,\|\mathrm{P}_{m_k}\|_{\mathcal{L}(V,V)}\max\left(1, (c_{\mathrm{A}}+c_{\mathrm{B}})^q\right)\left(1+2\frac{\mathcal{M}_2}{\mu}\right).$$

□

Genau wie das diskrete Ersatzproblem 2.1.1, liefert das Problem 2.4.1 zu einer Zerlegung $\mathbb{I}_{N_k}$ und einem Raum V_{m_k} Näherungswerte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{m_k}$. Des Weiteren kann mit einem Interpolationsansatz zu den Stützstellen $(t_n, u_k^n)_{n=1}^{N_k}$ eine stückweise konstante abstrakte Funktion (2.2.1) und eine stückweise affine lineare abstrakte Funktion (2.2.2) bestimmt werden. Wie in den Abschnitten 2.2 und 2.3 sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der stückweise konstanten abstrakten Funktionen (2.2.1) und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der stückweise affine linearen abstrakten Funktionen (2.2.2). Gemäß (2.3.2) besitzt eine stückweise affine lineare abstrakte Funktion (2.2.2) für jedes $k \in \mathbb{N}$ die verallgemeinerte Ableitung

$$t \mapsto v_k'(t) = \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}, \quad \text{falls } t \in \left]t_{n-1}, t_n\right] \text{ und } n = 1, ..., N_k.$$

Ferner liefert ein Interpolationsansatz zu den Stützstellen $(t_n, f^n)_{n=1}^{N_k}$ eine stückweise konstante abstrakte Funktion (2.2.3). Die Folge der so erzeugten abstrakten Funktionen wird mit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Ist die Approximation $(f^n)_{n=1}^{N_k}$ an die rechte Seite, aus Problem 1.2.3, mit der Clément-Interpolation (2.1.1) bestimmt worden, konvergiert gemäß Lemma 2.2.1 (ii) die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ stark gegen f und die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ besitzen die Eigenschaften aus den Lemmata 2.2.2 und 2.3.2, weil die A-priori-Abschätzungen (2.4.1) und (2.4.2) von der gleichen Struktur wie die A-priori-Abschätzungen (2.1.5) und (2.3.4) sind.

Infolgedessen kann für das kontinuierliche Problem 1.2.3 ein ähnliches Konvergenzresultat wie für das Problem 1.2.1 erzielt werden. Allerdings ist das kontinuierliche Problem 1.2.3 nicht eindeutig lösbar. Insofern kann nur die Existenz von Teilfolgen nachgewiesen werden, die im Sinne der Theoreme 2.2.1 und 2.3.1 gegen eine Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.3 konvergieren.

Theorem 2.4.1. *Der Operator* $\mathrm{A} : V \to V^*$ *sei monoton, hemistetig und genüge der* $(p-1)$*-Wachstums- sowie* p*-Koerzitivitätsbedingung* (1.2.1)*, der Operator* $\mathrm{B} : V \to V^*$ *genüge den Bedingungen* (1.2.2)*. Es seien* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$*,* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sowie* $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen abstrakter Funktionen* (2.2.1)*,* (2.2.2) *sowie* (2.3.1)*. Der reelle Banach-Raum* V *sei kompakt im reellen Hilbert-Raum* H *eingebettet und die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ *konvergiere in* H *stark gegen den Anfangswert* u_0*, aus Problem 1.2.3. Des Weiteren sei für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *die Orthogonalprojektion* $\mathrm{P}_{m_k} : H \to V_{m_k}$ *in* V *stabil und es sei die Bedingung* (2.2.8) *erfüllt. Dann existiert ein* $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *und eine Teilfolge* $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ *von* $(k)_{k\in\mathbb{N}}$*, so dass die Folgen* $(u_{k'})_{k'\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_{k'})_{k'\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *schwach*, in* $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ *schwach und für jedes* $r \in [1,\infty[$ *in* $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ *stark gegen* u *konvergieren. Ferner ist* u *eine Lösung des kontinuierlichen Problems 1.2.3 und die Folge* $(v_{k'}')_{k'\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in* $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ *schwach gegen* u'*.*

Beweis. [10] Da die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ in der H-Norm gegen den Anfangswert u_0, aus Problem 1.2.3, konvergiert, ist die Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ in H beschränkt. Ferner ist die Bedingung (2.2.8) erfüllt. Folglich existiert gemäß Lemma 2.2.2 (ii) ein $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ und eine Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ von $(k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$u_{k'}, v_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k' \to \infty \tag{2.4.5}$$

und

$$u_{k'}, v_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k' \to \infty. \tag{2.4.6}$$

Da $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ ist, ist gemäß Theorem A.1.3 für jedes $r \in [1,\infty[$ der Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ kompakt in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ eingebettet. Ferner ist gemäß Lemma 2.3.2 die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt. Dementsprechend folgt aus den Konvergenzresultat (2.4.5) und Lemma A.1.7, wie im Beweis von Theorem 2.3.1, dass für jedes $r \in [1,\infty[$

$$u_{k'}, v_{k'} \to u \quad \text{in } \mathrm{L}^r(0,T;H) \quad \text{für } k' \to \infty. \tag{2.4.7}$$

Die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt. Folglich ist die Folge $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ beschränkt. Des Weiteren ist der Raum $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ reflexiv (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]). Also existiert gemäß Theorem A.1.1 ein $w \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ und eine Teilfolge $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$ von $(k')_{k''\in\mathbb{N}}$, so dass

$$v_{k''}' \rightharpoonup w \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V^*) \quad \text{für } k'' \to \infty.$$

Aus den Konvergenzresultat (2.4.5) folgt für alle $v \in V$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle w(t), v\rangle \varphi(t)\,dt &= \lim_{k''\to\infty} \int_0^T \langle v_{k''}'(t), v\rangle \varphi(t)\,dt \\ &= -\lim_{k''\to\infty} \int_0^T \langle v_{k''}(t), v\rangle \varphi'(t)\,dt = -\int_0^T \langle u(t), v\rangle \varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Demzufolge ist w gemäß Theorem 1.1.1 die verallgemeinerte Ableitung von u. Also ist $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ und

$$v_{k''}' \rightharpoonup u' \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V^*) \quad \text{für } k'' \to \infty. \tag{2.4.8}$$

Im Folgenden wird nachgewiesen, dass u eine Lösung des Problems 1.2.3 ist. Die zur Interpolation von (2.2.1) und (2.2.2) verwendeten Stützstellen $(t_n, u_k^n)_{n=1}^{N_k}$ wurden mit dem diskreten Ersatzproblem 2.4.1 bestimmt. Daher ergibt sich für jedes $v_{m_k} \in V_{m_k}$ die Gleichung

$$(v_k'(t), v_{m_k}) + \langle \mathrm{A}u_k(t) + \mathrm{B}u_k(t), v_{m_k}\rangle = \langle f_k(t), v_{m_k}\rangle. \tag{2.4.9}$$

[10] Der angegebene Beweis für Theorem 2.4.1 orientiert sich an den Beweisen in Emmrich und Šiška [15, Theorem 3.3] und in Emmrich [19, Theorem 5].

Es sollte beachtet werden, dass diese Gleichung nicht global erfüllt ist, sondern punktweise für alle $t \in \left]t_{n-1}, t_n\right[$ und $n = 1, ..., N_k$ zu verstehen ist.

Gemäß Theorem A.2.2 und A.2.3 kann zu den Operator A ein monotoner, hemistetiger, beschränkter, koerzitiver Operator $\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;V) \to \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ und zu den Operator B ein beschränkter Operator $\mathcal{B} : \mathrm{L}^p(0,T;V) \to \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ konstruiert werden. Der Operator $\mathcal{B}$ ist, eingeschränkt auf den Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$, verstärkt stetig. Ferner gilt für alle $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ sowie $t \in \left]0,T\right[$

$$(\mathcal{A}v)(t) = \mathrm{A}(v(t)) \text{ und } (\mathcal{B}v)(t) = \mathrm{B}(v(t)).$$

Da der Operator $\mathcal{A}$ beschränkt ist, folgt aus dem Konvergenzresultat (2.4.6), dass die Folge $(\mathcal{A}u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ beschränkt ist. Ferner ist der Raum $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ reflexiv (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]). Also existiert gemäß Theorem A.1.1 ein $a \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ und eine Teilfolge $(k''')_{k'''\in\mathbb{N}}$ von $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathcal{A}u_{k'''} \rightharpoonup a \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V^*) \quad \text{für } k''' \to \infty. \tag{2.4.10}$$

Ferner folgt aus der Hölder-Ungleichung und den Eigenschaften (1.2.2) von B

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}u_{k'''} - \mathcal{B}u\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)} \\ \leq\ & c^q_{\mathcal{H}} \int_0^T \max\left(\|u_{k'''}(t)\|, \|u(t)\|\right)^{q(p-1-\delta)} |u_{k'''} - u|^{\frac{\delta}{p-1}}\, dt \\ \leq\ & c^q_{\mathcal{H}} \left(\int_0^T \max\left(\|u_{k'''}(t)\|, \|u(t)\|\right)^p dt\right)^{1-\frac{\delta}{p-1}} \|u_{k'''} - u\|^{\frac{\delta}{p-1}}_{\mathrm{L}^1(0,T;H)} = 0. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich aus den Konvergenzresultat (2.4.7)

$$\mathcal{B}u_{k'''} \to \mathcal{B}u \quad \text{in } \mathrm{L}^q(0,T;V^*) \quad \text{für } k''' \to \infty. \tag{2.4.11}$$

Nun wird nachgewiesen, dass die Identität $a = f - u' - \mathcal{B}u$ gilt. Dazu sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine beliebige, fest gewählte natürliche Zahl. Da die Räume $(V_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ geschachtelt liegen, ergibt sich aus der Relation (2.4.9) für jedes $k''' \geq \ell$ und für alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\left]0,T\right[)$ sowie $v_{m_\ell} \in V_{m_\ell}$ die Identität

$$\int_0^T \langle f_{k'''}(t) - \mathrm{A}u_{k'''}(t) - \mathrm{B}u_{k'''}(t), v_{m_\ell}\rangle\, \varphi(t)\, dt = \int_0^T \langle v'_{k'''}(t), v_{m_\ell}\rangle\, \varphi(t)\, dt.$$

Gemäß Lemma 2.2.1 (ii) konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ stark gegen f. Insofern folgt aus der obigen Identität und den Konvergenzresultaten (2.4.8), (2.4.10) sowie (2.4.11) für alle $v_{m_\ell} \in V_{m_\ell}$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle f(t) - a(t) - \mathrm{B}u(t), v_{m_\ell}\rangle \varphi(t)\, dt \\
=\ &\lim_{k'''\to\infty} \int_0^T \langle f_{k'''}(t) - \mathrm{A}u_{k'''}(t) - \mathrm{B}u_{k'''}(t), v_{m_\ell}\rangle \varphi(t)\, dt \\
&\lim_{k'''\to\infty} \int_0^T \langle v'_{k'''}(t), v_{m_\ell}\rangle \varphi(t)\, dt = \int_0^T \langle u'(t), v_{m_\ell}\rangle \varphi(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus der limitierten Vollständigkeit des Galerkin-Schemas für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ und $v \in V$

$$\int_0^T \langle f(t) - a(t) - \mathrm{B}u(t), v\rangle \varphi(t)\, dt = \int_0^T \langle u'(t), v\rangle \varphi(t)\, dt.$$

Also ist $u' = f - a - \mathcal{B}u$. Des Weiteren ergibt sich wie im Beweis von Theorem 2.2.1 aus der Regel partieller Integration für den Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ die Identität $u(0) = u_0$.

Da die Folge $(\mathcal{B}u_{k'''})_{k'''\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ stark gegen $\mathcal{B}u$ konvergiert und $(u_{k'''})_{k'''\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach gegen u konvergiert folgt aus Lemma A.1.1 (i)

$$\lim_{k'''\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{B}u_{k'''}(t), u_{k'''}(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle \mathrm{B}u(t), u(t)\rangle\, dt. \tag{2.4.12}$$

Wie im Beweis von Theorem 2.2.1 ergeben sich die Abschätzung (2.2.21) und die Gleichung (2.2.22). Daher folgt aus (2.2.21), (2.2.22), (2.4.9), (2.4.12) und der Identität $a = f - u' - \mathcal{B}u$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle a(t), u(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle f(t) - u'(t) - \mathrm{B}u(t), u(t)\rangle\, dt \\
\geq\ &\int_0^T \langle f(t) - \mathrm{B}u(t), u(t)\rangle\, dt - \liminf_{k'''\to\infty} \int_0^T \langle v'_{k'''}(t), u_{k'''}(t)\rangle\, dt \\
=\ &\limsup_{k'''\to\infty} \int_0^T \langle f_{k'''}(t) - \mathrm{B}u_{k'''}(t), u(t)\rangle\, dt + \limsup_{k'''\to\infty} - \int_0^T \langle v'_{k'''}(t), u_{k'''}(t)\rangle\, dt \\
\geq\ &\limsup_{k'''\to\infty} \int_0^T \langle f_{k'''}(t) - \mathrm{B}u_{k'''}(t) - v'_{k'''}(t), u(t)\rangle\, dt \\
=\ &\limsup_{k'''\to\infty} \int_0^T \langle \mathrm{A}u_{k'''}, u_{k'''}(t)\rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Nun kann wie im Beweis von Theorem 2.2.1 mit dem Monotonie-Trick von Minty die Identität $\mathcal{A}u = a$ nachgewiesen werden.

Folglich besitzen die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach*, in $\mathrm{L}^p(0,T;V)$ schwach und in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ für jedes $r\in[1,\infty[$ stark gegen eine Lösung $u\in\mathcal{W}^p(0,T)$ von Problem 1.2.3 konvergiert. Des Weiteren existiert eine Teilfolge von $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$, die in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ schwach gegen die verallgemeinerte Ableitung u' der Lösung u von Problem 1.2.3 konvergiert. $\square$

3. Diskretisierung mit dem impliziten Euler-Verfahren und äußerer Approximation

In diesem Kapitel sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier, $p \in [2, \infty[$ ein Parameter mit Konjugierten $q = \frac{p}{p-1}$ und $T \in]0, \infty[$ ein beliebiger Wert. Mit $\mathrm{A} : V \to V^*$ wird ein hemistetiger, monotoner Operator, welcher der $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1) genügt, bezeichnet.

Wie in Kapitel 2 wird mittels einer vollen Diskretisierung ein Näherungsverfahren für ein abstraktes Anfangswertproblem vom Typus 1.2.1 konstruiert. In diesem Kapitel wird die folgende Variante des abstrakten Anfangswertproblems 1.2.1 betrachtet.

Problem 3.0.2. Zu einem gegebenen $u_0 \in H$ und $f \in \mathrm{L}^q(0, T; H)$ wird ein $u \in \mathcal{W}^p(0, T)$ mit $u(0) = u_0$ gesucht, so dass für alle $v \in V$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \langle \mathrm{A}u(t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle$$

im verallgemeinerten Sinne auf $]0, T[$ gilt.

Im Unterschied zu Problem 1.2.1 sollte die rechte Seite aus Problem 3.0.1 in $\mathrm{L}^q(0, T; H)$ enthalten sein. Diese Wahl der rechten Seite wird in Abschnitt 3.2 mit der Formulierung eines diskreten Ersatzproblems für Problem 3.0.1 ersichtlich.

Der reelle Hilbert-Raum H ist stetig in den topologischen Dualraum V^* des reellen Banach-Raums V eingebettet. Also ist $\mathrm{L}^q(0, T; H) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(0, T; V^*)$ (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (h)]). Folglich besitzt das Problem 3.0.1, gemäß Theorem 1.2.1, genau eine Lösung.

Die Konstruktion des Näherungsverfahren erfolgt im wesentlichen wie in Kapitel 2. Es wird für Problem 3.0.1 ein diskretes Ersatzproblem formuliert und die Lösbarkeit des Ersatzproblems nachgewiesen. Anschließend werden A-priori-Abschätzungen formuliert. Worauf aus den Lösungen des Ersatzproblems Folgen konstruiert werden. Schließlich wird unter Zuhilfenahme der A-priori-Abschätzungen und funktionalanalytischer Kompaktheitsargumenten die schwache Konvergenz der konstruierten Folgen gegen die Lösung von Problem 3.0.1 nachgewiesen. Für die Formulierung eines diskreten Ersatzproblems wird im Unterschied zu Kapitel 2 ein äußeres Approximationsschema verwendet.

Das in diesem Kapitel vorgestellte Näherungsverfahren soll auf quasilineare, parabolische Differentialgleichungen angewendet werden. Daher wird das Verfahren an einem eindimensionalen, instationären p-Laplace-Gleichungsproblem mit Dirichlet-Randbedingungen getestet.

Die in diesem Kapitel verwendeten Techniken orientieren sich an einer Arbeit von Emmrich [14] zur äußeren Approximation nichtlinearer stationärer Operatorgleichungen. In Temam [36, Kapitel 3, Abschnitt 5] ist eine volle Diskretisierung für die Navier-Stokes Gleichungen mit äußerer Approximation zu finden. Das äußere Approximationsschema, welches Temam für die Navier-Stokes Gleichungen konstruiert, motiviert das äußere Approximationsschema, das in diesem Kapitel zur Diskretisierung des reellen Banach-Raums V verwendet wird.

3.1. Äußere Approximation eines reellen, normierten Raums

Im Folgenden sei $\mathcal{H}$ eine Indexmenge. Es seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ reelle, normierte Räume. Des Weiteren sei $\varpi : V \to F$ eine injektive, lineare und beschränkte Abbildung. Diese Abbildung wird als Synchronisationsoperator bezeichnet.

Definition 3.1.1. Eine Familie $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}\,; (F, \varpi)\right)$ heißt äußeres Approximationsschema für V, wenn $\left(V_h, \|\cdot\|_{V_h}\right)$ ein reeller normierter Raum, $p_h : V_h \to F$ ein linearer, beschränkter Prolongations- und $r_h : V \to V_h$ ein Restriktionsoperator für jedes $h \in \mathcal{H}$ sind.

Ein äußeres Approximationsschema für einen reellen normierten Raum V kann für jedes $h \in \mathcal{H}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{tikzcd} F & & V \arrow[ll, "\varpi"'] \arrow[dl, "r_h"] \\ & V_h \arrow[ul, "p_h"] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 3.1.1. Sei $\varpi : V \to V$ die Identitätsabbildung und $F = V$. Dann ist $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}\,; (V, \varpi)\right)$ ein inneres Approximationsschema für V. Ein inneres Approximationsschema wird mit $\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ bezeichnet.

In Anwendungen werden Bedingungen benötig, die das Konvergenzverhalten eines Approximationsschemas beschreiben. Diese Bedingungen werden als Kompatibilitäts- und Synchronisationsbedingung bezeichnet.

Kompatibilitätsbedingung: Für alle $v \in V$ gilt

$$p_h r_h v \to \varpi(v) \quad \text{in } F \quad \text{für } \mathcal{H} \ni h \to 0.$$

Synchronisationsbedingung: Für alle $h \in \mathcal{H}$ sei $v_h \in V_h$. Es gebe ein $\phi \in F$ und eine Teilmenge $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$, so dass

$$p_{h'} v_{h'} \rightharpoonup \phi \quad \text{in } F \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0.$$

Dann existiert ein $v \in V$ mit $\phi = \varpi(v)$.

Wenn der Synchronisationsoperator bijektiv ist, ist die Synchronisationsbedingung für ein äußeres Approximationsschema immer erfüllt.

Definition 3.1.2. Ein äußeres Approximationsschema $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ für einen reellen, normierten Raum V heißt stabil, wenn die Bedingung

$$\sup_{h\in\mathcal{H}} \|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h,F)} < \infty \tag{3.1.1}$$

erfüllt ist. Es heißt zulässig, wenn die Kompatibilitäts- und Synchronisationsbedingung gelten.

Damit ein stabiles, äußeres Approximationsverfahren für einen normierten Raum zulässig ist, genügt es, dass die Synchronisationsbedingung erfüllt ist, der Restriktionsoperator auf einer dichten Teilmenge des normierten Raums definiert ist und die Kompatibilitätsbedingung für alle Elemente aus der dichten Teilmenge gilt.

Lemma 3.1.1. *Sei $\mathcal{D} \subseteq V$ eine dichte Teilmenge von V. Der Restriktionsoperator r_h sei nur auf der Menge $\mathcal{D}$ definiert. Es seien die Bedingung* (3.1.1) *und die Synchronisationsbedingung erfüllt. Die Kompatibilitätsbedingung gelte für alle Elemente aus $\mathcal{D}$. Dann kann der Restriktionsoperator auf den Raum V fortgesetzt werden und $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ ist ein stabiles, zulässiges, äußeres Approximationsschema für den reellen, normierten Raum V.*

Ein Beweis für Lemma 3.1.1 ist in Temam [36, Kapitel 1, Proposition 3.1] oder [37, Kapitel 3, Proposition 4] zu finden.

Typische Beispiele für eine innere Approximation eines reellen, normierten Raums ist ein Galerkin-Schema oder eine Finite-Elemente-Methode für einen reellen Funktionenraum (vergleiche Temam [37, Kapitel 10]). Eine Finite-Differenzen-Methode für einen reellen Funktionenraum ist ein Beispiele für eine äußere Approximation eines reellen, normierten Raums (vergleiche Temam [37, Kapitel 8, 9] oder Zeidler [42, Kapitel 35]).

Im Folgenden wird mit einem Galerkin-Schema ein Beispiel für ein inneres Approximationsschema für einen reellen, separablen Banach-Raum angegeben. Anschließend wird mit einer Finite-Differenzen-Methode für den Sobolev-Raum $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ ein Beispiel für ein äußeres Approximationsschema angegeben. Das Beispiel mit dem Galerkin-Schema ist auch in Temam [36, Kapitel 1] oder [37, Kapitel 3] zu finden.

Beispiel 3.1.1. (Galerkin-Schema): Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller, separabler Banach-Raum. Dann existiert gemäß Abschnitt 2.1 ein Galerkin-Schema $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in V. Die Räume $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sind endlich dimensional und liegen ineinander geschachtelt. Des Weiteren liegt die Menge $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m$ in V dicht und durch $\|v\|_{V_m} = \|v\|$, für alle $v \in V_m$, ist eine Norm auf V_m gegeben.

Sei $m_0 \in \mathbb{N}$ ein beliebiger, fest gewählter Wert. Da die Räume $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ geschachtelt liegen, kann für jedes $v \in V_{m_0} \setminus V_{m_0-1}$ mit

$$r_m(v) = \begin{cases} v, & \text{für } m \geq m_0 \\ 0, & \text{für } m < m_0 \end{cases}$$

ein Restriktionsoperator angegeben werden. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ bildet der Restriktionsoperator r_m die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ auf V_m ab. Ein Prolongationsoperator kann für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} p_m : V_m &\to V \\ v &\mapsto p_m v = v \end{aligned}$$

angegeben werden. Dieser Prolongationsoperator ist linear und beschränkt. Ferner gilt

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|p_m\|_{\mathcal{L}(V_m,V)} = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{v\in V_m\setminus\{0\}} \frac{\|p_m v\|}{\|v\|} = 1$$

und für alle $v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$

$$\lim_{m\to\infty} \|p_m r_m v - v\| = 0.$$

Folglich sind die Bedingung (3.1.1) und die Kompatibilitätsbedingung für eine dichte Teilmenge von V erfüllt. Ein Synchronisationsoperator kann durch die Identitätsabbildung angegeben werden. Also ist die Synchronisationsbedingung erfüllt. Demgemäß ist $\{V_m, p_m, r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ gemäß Lemma 3.1.1 ein stabiles, zulässiges, inneres Approximationsschema für V.

Das nachfolgende Beispiel orientiert sich an einem von Temam konstruierten äußeren Approximationsschema für den Sobolev-Raum $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet ist (vergleiche Temam [37, Kapitel 9, Abschnitt 3]).

Beispiel 3.1.2. Sei $V = \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ und $F = \mathrm{L}^p(0,1) \times \mathrm{L}^p(0,1)$. Durch

$$\|v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)} = \|\mathrm{D}_x v\|_{\mathrm{L}^p(0,1)}\,, \text{ für alle } v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)\,,$$

ist eine Norm auf V gegeben (vergleiche Brézis [10, Kapitel VIII, Proposition VIII.12]). Der Raum F kann mit der Norm

$$\|v\|_F = \|v_1\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} + \|v_2\|_{\mathrm{L}^p(0,1)}\,, \text{ für alle } v = (v_1, v_2) \in F,$$

versehen werden. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varpi : V &\to F \\ v &\mapsto \varpi(v) = (v, v') \end{aligned}$$

ist linear und injektiv. Ferner folgt aus der Poincaré-Friedrich-Ungleichung (vergleiche Brézis [10, Kapitel VIII, Proposition VIII.12]) für alle $v \in V$

$$\|\varpi(v)\|_F = \|v\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} + \|\mathrm{D}_x v\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} \leq 2\,\|v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)}\,.$$

Folglich ist die Abbildung ϖ linear, beschränkt und injektiv. Insofern kann ϖ als Synchronisationsoperator verwendet werden.

Des Weiteren sei $\mathcal{H} := \left\{h \mid h = \frac{1}{M}, \text{ für ein } M \in \mathbb{N}\right\}$. Zu jedem $h \in \mathcal{H}$ kann eine äquidistante Zerlegung

$$\mathbb{I}_h : \begin{cases} h = \frac{1}{M}, & \text{für ein } M \in \mathbb{N}, \\ x_i = ih, & \text{für jedes } i = 0, ..., M \end{cases}$$

für das Intervall $[0,1]$ angegeben werden.

Mit V_h wird für jedes $h \in \mathcal{H}$ der Raum aller stückweise konstanten Gitterfunktionen

$$x \mapsto v_h(x) := \begin{cases} v_h(x_i)\,, & \text{für } x \in \left]x_{i-1}, x_i\right] \text{ und } i = 1, ..., M-1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bezeichnet. Für jedes beliebige, fest gewählte $h \in \mathcal{H}$ existieren endlich viele charakteristische Funktionen $\chi_{]x_0,x_1]}, ..., \chi_{]x_{m-2},x_{m-1}]}$, die eine Basis von V_h bilden. Folglich ist V_h für alle $h \in \mathcal{H}$ endlichdimensional. Ferner ist $V_h \subseteq \mathrm{L}^1(0,1)$ für alle $h \in \mathcal{H}$. Des Weiteren sei für jedes $h \in \mathcal{H}$ und für alle $v_h \in V_h$

$$x \mapsto \nabla_{x,h}^- v_h(x) := \begin{cases} \frac{v_h(x_i) - v_h(x_{i-1})}{h}, & \text{für } x \in \left]x_{i-1}, x_i\right] \text{ und } i = 1, ..., M-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist für jedes $h \in \mathcal{H}$ durch

$$\|v_h\|_{V_h} = \left\|\nabla_{x,h}^- v_h\right\|_{\mathrm{L}^p(0,1)}\,, \text{ für alle } v_h \in V_h,$$

eine Norm auf V_h gegeben (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 35, Proposition 35.9]). Des Weiteren existiert eine von $h \in \mathcal{H}$ unabhängige Konstante $c > 0$, so dass für alle $v_h \in V_h$ gilt

$$\|v_h\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} \leq c \left\|\nabla_{x,h}^{-} v_h\right\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} = c \|v_h\|_{V_h}. \tag{3.1.2}$$

Diese Abschätzung kann wie die diskrete Poincaré-Friedrich-Ungleichung in Temam [36, Kapitel 1, Abschnitt 3, Proposition 3.3] nachgewiesen werden.

Für alle $h \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung

$$V_h \ni v_h \mapsto p_h v_h := \left(v_h, \nabla_{x,h}^{-} v_h\right)$$

linear. Offensichtlich ist $p_h v_h \in F$, für alle $v_h \in V_h$. Ferner ergibt sich aus der diskreten Poincaré-Friedrich-Ungleichung (3.1.2) für alle $v_h \in V_h$ die Abschätzung

$$\|p_h v_h(x)\|_F = \|v_h\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} + \left\|\nabla_{x,h}^{-} v_h\right\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} \leq (1+c) \|v_h\|_{V_h}. \tag{3.1.3}$$

Dementsprechend ist für jedes $h \in \mathcal{H}$ die lineare, beschränkte Abbildung p_h ein Prolongationsoperator.

Für alle $h \in \mathcal{H}$ sei eine Abbildung

$$\mathcal{C}_0^{\infty}(]0,1[) \ni v \quad \mapsto \quad (r_h v)(x) := \begin{cases} v(x_i), & \text{für } x \in]x_{i-1}, x_i] \text{ und } i = 1, ..., M-1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Aus der Definition der Abbildung r_h ergibt sich, dass $r_h v \in V_h$ für jedes $v \in \mathcal{C}_0^{\infty}(]0,1[)$ ist. Also ist r_h für jedes $h \in \mathcal{H}$ ein Restriktionsoperator eingeschränkt auf den Raum $\mathcal{C}_0^{\infty}(]0,1[)$.

Aus der Abschätzung (3.1.3) folgt, dass $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in \mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ ein stabiles, äußeres Approximationsschema für $V = \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ ist. Die Kompatibilitäts- und Synchronisationsbedingung für das Schema $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in \mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ ergeben sich aus dem nachfolgenden Lemma. In Temam [36, Kapitel 1, Abschnitt 3, Lemma 3.1 und Lemma 3.2] ist die Aussage des Lemmas für $p = 2$ und Teilmengen mehrdimensionaler Räume nachgewiesen.

Lemma 3.1.2. *Für jedes $h \in \mathcal{H}$ seien $\varpi : V \to F$, $p_h : V_h \to F$ und $r_h : V \to V_h$ der Synchronisations, Prolongations- und Restriktionsoperator aus Beispiel 3.1.2. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für alle $v \in \mathcal{C}_0^{\infty}(]0,1[)$ gilt*

$$p_h r_h \to \varpi(v) \quad \text{in } F \quad \text{für } \mathcal{H} \ni h \to 0.$$

(ii) *Die Synchronisationsbedingung ist erfüllt.*

Beweis. Zu (i): Sei $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ eine beliebige, fest gewählte Funktion und $h \in \mathcal{H}$ hinreichend klein, so dass

$$\operatorname{supp}(v) \subseteq]x_0, x_{M-1}[\,.$$

Auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ sind die Funktionen v und $\mathrm{D}_x v$ gleichmäßig stetig. Daher kann zu einem $\varepsilon(h) > 0$ mit $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ ein $\delta > h > 0$ bestimmt werden, so dass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| \leq h < \delta$ gilt

$$|v(x) - v(y)|_{\mathbb{R}} < \varepsilon(h)$$

und

$$|\mathrm{D}_x v(x) - \mathrm{D}_x v(y)|_{\mathbb{R}} < \varepsilon(h)\,.$$

Folglich ergibt sich für jedes $x \in]x_{i-1}, x_i]$ und $i = 1, ..., M-1$ die Abschätzung

$$|(r_h v)(x) - v(x)|_{\mathbb{R}} = |v(x_i) - v(x)|_{\mathbb{R}} < \varepsilon(h)\,.$$

Für alle $x \in [0,1] \setminus]x_0, x_{M-1}]$ ist $v(x) = (r_h v)(x) = 0$, weil v einen kompakten Träger in $]x_0, x_{M-1}[$ hat. Daher folgt für alle $x \in [0,1]$

$$|(r_h v)(x) - v(x)|_{\mathbb{R}} < \varepsilon(h)\,. \tag{3.1.4}$$

Ebenso folgt aus der Taylorformel (vergleiche Amann und Escher [1, Kapitel IV, Abschnitt 3, 3.2 Theorem]) für jedes $x \in]x_{i-1}, x_i]$ und $i = 1, ..., M-1$

$$\begin{aligned} &\left|\left(\nabla_{x,h}^- r_h v\right)(x) - \mathrm{D}_x v(x)\right|_{\mathbb{R}} = \left|\frac{v(x_i) - v(x_{i-1})}{h} - \mathrm{D}_x v(x)\right|_{\mathbb{R}} \\ \leq\ & |\mathrm{D}_x v(x_i) - \mathrm{D}_x v(x)|_{\mathbb{R}} + \frac{h}{2}\sup_{\xi\in[0,1]}\left|\mathrm{D}_x^2 v(\xi)\right|_{\mathbb{R}} < \varepsilon(h) + \frac{h}{2}\sup_{\xi\in[0,1]}\left|\mathrm{D}_x^2 v(\xi)\right|_{\mathbb{R}}\,. \end{aligned}$$

Da v einen kompakten Träger in $]x_0, x_{M-1}[$ hat, gilt $\mathrm{D}_x v(x) = \left(\nabla_{x,h}^- r_h v\right)(x) = 0$ für alle $x \in [0,1] \setminus [x_1, x_{M-1}[$. Insofern ergibt sich für alle $x \in [0,1]$ die Abschätzung

$$\left|\left(\nabla_{x,h}^- r_h v\right)(x) - \mathrm{D}_x v(x)\right|_{\mathbb{R}} < \varepsilon(h) + \frac{h}{2}\sup_{\xi\in[0,1]}\left|\mathrm{D}_x^2 v(\xi)\right|_{\mathbb{R}}\,. \tag{3.1.5}$$

Aus (3.1.4) und (3.1.5) folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\|p_h r_h v - \varpi(v)\|_F \\ =\ &\lim_{h\to 0}\|r_h v - v\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} + \left\|\nabla_{x,h}^- r_h v - \mathrm{D}_x v\right\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} \\ \leq\ &\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) + \varepsilon(h) + \frac{h}{2}\sup_{\xi\in[0,1]}\left|\mathrm{D}_x^2 v(\xi)\right|_{\mathbb{R}} = 0. \end{aligned}$$

Zu (ii): Für alle $h \in \mathcal{H}$ sei $v_h \in V_h$. Es gebe ein $\phi \in F$ und eine Teilmenge $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$, so dass

$$p_{h'} v_{h'} \rightharpoonup \phi \quad \text{in } F \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0. \tag{3.1.6}$$

Dann existieren $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{L}^p(0,1)$ mit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, so dass aus (3.1.6) folgt

$$v_{h'} \rightharpoonup \phi_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,1) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0 \tag{3.1.7}$$

sowie

$$\nabla^-_{x,h'} v_{h'} \rightharpoonup \phi_2 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,1) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0. \tag{3.1.8}$$

Die Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 können mit

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{\phi}_1(x) := \begin{cases} \phi_1(x), & \text{für alle } x \in]0,1[, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{\phi}_2(x) := \begin{cases} \phi_2(x), & \text{für alle } x \in]0,1[, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Dann sind $\widetilde{\phi}_1$ und $\widetilde{\phi}_2$ in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ enthalten. Ferner sind $v_h(x) = 0$ und $\nabla^-_{x,h} v_h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$ sowie $h \in \mathcal{H}$. Also ergeben sich aus (3.1.7) und (3.1.8) die Konvergenzresultate

$$v_{h'} \rightharpoonup \widetilde{\phi}_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0 \tag{3.1.9}$$

sowie

$$\nabla^-_{x,h'} v_{h'} \rightharpoonup \widetilde{\phi}_2 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0. \tag{3.1.10}$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ und $x \in \operatorname{supp}(\varphi)$ gilt

$$\lim_{h' \to 0} \left| \frac{\varphi(x+h') - \varphi(x)}{h'} - \mathrm{D}_x \varphi(x) \right|_{\mathbb{R}} = 0$$

und für jedes $h' \in \mathcal{H}'$ ergibt sich aus dem Mittelwertsatz (vergleiche Amann und Escher [1, Kapitel IV, Abschnitt 2, 2.4 Theorem]) die Abschätzung

$$\left| \frac{\varphi(x+h') - \varphi(x)}{h'} - \mathrm{D}_x \varphi(x) \right|_{\mathbb{R}} \leq 2 \sup_{x \in \operatorname{supp}(\varphi)} |\mathrm{D}_x \varphi(x)|_{\mathbb{R}}.$$

Daher folgt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz von Lebesgue (vergleiche Amann und Escher [3, Kapitel X, Abschnitt 3, 3.12 Theorem]

$$\lim_{h' \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\varphi(x+h') - \varphi(x)}{h'} - \mathrm{D}_x \varphi(x) \right|^q dx = 0. \tag{3.1.11}$$

Damit ergibt sich aus den Konvergenzresultaten (3.1.9), (3.1.10) sowie (3.1.11) und Lemma A.1.1 (i) für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}_1(x)\, \mathrm{D}_x\varphi(x)\, dx &= \lim_{h'\to 0} \int_{\mathbb{R}} v_{h'}(x) \frac{\varphi(x+h') - \varphi(x)}{h'} dx \\
&= - \lim_{h'\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{v_{h'}(x) - v_{h'}(x-h')}{h'} \varphi(x)\, dx \\
&= - \lim_{h'\to 0} \int_{\mathbb{R}} \nabla^-_{x,h'} v_{h'}(x)\, \varphi(x)\, dx \\
&= - \int_0^1 \widetilde{\phi}_2(x)\, \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{\phi}_1 \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{D}_x\widetilde{\phi}_1 = \widetilde{\phi}_2$. Ferner gilt $\widetilde{\phi}_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$. Folglich ist $\mathrm{D}_x\widetilde{\phi}_1 \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ und für alle $x = (x_1, x_2) \in]0,1[\times]0,1[$ gilt

$$\varpi\left(\widetilde{\phi}_1\right)(x) = \left(\widetilde{\phi}_1(x_1), \widetilde{\phi}_2(x_2)\right) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1)) = \phi(x).$$

□

Der Raum $\mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ (vergleiche Brézis [10, Kapitel VIII, Bemerkung 14 (i)]). Dementsprechend ist $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ gemäß Lemma 3.1.1 und Lemma 3.1.2, ein stabiles, zulässiges, äußeres Approximationsschema für $V = \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$.

3.2. Das diskrete Ersatzproblem

Die Formulierung eines diskreten Ersatzproblems für Problem 3.0.1 erfolgt mittels einer vollen Diskretisierung.

Im Folgenden bezeichne

$$\mathbb{I}_N : \begin{cases} \tau_N = \frac{T}{N}, & \text{für ein } N \in \mathbb{N}, \\ t_n = n\tau_N, & \text{für jedes } n = 0, ..., N \end{cases}$$

eine äqudistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0,T]$.

Es wird davon ausgegangen, dass für den reellen, separablen, reflexiven Banach-Raum V ein stabiles, zulässiges, äußeres Approximationsschema existiert. Dieses Approximationsschema wird mit $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ bezeichnet. Dabei seien $(F, \|\cdot\|_F)$ ein reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum, $\mathcal{H}$ eine abzählbar unendliche Indexmenge und $V_h \subseteq H$ für jedes $h \in \mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Unterraum von H. Für jedes $h \in \mathcal{H}$ sei $\left(V_h, \|\cdot\|_{V_h}\right)$ ein reeller Banach-Raum. Ferner seien für jedes $h \in \mathcal{H}$ ein Synchronisationsoperator $\varpi : V \to F$, ein Prolongationsoperator $p_h : V_h \to V$ und ein Restriktionsoperator $r_h : V \to V_h$ gegeben.

Es wird vorausgesetzt, dass eine von $h \in \mathcal{H}$ unabhängige Konstante $\gamma > 0$ existiert, so dass für alle $v_h \in V_h$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt

$$|v_h| \leq \gamma \left\| v_h \right\|_{V_h}. \tag{3.2.1}$$

Jeder endlichdimensionale Raum ist abgeschlossen. Also ist $(V_h, |\cdot|, (\cdot,\cdot))$ für jedes $h \in \mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Da V_h für jedes $h \in \mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Unterraum von H ist, sind die Normen $\|\cdot\|_h$ und $|\cdot|$ in V_h äquivalent. Daher existiert eine Konstante $S(h) > 0$, so dass für alle $v_h \in V_h$ gilt

$$\left\| v_h \right\|_{V_h} \leq S(h) \, |v_h|$$

Die Konstante $S(h)$ wird als Stabilitätskonstante bezeichnet. Im Allgemeinen gilt

$$S(h) \to \infty \quad \text{für } h \to 0.$$

Des Weiteren wird eine Approximation an den Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$ benötig. Die Approximation an den Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$ erfolgt durch eine Familie $(a_h)_{h \in \mathcal{H}}$ von Abbildungen

$$a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}.$$

Für jedes $h \in \mathcal{H}$ besitze eine Abbildung $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften:

(a.1) Linearität im zweiten Argument: Für jedes beliebige, fest gewählte $v_h \in V_h$ ist $a_h(v_h, \cdot)$ linear.

(a.2) Diskrete $(p-1)$-Wachstumsbedingung: Für alle $v_h, w_h \in V_h$ gilt

$$\left| a_h(v_h, w_h) \right|_{\mathbb{R}} \leq c_0 \left(\left\| v_h \right\|_{V_h}^{p-1} + 1 \right) \left\| w_h \right\|_{V_h}, \tag{3.2.2}$$

wobei $c_0 > 0$ eine Konstante ist.

(a.3) Diskrete p-Koerzitivitätsbedingung: Für alle $v_h \in V_h$ gilt

$$a_h(v_h, v_h) \geq \mu_0 \left\| v_h \right\|_{V_h}^{p} - \lambda_0, \tag{3.2.3}$$

wobei $\mu_0 > 0$ und $\lambda_0 \geq 0$ Konstanten sind.

(a.4) Diskrete Monotoniebedingung: Für alle $v_h, w_h \in V_h$ gilt

$$a_h(v_h, v_h - w_h) - a_h(w_h, v_h - w_h) \geq 0. \tag{3.2.4}$$

(a.5) Diskrete Hemistetigkeit: Für alle $u_h, v_h, w_h \in V_h$ ist die Abbildung

$$[0,1] \ni \xi \mapsto a_h\left(u_h + \xi v_h, w_h\right)$$

stetig.

Bemerkung 3.2.1. Für jedes $h \in \mathcal{H}$ folgt aus den Eigenschaften (a.1) und (a.2) einer Abbildung $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$, dass $a_h\left(v_h, \cdot\right) \in V_h^*$ ist, wobei v_h ein beliebiges, fest gewähltes Element aus V_h ist. Folglich kann zu jedem $h \in \mathcal{H}$ und einer Abbildung $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ ein Operator

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_h : V_h &\to V_h^* \\ v_h &\mapsto \langle \mathrm{A}_h v_h, \cdot \rangle_{V_h^* \times V_h} = a_h\left(v_h, \cdot\right) \end{aligned}$$

konstruiert werden. Für jedes $h \in \mathcal{H}$ folgt aus den Eigenschaften (a.4) und (a.5) einer Abbildung a_h, dass der konstruierte Operator A_h hemistetig und monoton ist. Ferner ergibt sich aus den Eigenschaften (a.2) und (a.3) einer Abbildung a_h, dass A_h einer $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung genügt.

Es werden Näherungswerte $\left(u_h^n\right)_{n=1}^N \subseteq V_h$ mit $u_h^n \approx u\left(t_n\right)$ für jedes $n = 1, ..., N$ gesucht, wobei $u \in \mathcal{W}^p\left(0, T\right)$ die Lösung von Problem 3.0.1 ist. Diese Näherungswerte werden mit dem folgenden diskreten Ersatzproblem für Problem 3.0.1 bestimmt.

Problem 3.2.1. Zu einem gegebenen Startwert $u_h^0 \in V_h$ und einer Approximation $\left(f^n\right)_{n=1}^N \subseteq H$ an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q\left(0, T; H\right)$, aus Problem 3.0.1, werden Werte $\left(u_h^n\right)_{n=1}^N \subseteq V_h$ gesucht, so dass für alle $v_h \in V_h$ und $n = 1, ..., N$ gilt

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_N}, v_h\right) + a_h\left(u_h^n, v_h\right) = \left(f^n, v_h\right).$$

Damit das diskrete Ersatzproblem 3.2.1 mit Werten aus V_h getestet werden kann, ist es erforderlich, dass f^n für jedes $n = 1, ..., N$ ein Element aus V_h^* ist. Da ein Funktional aus V^* im Allgemeinen nicht in V_h^* enthalten ist, ist eine Approximation $\left(f^n\right)_{n=1}^N$ aus V^* an die rechte Seite f unzulässig. Ein Funktional aus H^* ist eingeschränkt auf V_h ein Funktional aus V_h^*. Ferner folgt aus dem Darstellungssatz von Riesz (vergleiche Brézis [10, Kapitel V, Theorem V.5] oder Werner [38, Kapitel V, Theorem V.3.6]), dass $H^* \cong H$. Demzufolge ist eine Approximation $\left(f^n\right)_{n=1}^N$ aus H an die rechte Seite f zulässig. Daher wird die rechte Seite f in Problem 3.0.1 aus $f \in \mathrm{L}^q\left(0, T; H\right)$ gewählt. Zu einer rechten Seite aus $f \in \mathrm{L}^q\left(0, T; H\right)$ kann auf unterschiedliche Weise eine Approximation $\left(f^n\right)_{n=1}^N$ aus H bestimmt werden. Eine Möglichkeit ist eine Clément-Interpolation nullter Ordnung an f. Dann ist für jedes $n = 1, ..., N$

$$f^n := \frac{1}{\tau_N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f\left(t\right) dt \text{ für jedes } n = 1, ..., N. \tag{3.2.5}$$

Der Startwert $u_h^0 \in V_h$ aus dem diskreten Ersatzproblem 3.2.1 sollte in Relation zu dem Anfangswert $u_0 \in H$, aus Problem 3.0.1, stehen. Ein solcher Wert kann auf unterschiedlicher Weise bestimmt werden. Ein Ansatz basiert auf den Projektionssatz abgeschlossener, konvexer Mengen in Hilbert-Räumen (vergleiche Brezis [10, Kapitel V, Theorem V.2] oder Werner [38, Kapitel V, Satz V.3.2]). Dieser Ansatz wurde bereits in Kapitel 2 erwähnt. Im Unterschied zu der Approximation mit einem Galerkin-Schema kann es sein, dass die Folge der so erzeugten Startwerte $(u_h^0)_{h\in\mathcal{H}}$ für $h \to 0$ nicht gegen u_0 konvergiert.

Wie in Kapitel 2 kann nachgewiesen werden, dass das Ersatzproblem 3.2.1 genau eine Lösung besitzt.

Lemma 3.2.1. *Sei $u_h^0 \in V_h$ ein Startwert und $(f^n)_{n=1}^N \subseteq H$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;H)$, aus Problem 3.0.1. Es sei die Bedingung* (3.2.1) *erfüllt und $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ besitze die Eigenschaften (a.1) bis (a.5). Dann existieren Werte $(u_h^n)_{n=1}^N \subseteq V_h$, die das diskrete Ersatzproblem 3.2.1 eindeutig lösen.*

Beweis. Sei $u_h^0 \in V_h$ ein beliebiger, fest gewählter Startwert und $(f^n)_{n=1}^N \subseteq V^*$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;H)$ aus Problem 3.0.1. Dann können die Werte $(u_h^n)_{n=1}^N \subseteq V_h$ sukzessiv mit dem Satz von Browder-Minty (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 26, Theorem 26.A]) bestimmt werden.

Für ein $n = 1, ..., N$ sei $u_h^{n-1} \in V_h$ bekannt. Dann ergibt sich aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Bedingung (3.2.1) für alle $v_h \in V_h$ die Abschätzung

$$\left|\left(\tau_N f^n + u_h^{n-1}, v_h\right)\right|_{\mathbb{R}} \le \left|\tau_N f^n + u_h^{n-1}\right| |v_h| \le \gamma \left|\tau_N f^n + u_h^{n-1}\right| \|v_h\|_{V_h}.$$

Folglich ist $(\tau_N f^n + u_m^{n-1}) \in V_h^*$.

Da die Abbildung $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften (a.1) bis (a.5) besitzt, kann ein hemistetiger, monotoner

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_h : V_h &\to V_h^* \\ v_h &\mapsto \langle \mathrm{A}_h v_h, \cdot \rangle_{V_h^* \times V_h} = a_h(v_h, \cdot) \end{aligned}$$

konstruiert werden. Der konstruierte Operator A_h genügt einer $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung. Mit dem Operator A_h kann durch

$$\langle \mathrm{T} v_h, w_h \rangle_{V_h^* \times V_h} = (v_h, w_h) + \tau_N a_h(v_h, w_h), \text{ für alle } v_h, w_h \in V_h,$$

ein Operator $\mathrm{T} : V_h \to V_h^*$ konstruiert werden. Da das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ stetig und der Operator A_h hemistetig ist, ist T ein hemistetiger Operator. Des Weiteren ergeben sich aus der diskreten p-Koerzitivitätsbedingung (3.2.3) und der diskreten Monotoniebedingung (3.2.4) der Abbildung a_h für alle $v_h, w_h \in V_h$ mit $v_h \ne w_h$ die Abschätzungen

$$\langle \mathrm{T} v_h, v_h \rangle_{V_h^* \times V_h} = |v_h|^2 + \tau_N a_h(v_h, v_h) \ge \tau_N \mu_0 \|v\|_{V_h}^p - \tau_N \lambda_0 \tag{3.2.6}$$

und

$$
\begin{aligned}
& \left\langle \mathrm{T}v_h - \mathrm{T}w_h, v_h - w_h \right\rangle_{V_h^* \times V_h} \\
= \; & |v_h - w_h|^2 + \tau_N \left(a_h(v_h, v_h - w_h) + a_h(w_h, v_h - w_h) \right) \\
\geq \; & |v_h - w_h|^2 > 0. \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

Die Abschätzungen (3.2.6) und (3.2.7) implizieren die Koerzitivität und strikte Monotonie des Operators T.

Also ist der Operator T hemistetig, strikt monoton und koerzitiv. Da jeder endlichdimensionale Raum reflexiv und separabel ist, ist V_h reflexiv und separabel. Demzufolge existiert gemäß dem Satz von Browder-Minty (vergleiche Zeidler [42, Kapitel 26, Theorem 26.A (c)]) genau ein $u_h^n \in V_h$, so dass für alle $v_h \in V_h$ die Gleichung

$$\left\langle \mathrm{T}u_h^n, v_h \right\rangle_{V_h^* \times V_h} = (u_h^n, v_h) + \tau_N \left\langle \mathrm{A}u_h^n, v_h \right\rangle_{V_h^* \times V_h} = \left\langle \tau_N f^n + u_h^{n-1}, v_h \right\rangle_{V_h^* \times V_h}$$

erfüllt ist.

Auf diese Weise können sukzessiv Werte $(u_h^n)_{n=1}^N \subseteq V_h$ bestimmt werden, die dem Problem 3.2.1 genügen. Da der Operator T strikt monoton ist, sind die Werte $(u_h^n)_{n=1}^N \subseteq V_h$ eindeutig bestimmt. □

Für Werte $(u^n)_{n=1}^N \subseteq V_h$, die dem diskreten Ersatzproblem 3.2.1 genügen kann eine A-priori-Abschätzung angegeben werden.

Lemma 3.2.2. *Seien $u_h^0 \in V_h$ ein gegebener Startwert, $(f^n)_{n=1}^N \subseteq H$ eine Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0,T;H)$ und $(u_h^n)_{n=1}^N \subseteq V_h$ Werte, die dem diskreten Ersatzproblem 3.2.1 genügen. Es sei die Bedingung* (3.2.1) *erfüllt und $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ besitze die Eigenschaften (a.1) bis (a.5). Dann existiert eine Konstante $\mathcal{M} > 0$, so dass die A-priori-Abschätzung*

$$
\begin{aligned}
& \max_{n \in \{1,\dots,N\}} |u_h^n|^2 + \sum_{n=1}^N \left| u_h^n - u_h^{n-1} \right|^2 + \mu_0 \tau_N \sum_{n=1}^N \|u_h^n\|_{V_h}^p \\
\leq \; & \mathcal{M} \left(\left| u_h^0 \right|^2 + \tau_N \sum_{n=1}^N |f^n|^q + T \right) \qquad (3.2.8)
\end{aligned}
$$

gilt.

Beweis. Da die Werte $(u_h^n)_{n=1}^N \subseteq V_h$ dem diskreten Ersatzproblem 3.2.1 genügen, ergibt sich aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, der Young-Ungleichung (2.1.6), der Bedingung (3.2.1) und der diskreten p-Koerzitivitätsbedingung (3.2.3) der Abbildung a_h für jedes beliebige, fest gewählte $n = 1, ..., N$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_N}, u_h^n\right) + \mu_0 \left\|u_h^n\right\|_{V_h}^p \leq \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_N}, u_h^n\right) + a_h\left(u_h^n, u_h^n\right) + \lambda_0 \\
= \quad & \left(f^n, u_h^n\right) + \lambda_{\mathrm{A}} \leq \left|f^n\right| \left|u_h^n\right| + \lambda_0 \leq \gamma \left|f^n\right| \left\|u_h^n\right\|_{V_h} + \lambda_0 \\
\leq \quad & c_1 \left|f^n\right|^q + \frac{\mu_0}{2} \left\|u_h^n\right\|_{V_h}^p + \lambda_0,
\end{aligned}$$

wobei $c_1 := \frac{1}{q}\left(p\frac{\mu_0}{2\gamma}\right)^{-\frac{q}{p}}$ ist. Eine Multiplikation mit $2\tau_N$ und die Identität (2.1.4) liefern

$$\left|u_h^n\right|^2 - \left|u_h^{n-1}\right|^2 + \left|u_h^n - u_h^{n-1}\right|^2 + \tau_N \mu_0 \left\|u_h^n\right\|_{V_h}^p \leq 2\tau_N c_1 \left|f^n\right|^q + 2\tau_N \lambda_0.$$

Durch Summation von 1 bis N ergibt sich

$$\left|u_h^N\right|^2 + \sum_{n=1}^N \left|u_h^n - u_h^{n-1}\right|^2 + \tau_N \mu_0 \sum_{n=1}^N \left\|u_h^n\right\|_{V_h}^p \leq \left|u_h^0\right|^2 + 2\tau_N c_1 \sum_{n=1}^N \left|f^n\right|^q + 2\lambda_0 T.$$

Aus dieser Ungleichung folgt mit der Konstanten $\mathcal{M} := \max\left(1, 2c_1, 2\lambda_0\right)$ die Abschätzung (3.2.8). □

Bemerkung 3.2.2. Ist die Approximation an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q\left(0, T; H\right)$ durch die Clément-Interpolation (3.2.5) gegeben, folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \tau_N \sum_{n=1}^N \left|f^n\right|^q = \tau_N \sum_{n=1}^N \left|\frac{1}{\tau_N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f\left(t\right) dt\right|^q \\
\leq \quad & \tau_N \sum_{n=1}^N \tau_N^{-\frac{q(p-1)}{p}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left|f\left(t\right)\right|^q dt = \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^q(0,T;H)}^q .
\end{aligned}$$

Sind $(u_h^n) \subseteq V_h$ Werte, die dem diskreten Ersatzproblem 3.2.1 genügen, ergibt sich aus dieser Abschätzung und (3.2.8) die A-priori-Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \max_{n\in\{1,\ldots,N\}} \left|u_h^n\right|^2 + \sum_{n=1}^N \left|u_h^n - u_h^{n-1}\right|^2 + \mu_0 \tau_N \sum_{n=1}^N \left\|u_h^n\right\|_{V_h}^p \\
\leq \quad & \mathcal{M}\left(\left|u_h^0\right|^2 + \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^q(0,T;H)}^q + T\right). \qquad (3.2.9)
\end{aligned}$$

3.3. Schwache Konvergenz gegen eine Lösung des kontinuierlichen Problems 3.0.1

In diesem Abschnitt bezeichnet $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ das in Abschnitt 3.2 eingeführte stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für den reellen, separablen, reflexiven Banach-Raum V. Des Weiteren bezeichnet $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ die in Abschnitt 3.2 eingeführte Approximation an den Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$. Es sei anzumerken, dass ein a_h für jedes $h \in \mathcal{H}$ das kartesisches Produkt $V_h \times V_h$ auf die reellen Zahlen abbildet und die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Eigenschaften (a.1) bis (a.5) besitzt.

Im Folgenden sei $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilfolge der natürlichen Zahlen, so dass N_k für $k \to \infty$ gegen unendlich strebt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{H}_k := \left\{h_k \in \mathcal{H} \mid h_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$. Dann existiert zu jedem beliebigen, fest gewählten $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\mathbb{I}_{N_k}$ für das Zeitintervall $[0, T]$ und ein endlich dimensionaler Raum $V_{h_k} \subseteq V$. Die Startwerte für die diskreten Ersatzprobleme vom Typus Problem 3.2.1 werden mit u_k^0 und die Schrittweiten der Zerlegungen $\mathbb{I}_{N_k}$ mit τ_k bezeichnet. Die Ersatzprobleme 3.2.1 liefern zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Näherungswerte $(u_k^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq V_{h_k}$. Aus diesen Näherungswerten und den Knoten $(t_n)_{n=1}^{N_k}$ kann mit einem Interpolationsansatz eine stückweise konstante abstrakte Funktion $u_k : [0, T] \to V_{h_k}$ mit

$$t \mapsto u_k(t) := \begin{cases} u_k^n, & \text{falls } t \in\,]t_{n-1}, t_n] \text{ und } n = 1, ..., N_k, \\ u_k^1, & \text{falls } t = 0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

und eine stückweise affine lineare abstrakte Funktion $v_k : [0, T] \to V_{h_k}$ mit

$$t \mapsto v_k(t) := \begin{cases} \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}(t - t_n) + u_k^n, & \text{falls } t \in\,]t_{n-1}, t_n] \\ & \text{und } n = 1, ..., N_k, \\ u_k^0, & \text{falls } t = 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

bestimmt werden. Ebenso kann aus einer Approximation $(f^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq H$ an die rechte Seite $f \in \mathrm{L}^q(0, T; H)$, aus Problem 3.0.1, eine stückweise konstante abstrakte Funktion $f_k : [0, T] \to H$ mit

$$t \mapsto f_k(t) := f^n, \text{ falls } t \in\,]t_{n-1}, t_n] \text{ und } n = 1, ..., N_k \tag{3.3.3}$$

bestimmt werden.

Die Werte $(f^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq H$ können auf unterschiedliche Weise bestimmt werden. In diesem Abschnitt werden diese Werte mit der Clément-Interpolation (3.2.5) erzeugt.

Bemerkung 3.3.1. Genügen die Werte $(f^n)_{n=1}^{N_k} \subseteq H$ der Relation (3.2.5), konvergiert die durch (3.3.3) gegebene abstrakte Funktion $f_k : [0, T] \to H$ in $\mathrm{L}^q(0, T; H)$ stark gegen f. Diese Aussage kann wie im Beweis von Lemma 2.2.1 (ii) nachgewiesen werden.

Gemäß Theorem 1.2.1 besitzt das kontinuierliche Problem 3.0.1 genau eine Lösung $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$. Im Folgenden wird gezeigt, dass die abstrakten Funktionen u_k und v_k in $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ schwach* gegen die Lösung u des Problems 3.0.1 konvergieren. Des Weiteren wird gezeigt, dass die abstrakte Funktion $p_{h_k}u_k$ in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ schwach gegen $\varpi(u)$ konvergiert.

Zum Nachweis dieser Konvergenzresultate ist es erforderlich, davon auszugehen, dass das zugrunde liegende äußere Approximationsschema $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; F, \varpi\right)$ für V die folgenden Eigenschaften besitzt.

(b.1) Die Menge $\varpi(V) \subseteq F$ ist in F abgeschlossen.

(b.2) Der Restriktionsoperator r_h ist linear, beschränkt und genügt der Bedingung

$$\sup_{h\in\mathcal{H}} \|r_h\|_{\mathcal{L}(V,V_h)} < \infty. \tag{3.3.4}$$

(b.3) Es existiert eine natürliche Zahl $\sigma \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit

$$F \hookrightarrow H \times \ldots \times H = H^\sigma$$

und für alle $v \in V$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt

$$|r_h v - v| \leq \|p_h r_h v - \varpi(v)\|_{H^\sigma}. \tag{3.3.5}$$

(b.4) Für jedes $h \in \mathcal{H}$ sei $v_h \in \mathrm{L}^p(0,T;V_h) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$. Es gebe ein $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$, ein $v^* \in \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ und eine Teilmenge $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$, so dass

$$p_{h'}v_{h'} \rightharpoonup \varpi(v) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0$$

sowie

$$v_{h'} \overset{*}{\rightharpoonup} v^* \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0.$$

Dann ist $v = v^*$.

Bemerkung 3.3.2. Besitzt das zugrunde liegende stabile, zulässig, äußere Approximationsschema $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; F, \varpi\right)$ für V die Eigenschaft (b.3), ergibt sich aus der Kompatibilitätsbedingung des Schemas für alle $v \in V$ das Konvergenzresultat

$$r_h v \to v \quad \text{in } H \quad \text{für } \mathcal{H} \ni h \to 0. \tag{3.3.6}$$

Des Weiteren werden Konsistenzbedingungen für die zugrunde liegende Approximation $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ an den Operator $\mathrm{A}: V \to V^*$ benötigt. Diese Bedingungen beschreiben in welchem Verhältnis die Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ zum Operator A steht, wenn $h \to 0$. Für eine Approximation an einen monotonen, hemistetigen Operator erweist sich die folgende Konsistenzbedingung als sinnvoll.

(c.1) Für jedes $h \in \mathcal{H}$ seien $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ und $w_h \in \mathrm{L}^p(0,T;V_h)$. Es gebe ein $w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ und eine Teilmenge $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$, so dass

$$p_{h'}w_{h'} \rightharpoonup \varpi(w) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0.$$

Dann gilt

$$\liminf_{\mathcal{H}' \ni h' \to 0} \int_0^T a_{h'}(r_{h'}v(t), w_{h'}(t))\, dt \geq \int_0^T \langle \mathrm{A}v(t), w(t)\rangle\, dt.$$

Definition 3.3.1. Die Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ heißt genau dann konsistente Approximation an den Operator $\mathrm{A}: V \to V^*$, wenn die Bedingung (c.1) gilt.

Besitzt das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für V die Eigenschaft (b.1), kann ein instationäres Analogon für die Synchronisationsbedingung des äußeren Approximationsschemas angegeben werden.

Lemma 3.3.1. *Es sei $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für V. Das Schema besitze die Eigenschaft (b.1). Für jedes $h \in \mathcal{H}$ sei $v_h \in \mathrm{L}^p(0,T;V_h)$. Des Weiteren seien $\phi \in \mathrm{L}^p(0,T;F)$ und $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ mit*

$$p_{h'}v_{h'} \rightharpoonup \phi \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0.$$

Dann existiert ein $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ mit

$$\phi(t) = \varpi(v(t)) \ \textit{f.ü.} \text{ auf }]0,T[\,.$$

Beweis. [1] Für alle $g \in F^*$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ ist die abstrakte Funktion

$$[0,T] \ni t \mapsto g\varphi(t) \tag{3.3.7}$$

in $\mathrm{L}^q(0,T;F^*)$ enthalten. Da die Folge $(p_{h'}v_{h'})_{h'\in\mathcal{H}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ schwach gegen $\phi \in \mathrm{L}^p(0,T;F)$ konvergiert, folgt gemäß Emmrich [16, Kapitel 7, Satz 7.1.15 (ii)] für jede Testfunktion (3.3.7)

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h'\to 0} \int_0^T \langle g\varphi(t), p_{h'}v_{h'}(t) - \phi(t)\rangle_{F^*\times F}\, dt \\ &= \lim_{h'\to 0} \int_0^T \langle g, (p_{h'}v_{h'}(t) - \phi(t))\,\varphi(t)\rangle_{F^*\times F}\, dt \\ &= \lim_{h'\to 0} \left\langle g, \int_0^T p_{h'}v_{h'}(t)\,\varphi(t)\, dt - \int_0^T \phi(t)\,\varphi(t)\, dt \right\rangle_{F^*\times F}. \end{aligned}$$

[1] Für $p = 2$ ist ein Beweis für die Aussage des Lemmas in Temam [36, Kapitel 3, Lemma 5.7] zu finden.

Der Prolongationsoperator p_h ist für jedes $h \in \mathcal{H}$ linear und beschränkt. Folglich ergibt sich gemäß Emmrich [16, Kapitel 7, Satz 7.1.15 (iii)] aus der obigen Abschätzung

$$p_{h'}\left(\int_0^T v_{h'}(t)\,\varphi(t)\,dt\right) \rightharpoonup \int_0^T \phi(t)\,\varphi(t)\,dt \quad \text{in } F \quad \text{für } \mathcal{H} \ni h' \to 0.$$

Da das zugrunde liegende äußere Approximationsschema für V zulässig ist, ist die Synchronisationsbedingung erfüllt. Daher existiert zu jedem $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ ein $v_\varphi \in V$ mit

$$\int_0^T \phi(t)\,\varphi(t)\,dt = \varpi(v_\varphi)\,. \tag{3.3.8}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ ist die reellwertige Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - t^2}\right) & \text{für } |t|_{\mathbb{R}} < \varepsilon, \\ 0, & \text{für } |t|_{\mathbb{R}} \geq \varepsilon \end{cases}$$

mit

$$c_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - t^2}\right) dt\right)^{-1}$$

ein Mittelungskern. Zu einem beliebigen, fest gewählten $t \in]0,T[$ kann ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ bestimmt werden, so dass

$$\rho_{\varepsilon,t} := \rho_\varepsilon(t - \cdot) \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)\,.$$

Folgerichtig existiert gemäß (3.3.8) ein $v_{\rho_{\varepsilon,t}} \in V$ mit $\varpi\left(v_{\rho_{\varepsilon,t}}\right) = \int_0^T \phi(s)\,\rho_\varepsilon(t-s)\,ds$. Nun folgt aus einen Satz über Mittelfunktionen[2]

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \varpi\left(v_{\rho_{\varepsilon,t}}\right) - \phi(t) \right\|_F \\ \leq\ &\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \int_0^T \phi(s)\,\rho_\varepsilon(t-s)\,ds - \phi(t) \right\|_F = 0 \ f.ü. \text{ auf }]0,T[\,. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Da das äußere Approximationsschema für V die Eigenschaft (b.1) besitzt, ist die Menge $\varpi(V) \subseteq F$ in F abgeschlossen. Also existiert gemäß (3.3.9) für alle $t \in]0,T[$ ein $v(t) \in V$ mit

$$\varpi(v(t)) = \phi(t) \ \ f.ü \text{ auf }]0,T[\,.$$

[2]In Emmrich [16, Kapitel 3, Satz 3.1.8 (v)] oder Evans [20, Appendix C, Theorem 6 (ii)] ist der Satz für reelle Lebesgue-integrierbare Funktionen zu finden. Allerdings kann mit dem in Evans angegebene Beweis und dem Satz von Bochner (vergleiche Yosida [39, Kapitel V, Abschnitt 5, Theorem 1]) die folgende Aussage gezeigt werden. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum, $v \in \mathrm{L}^1(0,T;X)$ und $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ein Mittelungskern. Dann gilt für alle $t \in]0,T[$ $\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \int_0^T v(s)\,\rho_\varepsilon(t-s)\,ds - v(t) \right\|_X = 0$ $f.ü.$ auf $]0,T[$.

Ferner ist die Abbildung

$$V \to \varpi(V)$$

ein Isomorphismus (vergleiche Brézis [10, Kapitel II, Theorem II.11] oder Werner [38, Kapitel IV, Korollar IV.3.6]). Insofern ist durch

$$]0,T[\ \ni t \mapsto v(t) = \varpi^{-1}(\phi(t))$$

eine Bochner-integrierbare, abstrakte Funktion gegeben (vergleiche Emmrich [16, Kapitel 7, Satz 7.1.15 (iii)]). Für diese abstrakte Funktion ergibt sich die Abschätzung

$$\|v\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \left\|\varpi^{-1}(\phi(t))\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\varpi^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\varpi(V),V)} \|\phi\|_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} < \infty.$$

Also ist $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$. □

Ebenso kann ein instationäres Analogon für die Kompatibilitätsbedingung des zugrunde liegenden stabilen, zulässigen, äußeren Approximationsschemas für V angegeben werden. Dafür ist es erforderlich, dass das Schema die Eigenschaft (b.2) besitzt.

Lemma 3.3.2. *Es sei* $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F,\varpi)\right)$ *das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für* V*. Das äußere Approximationsschema besitze die Eigenschaften (b.2) und (b.3). Dann gilt für alle* $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$

$$p_h r_h v \to \varpi(v) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } \mathcal{H} \ni h \to 0$$

und

$$r_h v \to v \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;H) \quad \text{für } \mathcal{H} \ni h \to 0.$$

Beweis. Sei $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ ein beliebiges, fest gewähltes Element. Das äußere Approximationsschema für V ist zulässig. Also ist die Kompatibilitätsbedingung erfüllt. Demgemäß gilt für alle $t \in\ ]0,T[$

$$p_h r_h v(t) \to \varpi(v(t)) \quad \text{in } F \quad \text{für } \mathcal{H} \ni h \to 0.$$

Da das äußere Approximationsschema für V stabil ist und die Eigenschaft (b.2) besitzt, folgt aus der Stabilitätsbedingung (3.1.1) und der Bedingung (3.3.4)

$$\sup_{h\in\mathcal{H}} \left(\|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h,F)} \|r_h\|_{\mathcal{L}(V,V_h)}\right) < \infty.$$

Daher ergibt sich für alle $t \in]0,T[$ die Abschätzung

$$\|p_h r_h v(t) - \varpi(v(t))\|_F^p \leq \left(\|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h,F)} \|r_h\|_{\mathcal{L}(V,V_h)} + \|\varpi\|_{\mathcal{L}(V,F)}\right)^p \|v(t)\|_V^p .$$

Da $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ ist, ist v Bochner-integrierbar. Daher folgt aus den Satz von Bochner (vergleiche Yosida [38, Kapitel V, Abschnitt 5, Theorem 1]), dass $\|v(\cdot)\|_V^p \in \mathrm{L}^1(0,T)$ ist. Des Weiteren ist das äußere Approximationsschema für V stabil und besitzt die Eigenschaft (b.2). Folglich ist der Restriktionsoperator r_h für alle $h \in \mathcal{H}$ linear und beschränkt. Auch der Synchronisationsoperator ϖ und der Prolongationsoperator p_h sind für alle $h \in \mathcal{H}$ linear sowie beschränkt. Demzufolge sind die abstrakten Funktionen

$$]0,T[\ \ni t \mapsto \varpi(v(t))$$

und für alle $h \in \mathcal{H}$

$$]0,T[\ \ni t \mapsto p_h r_h v(t)$$

Bochner-integrierbar (vergleiche Emmrich [16, Kapitel 7, Satz 7.1.15 (iii)]). Ferner folgt aus den Bedingungen (3.1.1) und (3.3.4)

$$\|\varpi(v)\|_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} \leq \|\varpi\|_{\mathcal{L}(V,F)} \|v\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} < \infty$$

und für alle $h \in \mathcal{H}$

$$\|p_h r_h v\|_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} \leq \sup_{h\in\mathcal{H}} \|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h,F)} \|r_h\|_{\mathcal{L}(V,V_h)} \|v\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} < \infty.$$

Also sind $\varpi(v)$ und $p_h r_h v$ für alle $h \in \mathcal{H}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ enthalten.

Dementsprechend folgt aus den Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue (vergleiche Amann und Escher [3, Kapitel X, Abschnitt 3, 3.12 Theorem])

$$\lim_{h\to 0} \int_0^T \|p_h r_h v(t) - \varpi(v(t))\|_F^p \, dt = 0. \tag{3.3.10}$$

Das Approximationsschema besitzt die Eigenschaft (b.3). Folglich existiert ein $\sigma \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und eine Konstante $\alpha_\sigma > 0$, so dass $\|\phi\|_{H^\sigma} \leq \alpha_\sigma \|\phi\|_F$ für alle $\phi \in F$ gilt. Daher ergibt sich aus den Bedingungen (3.3.5) und (3.3.10) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \int_0^T |r_h v(t) - v(t)|^p \, dt &\leq \lim_{h\to 0} \int_0^T \|p_h r_h v(t) - \varpi(v(t))\|_{H^s}^p \, dt \\ &\leq \lim_{h\to 0} (\alpha_s)^p \int_0^T \|p_h r_h v(t) - \varpi(v(t))\|_F^p \, dt = 0. \end{aligned}$$

□

Für die angestrebten Konvergenzresultate wird das nachfolgende Lemma benötigt.

Lemma 3.3.3. *Es sei* $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ *das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für* V *und* $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ *die zugrunde liegende Approximation an den Operator* $\mathrm{A} : V \to V^*$. *Das äußere Approximationsschema besitze die Eigenschaften (b.1), (b.2) und (b.4). Die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H$ *sei in* H *beschränkt. Dann haben die durch* (3.3.1) *und* (3.3.2) *gegebenen abstrakten Funktionen die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *sind* u_k *und* v_k *in* $\mathrm{L}^p(0,T;V_{h_k}) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *enthalten. Insbesondere ist* $v_k \in \mathcal{C}([0,T];V_{h_k})$. *Die Folgen* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sind in* $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *beschränkt. Ferner ist die Folge* $\left(\|u_k\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V_{h_k})}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt. Die Folge* $\left(\|v_k\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V_{h_k})}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt, sofern die Bedingung*

$$\|u_k^0\|_{V_{h_k}} = \mathcal{O}\left(\tau_k^{-\frac{1}{p}}\right) \tag{3.3.11}$$

erfüllt ist.

(ii) *Die Differenz* $(u_k - v_k)$ *konvergiert in* $\mathrm{L}^2(0,T;H)$ *für* $k \to \infty$ *stark gegen Null. Des Weiteren existiert ein* $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *und eine Teilfolge* $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$, *so dass* $u_{k'}, v_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *für* $k' \to \infty$ *und* $p_{h_{k'}} u_{k'} \rightharpoonup \varpi(u)$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ *für* $k' \to \infty$. *Ferner existiert ein* $a \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$, *so dass für alle* $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ *folgt*

$$\lim_{k'\to\infty} \int_0^T a_{h_{k'}}\left(u_{k'}(t), r_{h_{k'}} v(t)\right) dt = \int_0^T \langle a(t), v(t)\rangle\, dt.$$

Ist zusätzlich die Bedingung (3.4.11) *erfüllt, folgt, dass* $p_{h_{k'}} v_{k'} \rightharpoonup \varpi(u)$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ *für* $k' \to \infty$.

Beweis. Zu (i): Sei $k \in \mathbb{N}$ ein beliebiger, fest gewählter Wert. Die durch (3.2.1) konstruierte abstrakte Funktion $t \mapsto u_k(t)$ ist als einfache Funktion Bochner-integrierbar. Die Stetigkeit der durch (2.2.2) konstruierten abstrakten Funktion wurde im Beweis von Lemma 2.2.2 nachgewiesen. Ebenso kann die Stetigkeit der durch (3.3.2) konstruierten abstrakten Funktion belegt werden. Also ist $v_k \in \mathcal{C}([0,T];V_{h_k})$ und damit Bochner-integrierbar (vergleiche Emmrich [16, Kapitel 7, Satz 7.1.16]).

Die Approximation an die rechte Seite ist durch die Clément-Interpolation (3.2.5) gegeben. Daher ergeben sich aus der A-priori-Abschätzung (3.2.9) die Abschätzungen

$$\|u_k\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{H})} = \max_{n\in\{1,\dots,N_k\}} |u_k^n| \le \mathcal{M}\left(|u_k^0|^2 + \|f\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;H)} + T\right), \tag{3.3.12}$$

$$\|v_k\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{H})} = \max_{n\in\{1,\dots,N_k\}} |u_k^n| \leq \mathcal{M}\left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;H)}^q + T\right) \quad (3.3.13)$$

und

$$\|u_k\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)}^p = \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|_{V_{h_k}}^p \leq \frac{\mathcal{M}}{\mu}\left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;H)}^q + T\right). \quad (3.3.14)$$

Des Weiteren ergibt sich aus der diskreten Hölder-Ungleichung und der A-priori-Abschätzung (3.2.9)

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)}^p &\leq \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{|(t-t_n)|_{\mathbb{R}}}{\tau_k}\left(\|u_k^n\|_{V_{h_k}} + \left\|u_k^{n-1}\right\|_{V_{h_k}}\right) + \|u_k^n\|_{V_{h_k}}\right)^p dt \\
&\leq 3^p \left(\tau_k \left\|u_k^0\right\|_{V_{h_k}}^p + \tau_k \sum_{n=1}^{N_k} \|u_k^n\|_{V_{h_k}}^p\right) \\
&\leq 3^p \left(\tau_k \left\|u_k^0\right\|_{V_{h_k}}^p + \frac{\mathcal{M}}{\mu}\left(\left|u_k^0\right|^2 + \|f\|_{\mathrm{L}^q(0,T;H)}^q + T\right)\right). \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

Also sind $u_k, v_k \in \mathrm{L}^p(0,T;V_{h_k}) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$, für jedes beliebige, fest gewählte $k \in \mathbb{N}$.

Da die Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ in H beschränkt ist, ergibt sich die $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$-Beschränktheit der Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus den Abschätzungen (3.3.12) sowie (3.3.13). Des Weiteren ergibt sich aus der Abschätzung (3.3.14) die Beschränktheit der Folge $\left(\|u_k\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Aus der Abschätzung (3.3.15) folgt die Beschränktheit der Folge $\left(\|u_k\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn die Bedingung (3.3.11) erfüllt ist.

Zu (ii): Die starke Konvergenz der Folge $(u_k - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^2(0,T;H)$ gegen Null kann wie im Beweis von Lemma 2.2.2 (ii) mit der A-priori-Abschätzung (3.2.9) gezeigt werden. Ebenso kann wie im Beweis von Lemma 2.2.2 (ii) gezeigt werden, dass eine abstrakte Funktionen $v_1 \in \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ und eine Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ von $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$u_{k'}, v_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} v_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k' \to \infty$$

existieren. Gemäß Teil (i) dieses Lemmas ist die Folge $\left(\|u_k\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Ferner ist das äußere Approximationsschema $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F,\varpi)\right)$ stabil. Daher folgt aus der Stabilitätsbedingung (3.1.1)

$$\|p_{h_k} u_k\|_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} \leq \|p_{h_k}\|_{\mathcal{L}\left(V_{h_k},F\right)} \|u_k\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)} < \infty.$$

Folglich ist die Folge $(p_{h_k} u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ beschränkt. Der Raum F ist ein reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum. Also ist der Raum $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ reflexiv (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]). Demgemäß existiert nach Theorem A.1.1 ein $\phi_1 \in \mathrm{L}^p(0,T;F)$ und eine Teilfolge $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$ von $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$, so dass

$$u_{k''}, v_{k''} \overset{*}{\rightharpoonup} v_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k'' \to \infty$$

und

$$p_{h_{h''}} u_{k''} \rightharpoonup \phi_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k'' \to \infty.$$

Das äußere Approximationsschema für V besitzt die Eigenschaften (b.1) und (b.4). Daher existiert gemäß Lemma 3.3.1 ein $v_2 \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ mit

$$\phi_1(t) = \varpi(v_2(t)) \;\; f.ü. \text{ auf } \left]0,T\right[.$$

Also ergibt sich aus der Eigenschaft (b.4) des Schemas, dass $v_1 = v_2$ ist.

Ist die Bedingung (3.3.11) erfüllt, folgt aus Teil (i) dieses Lemmas, dass die Folge $\left(\|v_k\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Daher kann unter der Voraussetzung, dass die Bedingung (3.3.11) erfüllt ist, wie für die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gezeigt werden, dass eine Teilfolge $(k''')_{k'''\in\mathbb{N}}$ von $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$u_{k'''}, v_{k'''} \overset{*}{\rightharpoonup} v_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k''' \to \infty$$

und

$$p_{h_{h'''}} u_{k'''}, p_{h_{h'''}} v_{k'''} \rightharpoonup \varpi(v_1) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k''' \to \infty.$$

Der Restriktionsoperator $r_h : V \to V_h$ ist linear, beschränkt und genügt der Bedingung (3.3.4), weil das Approximationsschema für V die Eigenschaft (b.2) besitzt. Des Weiteren besitzt jede Abbildung aus der Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ die Eigenschaften (a.1) bis (a.5). Dementsprechend ist für jedes beliebige fest, gewählte $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $a_{h_k} : V_{h_k} \times V_{h_k} \to \mathbb{R}$ im zweiten Argument linear und besitzt die diskrete $(p-1)$-Wachstumsbedingung (3.2.2). Folglich ist für jedes beliebige, fest gewählte $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\mathrm{L}^p(0,T;V) \ni v \mapsto \int_0^T a_{h_k}(u_k(t), r_{h_k} v(t))\, dt$$

linear. Ferner ergibt sich aus der diskreten $(p-1)$-Wachstumsbedingung (3.2.2) einer Abbildung a_{h_k}, der Bedingung (3.3.4), und der diskreten sowie klassischen Hölder-Ungleichung für alle $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T a_{h_k}\left(u_k\left(t\right), r_{h_k} v\left(t\right)\right) dt\right|_{\mathbb{R}} \\
\leq\;& c_0 \left\|r_{h_k}\right\|_{\mathcal{L}\left(V, V_{h_k}\right)} \int_0^T \left(\left\|u_k\left(t\right)\right\|_{V_{h_k}}^{p-1}+1\right)\left\|v\left(t\right)\right\|_{V_{h_k}} dt \\
\leq\;& c_0 \left\|r_{h_k}\right\|_{\mathcal{L}\left(V, V_{h_k}\right)} \left(\int_0^T \left(\left\|u_k\left(t\right)\right\|_{V_{h_k}}^{p-1}+1\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left\|v\left(t\right)\right\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} \\
\leq\;& 2^{\frac{1}{p}} c_0 \left\|r_{h_k}\right\|_{\mathcal{L}\left(V, V_{h_k}\right)} \left(\left\|u_k\right\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)}^p + T\right)^{\frac{1}{q}} \left\|v\left(t\right)\right\|_{\mathrm{L}^p(0,T;V)} .
\end{aligned}$$

Gemäß Teil (i) dieses Lemmas ist die Folge $\left\|\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\mathrm{L}^p\left(0,T,V_{h_k}\right)}$ beschränkt. Daher ist die Folge

$$\left(\int_0^T a_{h_k}\left(u_k\left(t\right), r_{h_k}\left(\cdot\right)\right) dt\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

in $\left(\mathrm{L}^p\left(0,T,V\right)\right)^*$ beschränkt. Die Räume $\left(\mathrm{L}^p\left(0,T,V\right)\right)^*$ und $\mathrm{L}^q\left(0,T;V^*\right)$ sind isometrisch, isomorph zueinander und der Raum $\mathrm{L}^p\left(0,T,V\right)$ ist separabel (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (f)]). Daher existiert gemäß Theorem A.1.2 ein $a \in \mathrm{L}^q\left(0,T;V^*\right)$ und eine Teilfolge $\left(k^{\#}\right)_{k^{\#}\in\mathbb{N}}$, von $\left(k'''\right)_{k'''\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $v \in \mathrm{L}^p\left(0,T;V\right)$ gilt

$$\lim_{k^{\#}\to\infty} \int_0^T a_{h_{k^{\#}}}\left(u_{k^{\#}}\left(t\right), r_{k^{\#}} v\left(t\right)\right) dt \;=\; \int_0^T \left\langle a\left(t\right), v\left(t\right)\right\rangle dt,$$

$$u_{k^{\#}}, v_{k^{\#}} \overset{*}{\rightharpoonup} v_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty\left(0,T;H\right) \quad \text{für } k^{\#}\to\infty$$

und

$$p_{h_{k^{\#}}} u_{k^{\#}} \rightharpoonup \varpi\left(v_1\right) \quad \text{in } \mathrm{L}^p\left(0,T;F\right) \quad \text{für } k^{\#}\to\infty.$$

Ist die Bedingung (3.3.11) erfüllt, folgt

$$p_{h_{k^{\#}}} u_{k^{\#}} \rightharpoonup \varpi\left(v_1\right) \quad \text{in } \mathrm{L}^p\left(0,T;F\right) \quad \text{für } k^{\#}\to\infty.$$

□

Nun kann mit den Lemmata 3.3.1, 3.3.2 und 3.3.3 nachgewiesen werden, dass die konstruierten Folgen $\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(v_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^\infty\left(0,T;H\right)$ schwach* gegen die Lösung des Problems 3.0.1 konvergieren. Für diesen Nachweis ist es erforderlich, dass die Folge der Startwerte in der H-Norm gegen den Anfangswert, aus Problem 3.0.1, konvergiert und das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für V die Eigenschaften (b.1) bis (b.4) besitzt. Des Weiteren sollte die zugrunde liegende Approximation an den Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$ konsistent sein.

Theorem 3.3.1. *Es sei* $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ *das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für* V *und* $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ *die zugrunde liegende Approximation an den Operator* $\mathrm{A} : V \to V^*$. *Das äußere Approximationsschema besitze die Eigenschaften (b.1) bis (b.4) und* $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ *sei eine konsistente Approximation an den Operator* A. *Es seien* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen abstrakter Funktionen* (3.3.1) *sowie* (3.3.2). *Die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H$ *konvergiere in* H *stark gegen den Anfangswert* $u_0 \in H$, *aus Problem 3.0.1. Dann existiert ein* $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$, *so dass die Folgen* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ *schwach* gegen* u *konvergieren. Des Weiteren konvergiert die Folge* $(p_{h_k}u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ *schwach gegen* $\varpi(u)$. *Ist die Bedingung* (3.3.11) *erfüllt konvergiert die Folge* $(p_{h_k}v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ *schwach gegen* $\varpi(u)$. *Ferner ist* u *die Lösung des kontinuierlichen Problems 3.0.1 und es gilt für alle* $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T a_{h_k}(u_k(t), r_{h_k}v(t))\,dt = \int_0^T \langle \mathrm{A}u(t), v(t)\rangle\,dt.$$

Beweis. Die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in H stark gegen u_0. Also ist die Folge $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ in H beschränkt. Die Approximation an die rechte Seite ist durch die Clément-Interpolation (3.2.5) gegeben. Demzufolge ergibt sich aus der A-priori-Abschätzung (3.2.9), dass die Folge $\left(u_k^{N_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in H beschränkt ist. Ferner ist jeder Hilbert-Raum reflexiv. Des Weiteren besitzt das äußere Approximationsschema für V die Eigenschaften (b.1), (b.2) und (b.4). Daher existieren gemäß Theorem A.1.1 und Lemma 3.3.3 (ii) ein $\xi \in H$, ein $u \in \mathrm{L}^p(0,T;V) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ sowie ein $a \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ und eine Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ von $(k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$u_{k'}^{N_{k'}} \rightharpoonup \xi \quad \text{in } H \quad \text{für } k' \to \infty, \tag{3.3.16}$$

$$u_{k'}, v_{k'} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;H) \quad \text{für } k' \to \infty, \tag{3.3.17}$$

$$p_{k'}u_{k'} \rightharpoonup \varpi(u) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k' \to \infty \tag{3.3.18}$$

und für alle $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$

$$\lim_{k'\to\infty}\int_0^T a_{h_{k'}}(u_{k'}(t), r_{k'}v(t))\,dt = \int_0^T \langle a(t), v(t)\rangle\,dt. \tag{3.3.19}$$

Ist die Bedingung (3.3.11) erfüllt, ergibt sich

$$p_{k'}v_{k'} \rightharpoonup \varpi(u) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k' \to \infty.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $n = 1, ..., N_k$ ist die stückweise affine lineare abstrakte Funktion (3.3.2) in dem offenen Intervall $]t_{n-1}, t_n[$ klassisch differenzierbar mit

$v_k'(t) = \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}$, für alle $t \in \left]t_{n-1}, t_n\right[$. Die zur Interpolation von (3.3.1) und (3.3.2) verwendeten Stützstellen $(t_n, u_k^n)_{n=1}^{N_k}$ wurden mit dem diskreten Ersatzproblem 3.2.1 bestimmt. Demgemäß gilt für jedes $v_{h_k} \in V_{h_k}$ die Gleichung

$$(v_k'(t), v_{h_k}) + a_{h_k}(u_k(t), v_{h_k}) = (f_k(t), v_{h_k}). \tag{3.3.20}$$

Es sollte beachtet werden, dass die Gleichung (3.3.20) nicht global erfüllt ist, sondern punktweise für jedes $t \in \left]t_{n-1}, t_n\right[$ und $n = 1, ..., N_k$ zu verstehen ist. Ferner folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T])$ sowie $v_{h_k} \in V_{h_k}$

$$\begin{aligned} \int_0^T (v_k(t), v_{h_k})\,\psi'(t)\,dt &= \sum_{n=1}^{N_k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}(t - t_n) + u_k^n, v_{h_k} \right) \psi'(t)\,dt \\ = \quad & \sum_{n=1}^{N_k} \left((u_k^n, v_{h_k})\,\psi(t_n) - \left(u_k^{n-1}, v_{h_k}\right)\psi(t_{n-1}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau_k}, v_{h_k} \right) \psi(t)\,dt \right) \\ = \quad & \left(u_k^{N_k}, v_{h_k}\right)\psi(T) - \left(u_k^0, v_{h_k}\right)\psi(0) - \int_0^T (v_k'(t), v_{h_k})\,\psi(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Da das äußere Approximationsschema für V die Eigenschaften (b.2) und (b.3) besitzt, folgt für alle $\psi \in \mathcal{C}([0,T])$ und $v \in V$ aus Lemma 3.3.2

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T |r_{h_k}(v\psi(t)) - v\psi(t)|^p\,dt = 0. \tag{3.3.22}$$

Die abstrakte Funktion f_k konvergiert in $\mathrm{L}^q(0,T,H)$ stark gegen f. Demgemäß folgt aus den Konvergenzresultaten (3.3.17) sowie (3.3.22) und Lemma A.1.1 (ii) für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\left]0,T\right[)$ und $v \in V$

$$\begin{aligned} & \lim_{k'\to\infty} \left(-\int_0^T \left(v_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\right)\varphi'(t)\,dt + \int_0^T \left(f_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\right)\varphi(t)\,dt \right) \\ = \quad & -\int_0^T (u(t), v)\,\varphi'(t)\,dt + \int_0^T \langle f(t), v\rangle\,\varphi(t)\,dt. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung, den Konvergenzresultat (3.3.19) und den Relationen (3.3.20) und (3.3.21) ergibt sich für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\left]0,T\right[)$ und $v \in V$

$$\begin{aligned} & -\int_0^T (u(t), v)\,\varphi'(t)\,dt \\ = \quad & \lim_{k'\to\infty} -\int_0^T \left(v_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\right)\varphi'(t)\,dt = \lim_{k'\to\infty} \int_0^T \left(v_{k'}'(t), r_{h_{k'}}v\right)\varphi(t)\,dt \\ = \quad & \lim_{k'\to\infty} \left(\int_0^T \left(f_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\right)\varphi(t)\,dt - \int_0^T a_{h_{k'}}\left(u_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\right)\varphi(t)\,dt \right) \\ = \quad & \int_0^T \langle f(t) - a(t), v\rangle\,\varphi(t)\,dt. \end{aligned}$$

Infolgedessen ist $f - a \in \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ gemäß Theorem 1.1.1 die verallgemeinerte Ableitung von u. Also ist $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$.

Da (V,H,V^*) ein Gelfand-Dreier ist, erweist sich für alle $v \in \mathcal{W}^p(0,T)$ und $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T];H)$ die folgende verallgemeinerte Regel partieller Integration

$$\int_{t_1}^{t_2} (v(t), \psi'(t)) + (v'(t), \psi(t))\, dt = (v(t_2), \psi(t_2)) - (v(t_1), \psi(t_1)) \tag{3.3.23}$$

als gültig, wobei $0 \le t_1 < t_2 \le T$ sind[3]. Aus den Relationen (3.3.20) und (3.3.21), der verallgemeinerten Regel partieller Integration (3.3.23), und der Identität $u' = f - a$ folgt für alle $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T])$ sowie $v \in V$

$$\begin{aligned}
&\big(u(T), r_{h_{k'}}v\big)\psi(T) - \big(u(0), r_{h_{k'}}v\big)\psi(0)\\
= &\int_0^T \Big(\big(u'(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi(t) + \big(u(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi'(t)\Big)\, dt\\
= &\int_0^T \big(f(t) - f_{k'}(t) - a(t) + v_{k'}'(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi(t)\, dt\\
&+ \int_0^T a_{h_{k'}}\big(u_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi(t)\, dt + \int_0^T \big(u(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi'(t)\, dt\\
= &\int_0^T \big(f(t) - f_{k'}(t) - a(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi(t)\, dt\\
&+ \int_0^T a_{h_{k'}}\big(u_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi(t)\, dt + \int_0^T \big(u(t) - v_{k'}(t), r_{h_{k'}}v\big)\psi'(t)\, dt\\
&+ \Big(u_{k'}^{N_{k'}}, r_{h_{k'}}v\Big)\psi(T) - \big(u_{k'}^0, r_{h_{k'}}v\big)\psi(0).
\end{aligned}$$

Die Folge der Startwerte $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in H stark gegen den Anfangswert u_0 und f_k konvergiert in $\mathrm{L}^q(0,T;H)$ stark gegen f. Dementsprechend folgt für $k' \to \infty$ aus den Konvergenzresultaten (3.3.6), (3.3.16), (3.3.17), (3.3.19) sowie (3.3.22) und Lemma A.1.1 (ii) die Gleichung

$$(u(T), v)\psi(T) - (u(0), v)\psi(0) = (\xi, v)\psi(T) - (u_0, v)\psi(0).$$

Werden in dieser Gleichung für ψ die speziellen Funktionen $\psi_1(t) = T - t$ und $\psi_2(t) = t$ eingesetzt, folgt aus der der Dichtheit von V in H

$$(u(T) - \xi, v) = 0 \;\text{ und }\; (u(0) - u_0, v) = 0 \;\text{ für alle } v \in H.$$

[3]Ist (V,H,V^*) ein Gelfand-Dreier, gilt für alle $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T];V)$ und $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T];H)$

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t), \psi(t)) = (\varphi'(t), \psi(t)) + (\varphi(t), \psi'(t)).$$

Folglich ist (3.3.23) für alle $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T];V)$ und $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T];H)$ erfüllt. Da $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ ist, liegt $\mathcal{C}^1([0,T];V)$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ dicht (vergleiche Roubíček [32, Kapitel 7, Lemma 7.2]). Also bleibt (3.3.23) für alle $w \in \mathcal{W}^p(0,T)$ und $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T];H)$ gültig.

Gemäß Theorem A.2.2 kann zu den Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$ ein beschränkter, monotoner, hemistetiger, koerzitiver Operator $\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;V) \to \mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ mit

$$\langle \mathcal{A}v, w \rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)\times \mathrm{L}^p(0,T;V)} = \int_0^T \langle \mathrm{A}(v(t)), w(t) \rangle \, dt,$$

für alle $v, w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$, konstruiert werden. Da $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ ist und $u' = f - a$ sowie $u(0) = u_0$ gilt, ist u die Lösung des kontinuierlichen Problems 3.0.1, wenn die Identität

$$\mathcal{A}u = a$$

gilt. Im Folgenden wird mit dem Monotonie-Trick von Minty diese Identität nachgewiesen.

In jeden reflexiven Raum ist eine schwach*-konvergente Folge schwach konvergent und umgekehrt. Da H ein Hilbert-Raum ist, ist der Raum $\mathrm{L}^p(0,T;H)$ reflexiv (vergleiche Zeidler [40, Kapitel 23, Proposition 23.7 (c)]). Also folgt aus den Konvergenzresultat (3.3.17)

$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;H) \quad \text{für } k' \to \infty.$$

Des Weiteren konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;H^*)$ stark gegen f. Daher folgt aus Lemma A.1.1 (i)

$$\lim_{k'\to\infty} \int_0^T (f_{k'}(t), u_{k'}(t)) \, dt = \int_0^T (f(t), u(t)) \, dt. \tag{3.3.24}$$

Im Beweis von Theorem 2.2.1 wurde die Abschätzung (2.2.21) gezeigt. Analog kann die folgende Abschätzung nachgewiesen werden

$$\int_0^T (u'(t), u(t)) \, dt \le \liminf_{k'\to\infty} \int_0^T (v'_{k'}(t), u_{k'}(t)) \, dt. \tag{3.3.25}$$

Ebenso kann Analog zum Nachweis von (2.2.23) die folgende Abschätzung nachgewiesen werden

$$\int_0^T \langle a(t), u(t) \rangle \, dt \quad \ge \quad \limsup_{k'\to\infty} \int_0^T a_{h_{k'}}(u_{k'}(t), u_{k'}(t)) \, dt. \tag{3.3.26}$$

Dazu sind die Relation (3.3.20), die Abschätzungen (3.3.24), (3.3.25) und die Identität $f - u' = a$ erforderlich.

Sei $w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ ein beliebiges, fest gewähltes Element. Da das äußere Approximationsschema für V stabil, zulässig ist und die Eigenschaften (b.2) und (b.3) besitzt, konvergiert gemäß Lemma 3.3.2 $p_{h_k} r_{h_k} w$ in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ für $k \to \infty$ stark gegen $\varpi(w)$. Die Folge $p_{h_{k'}} u_{k'}$ konvergiert gemäß (3.3.18) in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ für $k' \to \infty$ schwach gegen $\varpi(u)$. Da für jedes $h \in \mathcal{H}$ der Prolongationsoperator p_h und Synchronisationsoperator ϖ linear sind, folgt

$$p_{h_{k'}}\left(u_{k'} - r_{h_{k'}} w\right) \rightharpoonup \varpi(u-w) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k' \to \infty. \tag{3.3.27}$$

Jede Abbildung aus der Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ besitzt die Eigenschaften (a.1) bis (a.5). Insofern ist für jedes beliebige fest, gewählte $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung a_{h_k} im zweiten Argument linear und besitzt die diskrete Monotonieeigenschaft (3.2.4). Demgemäß ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_0^T a_{h_{k'}}\left(u_{k'}(t), u_{k'}(t)\right) dt \\
\geq\ &\int_0^T a_{h_{k'}}\left(u_{k'}(t), r_{h_{k'}} w(t)\right) + a_{h_{k'}}\left(r_{h_{k'}} w(t), u_{k'}(t) - r_{h_{k'}} w(t)\right) dt.
\end{aligned}$$

Die Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ ist eine konsistente Approximation an den zugrunde liegenden Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$. Also ist die Bedingung (c.1) erfüllt und es folgt aus der obigen Abschätzung und den Konvergenzresultaten (3.3.19), (3.3.26) sowie (3.3.27)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle a(t), u(t)\rangle\, dt \geq \limsup_{k'\to\infty} \int_0^T a_{h_{k'}}\left(u_{k'}(t), u_{k'}(t)\right) dt \\
\geq\ &\limsup_{k'\to\infty} \int_0^T a_{h_{k'}}\left(u_{k'}(t), r_{h_{k'}} w(t)\right) + a_{h_{k'}}\left(r_{h_{k'}} w(t), u_{k'}(t) - r_{h_{k'}} w(t)\right) dt \\
\geq\ &\int_0^T \langle a(t), w(t)\rangle\, dt + \liminf_{k'\to\infty} \int_0^T a_{h_{k'}}\left(r_{h_{k'}} w(t), u_{k'}(t) - r_{h_{k'}} w(t)\right) dt \\
\geq\ &\int_0^T \langle a(t), w(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle \mathrm{A} w(t), u(t) - w(t)\rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Sei $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ ein beliebiges, fest gewähltes Element und $\theta \in\,]0,1]$. Dann ergibt sich für $w_1 = u - \theta v$

$$\int_0^T \langle a(t), v(t)\rangle\, dt \geq \int_0^T \langle \mathrm{A}(u(t) - \theta v(t)), v(t)\rangle\, dt$$

und für $w_2 = u + \theta v$

$$\int_0^T \langle a(t), v(t)\rangle\, dt \leq \int_0^T \langle \mathrm{A}(u(t) + \theta v(t)), v(t)\rangle\, dt.$$

Aufgrund der Hemistetigkeit des Operator $\mathcal{A}$ ergibt sich für $\theta \to 0$ die Abschätzung

$$\int_0^T \langle \mathrm{A}u(t) - a(t), v(t)\rangle \, dt \leq 0 \leq \int_0^T \langle \mathrm{A}u(t) - a(t), v(t)\rangle \, dt.$$

Also gilt die Identität $\mathcal{A}u = a$. Infolgedessen ist u die Lösung des kontinuierlichen Problems 3.0.1.

Damit ist die Aussage von Theorem 3.3.1 für eine Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ gültig. Nun kann wie im Beweis von Theorem 2.2.1 mit einem Widerspruchsbeweis und den Lemmata A.1.4 sowie A.1.5 nachgewiesen werde, dass die Konvergenzbedingungen (3.3.17), (3.3.18) und (3.3.19) für die gesamte Folge $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ gelten. □

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$ hemistetig ist, der Monotoniebedingung (2.3.9) und der $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung (1.2.1) genügt. Unter diesen Vorrausetzungen ist es erforderlich die Approximation an den Operator A anzupassen. Wie bisher erfolgt die Approximation an den Operator A durch eine Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ von Abbildungen

$$a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}.$$

Eine Abbildung a_h besitze die Eigenschaften (a.1), (a.2), (a.3) und (a.5) für jedes $h \in \mathcal{H}$. Anstelle der Eigenschaft (a.4), besitze a_h für jedes $h \in \mathcal{H}$ die folgende Eigenschaft:

(a.4*) Diskrete Monotoniebedingung: Für alle $v_h, w_h \in V_h$ gilt

$$a_h(v_h, v_h - w_h) - a_h(w_h, v_h - w_h) \geq \varrho_0 \|v_h - w_h\|_{V_h}^p, \tag{3.3.28}$$

wobei $\varrho_0 > 0$ eine Konstante ist.

Besitzt eine Abbildung a_h für ein $h \in \mathcal{H}$ die Eigenschaft (a.4*), so besitzt a_h auch die Eigenschaft (a.4).

Nun kann eine Verfeinerung der Konvergenzresultate aus Theorem 3.3.1 für einen Operator, welcher der Monotoniebedingung (2.3.9) genügt angegeben werden.

Korollar 3.3.1. *Der Operator* $\mathrm{A} : V \to V^*$ *sei ein hemistetiger Operator, welcher der Monotoniebedingung* (2.3.9) *und der* $(p-1)$*-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung* (1.2.1) *genüge. Es sei* $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ *das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für* V *und* $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ *die zugrunde liegende Approximation an den Operator* A. *Das äußere Approximationsschema besitze die Eigenschaften (b.1) bis (b.4) und* $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ *sei eine konsistente Approximation an den Operator* A. *Es sei* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge abstrakter Funktionen* (3.3.1). *Die Folge der Startwerte* $(u_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H$ *konvergiere in* H *stark gegen den Anfangswert* $u_0 \in H$, *aus Problem 3.0.1 und es sei* $F \hookrightarrow H^\sigma$ *für ein* $\sigma \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Dann konvergiert die Folge* $(p_{h_k} u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ *und* $\mathrm{L}^p(0,T;H^\sigma)$ *stark gegen* $\varpi(u)$, *wobei* u *die Lösung des kontinuierlichen Problems 3.0.1 ist.*

Beweis. Aus Theorem 3.3.1 folgt

$$p_{h_k} u_k \rightharpoonup \varpi(u) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;V) \quad \text{für } k \to \infty \tag{3.3.29}$$

und für alle $v \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T a_{h_k}(u_k(t), r_k v(t))\, dt = \int_0^T \langle \mathrm{A} u(t), v(t) \rangle\, dt, \tag{3.3.30}$$

wobei $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$ die Lösung des kontinuierlichen Problems 3.0.1 ist.

Das äußere Approximationsschema für V ist stabil, zulässig und besitzt die Eigenschaften (b.2) und (b.3). Daher konvergiert gemäß Lemma 3.3.2 die Folge $(p_{h_k} r_{h_k} u)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ für $k \to \infty$ stark gegen $\varpi(u)$. Ferner konvergiert gemäß (3.3.29) die Folge $(p_{h_k} u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^p(0,T;F)$ für $k \to \infty$ schwach gegen $\varpi(u)$. Da für jedes $h \in \mathcal{H}$ der Prolongationsoperator p_h und Synchronisationsoperator ϖ linear sind, folgt

$$p_{h_k} r_{h_k} u \to \varpi(u) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k \to \infty \tag{3.3.31}$$

und

$$p_{h_k}(u_k - r_{h_k} u) \rightharpoonup \varpi(u - u) = 0 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k \to \infty. \tag{3.3.32}$$

Da die abstrakte Funktion u eine Lösung des kontinuierlichen Problems 3.0.1 ist, folgt aus der Identität (3.3.20), den Abschätzungen (3.3.24) sowie (3.3.25) und den Konvergenzresultat (3.3.30)

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \int_0^T a_{h_k}(u_k(t), u_k(t) - r_{h_k} u(t))\, dt \\
\leq\ & \limsup_{k\to\infty} \int_0^T (f_k(t), u_k(t))\, dt - \liminf_{k\to\infty} \int_0^T (v_k'(t), u_k(t))\, dt \\
& -\liminf_{k\to\infty} \int_0^T a_{h_k}(u_k(t), r_{h_k} u(t))\, dt \\
\leq\ & \int_0^T (f(t) - u'(t) - \mathrm{A} u(t), u(t))\, dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Des Weiteren ist die Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ eine konsistente Approximation an den zugrunde liegenden Operator $\mathrm{A} : V \to V^*$. Dementsprechend ist die Bedingung (c.1) erfüllt und es folgt aus den Konvergenzresultat (3.3.32)

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k\to\infty} \int_0^T a_{h_k}(r_{h_k} u(t), u_k(t) - r_{h_k} u(t))\, dt \\
\geq\ & \int_0^T \langle \mathrm{A} u(t), u(t) - u(t) \rangle\, dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

Jede Abbildung aus der Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ besitzt die Eigenschaften (a.1) und (a.4*). Insofern ist für jedes beliebige fest, gewählte $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung a_{h_k} im zweiten Argument linear und besitzt die diskrete Monotonieeigenschaft (3.3.28). Des Weiteren ist das äußere Approximationsschema für V stabil. Dementsprechend gilt

$$\|p_{h_k}\|^p_{\mathcal{L}(V_h,F)} < \infty.$$

Folglich liefern die Abschätzungen (3.3.33) und (3.3.34)

$$\begin{aligned}
&0 \leq \limsup_{k\to\infty} \varrho_0 \left\|p_{h_k} u_k - p_{h_k} r_{h_k} u\right\|^p_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} \\
\leq\ & \limsup_{k\to\infty} \varrho_0 \left\|p_{h_k}\right\|^p_{\mathcal{L}(V_h,F)} \left\|u_k - r_{h_k} u\right\|^p_{\mathrm{L}^p\left(0,T;V_{h_k}\right)} \\
\leq\ & \limsup_{k\to\infty} \left\|p_{h_k}\right\|^p_{\mathcal{L}(V_h,F)} \int_0^T a_{h_k}\left(u_k(t), u_k(t) - r_{h_k} u(t)\right) dt \\
&-\liminf_{k\to\infty} \left\|p_{h_k}\right\|^p_{\mathcal{L}(V_h,F)} \int_0^T a_{h_k}\left(r_{h_k} u(t), u_k(t) - r_{h_k} u(t)\right) dt \leq 0. \quad (3.3.35)
\end{aligned}$$

Folglich ergibt sich aus (3.3.31) und (3.3.35) das Konvergenzresultat

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \left\|p_{h_k} u_k - \varpi(u)\right\|_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} \\
\leq\ & \lim_{k\to\infty} \left\|p_{h_k} u_k - p_{h_k} r_{h_k} u\right\|_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} + \lim_{k\to\infty} \left\|p_{h_k} r_{h_k} u - \varpi(u)\right\|_{\mathrm{L}^p(0,T;F)} = 0.
\end{aligned}$$

Das äußere Approximationsschema für V besitzt die Eigenschaft (b.3). Daher ist $F \hookrightarrow H^\sigma$ für ein $\sigma \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Folglich ist $\mathrm{L}^p(0,T;F) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(0,T;H^\sigma)$ (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (h)]). Also folgt aus der obigen Abschätzung

$$p_{h_k} u_k \to \varpi(u) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } k \to \infty$$

und

$$p_{h_k} u_k \to \varpi(u) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;H^\sigma) \quad \text{für } k \to \infty.$$

□

3.4. Approximation einer eindimensionalen, instationären p-Laplace-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen

Zur Illustration des in diesem Kapitel konstruierten Näherungsverfahrens wird ein eindimensionales, instationäres p-Laplace-Gleichungsproblem mit Dirichlet-Randbedingungen betrachtet.

Zum Studium des Problems werden der Sobolev-Raum $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ versehen mit der Norm

$$\|v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)} = \|\mathrm{D}_x u\|_{\mathrm{L}^p(0,1)}\,, \text{ für alle } v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)\,,$$

der Lebesgue-Raum $\mathrm{L}^2(0,1)$ und der Dualraum von $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ verwendet. Der Dualraum von $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ wird mit $\mathrm{W}_0^{-1,q}(0,1)$ bezeichnet. Diese Räume bilden einen Gelfand-Dreier (vergleiche Brézis [10, Kapitel VIII, Abschnitt 3]). Des Weiteren seien $\mathcal{X} = \mathrm{L}^p\left(0,T;\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)\right)$ und $\mathcal{X}^* = \mathrm{L}^q\left(0,T;\mathrm{W}_0^{-1,q}(0,1)\right)$.

Problem 3.4.1. Zu einer gegebenen reellwertigen Funktion $u_0 \in \mathrm{L}^2(0,1)$ und einer abstrakten Funktion $f \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathrm{L}^2(0,1))$ wird ein $u \in \{u \in \mathcal{X} \mid u_t \in \mathcal{X}^*\}$ gesucht, so dass

$$\begin{aligned} u_t - \mathrm{D}_x\left(|\mathrm{D}_x u|_{\mathbb{R}}^{p-2}\,\mathrm{D}_x u\right) &= f \text{ in }]0,1[\times]0,T[\,,\\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 \text{ für alle } t \in]0,T[\,,\\ u(\cdot,0) &= u_0 \text{ in }]0,1[\end{aligned}$$

gilt.

Für alle $v, w \in \mathrm{L}^p(0,1)$ kann durch

$$\langle \mathrm{A}v, w\rangle_{\mathrm{L}^q(0,1)\times\mathrm{L}^p(0,1)} = \int_0^1 |\mathrm{D}_x v(x)|_{\mathbb{R}}^{p-2}\,\mathrm{D}_x v(x)\,\mathrm{D}_x w(x)\,dx$$

ein Operator $\mathrm{A} : \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1) \to \mathrm{W}_0^{-1,q}(0,1)$ konstruiert werden (vergleiche Růžička [33, Kapitel 3, 1.26 Lemma]). Der so konstruierte Operator ist strikt monoton und stetig (vergleiche Růžička [33, Kapitel 3, 1.28 Lemma]). Ferner ergeben sich aus der Hölder-Ungleichung für alle $v, w \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\left|\langle \mathrm{A}v, w\rangle_{\mathrm{L}^q(0,1)\times\mathrm{L}^p(0,1)}\right|_{\mathbb{R}} \leq \int_0^1 |\mathrm{D}_x v(x)|_{\mathbb{R}}^{p-1}\,|\mathrm{D}_x w(x)|_{\mathbb{R}}\,dx\\ \leq\ & \|\mathrm{D}_x v\|_{\mathrm{L}^p(0,1)}^{p-1}\,\|\mathrm{D}_x w\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} = \|v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)}^{p-1}\,\|w\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

und

$$\langle \mathrm{A}v, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,1)\times\mathrm{L}^p(0,1)} = \int_0^1 |\mathrm{D}_x v(x)|_{\mathbb{R}}^{p}\,dx = \|v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)}^{p}\,. \tag{3.4.2}$$

Also genügt der Operator A einer $(p-1)$-Wachstums- sowie p-Koerzitivitätsbedingung. Mit dem Operator A kann das Problem 3.4.1 in das folgende Evolutionsgleichungsproblem überführt werden.

Problem 3.4.2. Zu einer gegebenen reellwertigen Funktion $u_0 \in \mathrm{L}^2(0,1)$ und einer abstrakten Funktion $f \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathrm{L}^2(0,1))$ wird ein $u \in \{u \in \mathcal{X} \mid u_t \in \mathcal{X}^*\}$ mit $u(0) = u_0$ gesucht, so dass für alle $v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_{\mathrm{L}^2(0,1)} + \langle \mathrm{A}u, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,1)\times\mathrm{L}^p(0,1)} \quad = \quad \langle f, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,1)\times\mathrm{L}^p(0,1)}$$

gilt.

Gemäß Theorem 1.2.1 besitzt das Problem 3.4.2 genau eine Lösung. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das in Abschnitt 3.2 und 3.3 konstruierte Näherungsverfahren auf das Evolutionsgleichungsproblem 3.4.2 angewendet werden kann. Dazu ist es erforderlich ein stabiles, zulässiges, äußeres Approximationsschema für den Raum $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ anzugeben. Das Schema sollte die Eigenschaften (b.1) bis (b.4) aus Abschnitt 3.3 besitzen. Des Weiteren wird eine konsistente Approximation an den Operator A benötigt. Jede Abbildung, aus der Approximation an den Operator A, sollte die Eigenschaften (a.1) bis (a.5) aus Abschnitt 3.2 besitzen.

Im Folgenden sei $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ das in Beispiel 3.1.2 konstruierte stabile, zulässige, äußere Approximationsschema für den Raum $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$.

Da $p \geq 2$ ist, ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung und der diskreten Poincaré-Friedrich-Ungleichung (3.1.2) für alle $v_h \in V_h$

$$\|v_h\|_{\mathrm{L}^2(0,1)} \leq \|v_h\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} \leq c\,\|v_h\|_{V_h},$$

wobei $c > 0$ eine von $h \in \mathcal{H}$ unabhängige Konstante ist. Demgemäß ist die Vorraussetzung (3.2.1) erfüllt.

Nun werden die Eigenschaften (b.1) bis (b.4) aus Abschnitt 3.3 für das stabile, zulässige, äußere Approximationsschema $\left(\{V_h, p_h, r_h\}_{h\in\mathcal{H}}; (F, \varpi)\right)$ für $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ nachgewiesen.

zu (b.1): Der Nachweis dieser Eigenschaft erfolgt mit der Technik, die zum Beweis von Lemma 3.1.2 (ii) verwendet worden ist. Seien $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ und $\phi \in F$ mit

$$\varpi(v_n) \to \phi \quad \text{in } F \quad \text{für } n \to \infty. \tag{3.4.3}$$

Dann existieren reellwertige Funktionen $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{L}^p(0,1)$ mit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. Diese Funktionen können mit

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{\phi}_1(x) := \begin{cases} \phi_1(x), & \text{für alle } x \in \,]0,1[\,, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{\phi}_2(x) := \begin{cases} \phi_2(x), & \text{für alle } x \in \,]0,1[\,, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Die Funktionen $\widetilde{\phi}_1$ und $\widetilde{\phi}_2$ sind in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ enthalten. Da der Synchronisationsoperator für alle $v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ durch $\varpi(v) = (v, \mathrm{D}_x v)$ gegeben ist und $v_n(x) = \mathrm{D}_x v_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, ergeben sich aus (3.4.3) die Konvergenzresultate

$$v_n \to \widetilde{\phi}_1 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,1) \quad \text{für } n \to \infty$$

sowie

$$\mathrm{D}_x v_n \to \widetilde{\phi}_2 \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,1) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aus diesen Konvergenzresultaten folgt für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \widetilde{\phi}_1(x)\, \mathrm{D}_x \varphi(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n(x)\, \mathrm{D}_x\varphi(x)\, dx \\ = \quad -\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{D}_x v_n(x)\, \varphi(x)\, dx &= -\int_0^1 \widetilde{\phi}_2(x)\, \varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

Daher ist $\widetilde{\phi}_1 \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{D}_x \widetilde{\phi}_1 = \widetilde{\phi}_2$. Ferner gilt $\widetilde{\phi}_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$. Folglich ist $\widetilde{\phi}_1 \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ und für alle $x = (x_1, x_2) \in]0,1[\times]0,1[$ gilt

$$\varpi\left(\widetilde{\phi}_1\right)(x) = \left(\widetilde{\phi}_1(x_1), \widetilde{\phi}_2(x_2)\right) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1)) = \phi(x).$$

Also ist $\phi \in \varpi\left(\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)\right)$. Demgemäß ist die Menge $\varpi\left(\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)\right)$ in F abgeschlossen.

zu (b.2): Für alle $h \in \mathcal{H}$ und $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ ist der Restriktionsoperator durch

$$(r_h v)(x) := \begin{cases} v(x_i), & \text{für } x \in]x_{i-1}, x_i] \text{ und } i = 1, ..., M-1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Dieser Operator ist linear. Des Weiteren folgt aus der Hölder-Ungleichung für alle $h \in \mathcal{H}$ und $v \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$

$$\begin{aligned} \|r_h v\|_{V_h}^p &= h \sum_{i=1}^M \left| \frac{v(x_i) - v(x_{i-1})}{h} \right|_{\mathbb{R}}^p \\ &= h^{1-p} \sum_{i=1}^M \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{D}_x v(x)\, dx \right|_{\mathbb{R}}^p \leq \|v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)}^p < \infty. \end{aligned}$$

Der Raum $\mathcal{C}_0^\infty(]0,1[)$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$ (vergleiche Brézis [10, Kapitel VIII, Bemerkung 14 (i)]). Also ist für jedes $h \in \mathcal{H}$ der Restriktionsoperator in $\mathcal{L}\left(\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1), V_h\right)$ enthalten und $\|r_h\|_{\mathcal{L}\left(\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1),V_h\right)} \leq 1$ (vergleiche Werner [38, Kapitel II, Satz II.1.5). Insbesondere folgt

$$\sup_{h\in\mathcal{H}} \|r_h v\|_{\mathcal{L}\left(\mathrm{W}_0^{1,p}(0,1),V_h\right)} \leq 1.$$

zu (b.3): Sei $\phi \in F$ ein beliebiges, fest gewähltes Element. Dann existieren $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{L}^p(0,1)$ mit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. Da $p \geq 2$ ist, folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{\mathrm{L}^2(0,1)\times\mathrm{L}^2(0,1)} &= \|\phi_1\|_{\mathrm{L}^2(0,1)} + \|\phi_2\|_{\mathrm{L}^2(0,1)} \\ &\leq \|\phi_1\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} + \|\phi_2\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} = \|\phi\|_F . \end{aligned}$$

Demzufolge ist F stetig in $\mathrm{L}^2(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1)$ eingebettet.
Der Synchronisationsoperator ist durch $\varpi(v) = (v, \mathrm{D}_x v)$, für alle $v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(0,1)$, gegeben. Ferner ist für alle $h \in \mathcal{H}$ und $v_h \in V_h$ der Prolongationsoperator durch $p_h(v_h) = \left(v_h, \nabla_{x,h}^- v_h\right)$ gegeben. Demzufolge ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|r_h v - v\|_{\mathrm{L}^2(0,1)} &\leq \|r_h v - v\|_{\mathrm{L}^2(0,1)} + \left\|\left(\nabla_{x,h}^- r_h v\right)(x) - \mathrm{D}_x v\right\|_{\mathrm{L}^2(0,1)} \\ &= \|p_h r_h v - \varpi(v)\|_{\mathrm{L}^2(0,1)\times\mathrm{L}^2(0,1)} . \end{aligned}$$

zu (b.4): Für den Nachweis der Eigenschaft (b.4) wird verwendet, dass

$$\mathrm{L}^r(0,T;\mathrm{L}^r(0,1)) \cong \mathrm{L}^r(]0,1[\times]0,T[)$$

für jedes $r \in [1,\infty[$ ist (vergleiche Emmrich [16, Kapitel 7, Satz 7.1.24]). Da $F = \mathrm{L}^p(0,1) \times \mathrm{L}^p(0,1)$ ist, folgt

$$\mathrm{L}^p(0,T;F) \cong \left(\mathrm{L}^p(]0,1[\times]0,T[)\right)^2 .$$

Diese Identität kann wie die obige Isomorphie nachgewiesen werden.
Für jedes $h \in \mathcal{H}$ sei $v_h \in \mathrm{L}^p(0,T;V_h) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(0,1))$, ein beliebiges, fest gewähltes Element. Es gebe ein $v \in \mathcal{X}$, ein $v^* \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(0,1))$ und eine Teilmenge $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$, so dass die folgenden Konvergenzresultate gelten

$$p_{h'} v_{h'} \rightharpoonup \varpi(v) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0 \tag{3.4.4}$$

sowie

$$v_{h'} \overset{*}{\rightharpoonup} v^* \quad \text{in } \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(0,1)) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0. \tag{3.4.5}$$

Da $\mathrm{L}^p(0,T;F) \cong \left(\mathrm{L}^p(]0,1[\times]0,T[)\right)^2$ und $v \in \mathcal{X}$ ist, ergeben sich aus (3.4.4) die Konvergenzresultate

$$v_{h'} \rightharpoonup v \quad \text{in } \mathrm{L}^p(]0,1[\times]0,T[) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0 \tag{3.4.6}$$

sowie

$$\nabla^-_{x,h'} v_{h'} \rightharpoonup \mathrm{D}_x v \quad \text{in } \mathrm{L}^p\left(]0,1[\times]0,T[\right) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0.$$

Im Sinne von (3.4.5) konvergiert die Folge $(v_{h'})_{h'\in\mathcal{H}}$ in $\mathrm{L}^2\left(]0,1[\times]0,T[\right)$ schwach* gegen $v*$. Der Raum $\mathrm{L}^2\left(0,T;\mathrm{L}^2\left(0,1\right)\right) \cong \mathrm{L}^2\left(]0,1[\times]0,T[\right)$ ist ein Hilbert-Raum, weil der $\mathrm{L}^2\left(0,1\right)$ ein Hilbert-Raum ist. Insofern ergibt sich das Konvergenzresultat

$$v_{h'} \rightharpoonup v^* \quad \text{in } \mathrm{L}^2\left(]0,1[\times]0,T[\right) \quad \text{für } \mathcal{H}' \ni h' \to 0. \tag{3.4.7}$$

Dementsprechend folgt aus (3.4.6) und (3.4.7), dass $v = v^*$ ist.

Folglich besitzt das zugrunde liegende stabile, zulässige, äußere Approximationsschema die Eigenschaften (b.1) bis (b.4). Des Weiteren wird eine Approximation an den Operator A benötigt. Für jedes $h \in \mathcal{H}$ kann durch

$$a_h\left(v_h, w_h\right) = \int_0^1 \left|\nabla^-_{x,h} v_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p-2} \nabla^-_{x,h} v_h\left(x\right) \nabla^-_{x,h} w_h\left(x\right) dx, \text{ für alle } v_h, w_h \in V_h,$$

eine Abbildung $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ angegeben werden. Nun wird gezeigt, dass eine so konstruierte Abbildung die Eigenschaften (a.1) bis (a.5) besitzt und $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ eine konsistente Approximation an den Operator A ist. Das die Abbildungen a_h für alle $h \in \mathcal{H}$ die Eigenschaft (a.1) besitzen ist evident.

zu (a.2): Für alle $h \in \mathcal{H}$ und $v_h, w_h \in V_h$ folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left|a_h\left(v_h, w_h\right)\right|_{\mathbb{R}} &\leq \int_0^1 \left|\nabla^-_{x,h} v_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p-1} \left|\nabla^-_{x,h} w_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}} dx \\ &\leq \left\|v_h\right\|_{V_h}^{p-1} \left\|w_h\right\|_{V_h}. \end{aligned}$$

zu (a.3): Für alle $h \in \mathcal{H}$ und $v_h \in V_h$ folgt

$$a_h\left(v_h, v_h\right) = \int_0^1 \left|\nabla^-_{x,h} v_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p} dx = \left\|v_h\right\|_{V_h}^{p}.$$

zu (a.4): Für alle $h \in \mathcal{H}$ und $v_h, w_h \in V_h$ folgt aus der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned} & a_h\left(v_h, v_h - w_h\right) - a_h\left(w_h, v_h - w_h\right) \\ \geq & \int_0^1 \left|\nabla^-_{x,h} v_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p} - \left|\nabla^-_{x,h} v_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p-1} \left|\nabla^-_{x,h} w_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}} dx \\ & + \int_0^1 \left|\nabla^-_{x,h} w_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p} - \left|\nabla^-_{x,h} v_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}} \left|\nabla^-_{x,h} w_h\left(x\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p-1} dx \geq 0. \end{aligned}$$

zu (a.5): Für ein beliebiges fest gewähltes $h \in \mathcal{H}$ seien $u_h, v_h, w_h \in V_h$. Des Weiteren seien $\xi_n \subseteq [0,1]$ und $\xi \in [0,1]$ mit $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$. Dann ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\nabla^-_{x,h}\left(u_h - \xi_n v_h\right) - \nabla^-_{x,h}\left(u_h - \xi v_h\right)\right\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} = 0. \tag{3.4.8}$$

Die reellwertige Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto \varphi(x) = |x|_{\mathbb{R}}^{p-2} x$ ist stetig und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\varphi(x)|_{\mathbb{R}} = |x|^{p-1} = |x|^{\frac{p}{q}}.$$

Demzufolge existiert gemäß Zeidler [42, Kapitel 26, Proposition 26.6] ein beschränkter, stetiger Nemyckii-Operator

$$\begin{aligned} \mathrm{F} : \mathrm{L}^p(0,1) &\to \mathrm{L}^q(0,1) \\ v &\mapsto \varphi(v) = |v|^{p-2} v. \end{aligned}$$

Da der Oprator F stetig ist, folgt aus der Hölder-Ungleichung und den Konvergenzresultat (3.4.8)

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |a_h(u_h - \xi_n v_h, w_h) - a_h(u_h - \xi v_h, w_h)|_{\mathbb{R}} \\ \leq\ &\lim_{n\to\infty} \|\mathrm{F}(u_h - \xi_n v_h) - \mathrm{F}(u_h - \xi v_h)\|_{\mathrm{L}^q(0,1)} \|w_h\|_{\mathrm{L}^p(0,1)} = 0. \end{aligned}$$

Also besitzt die zugrunde liegende Approximation $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ an den Operator A die Eigenschaften (a.1) bis (a.5). Das nachfolgende Lemma liefert die Konsistenz der Approximation $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$.

Lemma 3.4.1. *Die Familie $(a_h)_{h\in\mathcal{H}}$ ist eine konsitente Approximation an den Operator* A.

Beweis. Wie beim Nachweis der Eigenschaft (b.4) werden die Identitäten

$$\mathrm{L}^r(0,T;\mathrm{L}^r(0,1)) \cong \mathrm{L}^r(]0,1[\times]0,T[), \text{ für alle } r \in [1,\infty[,$$

und

$$\mathrm{L}^p(0,T;F) \cong (\mathrm{L}^p(]0,1[\times]0,T[))^2$$

verwendet. Für jedes $h \in \mathcal{H}$ seien $v \in \mathcal{X}$ und $w_h \in \mathrm{L}^p(0,T,V_h)$ beliebige, fest gewählte abstrakte Funktionen. Es gebe ein $w \in \mathcal{X}$ und eine Teilmenge $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$, so dass

$$p_h w_h \rightharpoonup \varpi(w) \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;F) \quad \text{für } h \to 0. \tag{3.4.9}$$

Aufgrund der Definition des Synchronisationsoperators ϖ und des Prolongationsoperators p_h ergeben sich aus (3.4.9) die Konvergenzresultate

$$w_h \rightharpoonup w \quad \text{in } \mathrm{L}^p(]0,1[\times]0,T[) \quad \text{für } h \to 0$$

und

$$\nabla_{x,h}^- w_h \rightharpoonup \mathrm{D}_x w \quad \text{in } \mathrm{L}^p(]0,1[\times]0,T[) \quad \text{für } h \to 0. \tag{3.4.10}$$

Im Folgenden seien

$$\Lambda_h^1 : \; = \; a_h\left(r_h v, w_h\right) - \int_0^T \int_0^1 \left|\mathrm{D}_x v\left(x,t\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p-2} \mathrm{D}_x v\left(x,t\right) \nabla_{x,h}^{-} w_h\left(x,t\right) dxdt$$

und

$$\Lambda_h^2 := \int_0^T \int_0^1 \left|\mathrm{D}_x v\left(x,t\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p-2} \mathrm{D}_x v\left(x,t\right) \left(\nabla_{x,h}^{-} w_h\left(x,t\right) - \mathrm{D}_x w\left(x,t\right)\right) dxdt.$$

Da das äußere Approximationsschema für $\mathrm{W}_0^{1,p}\left(0,1\right)$ stabil und zulässig ist und $v \in \mathcal{X}$ ist, ergibt sich aus Lemma 3.3.2 das Konvergenzresultat

$$p_h r_h v \to \varpi\left(v\right) \quad \text{in } \mathrm{L}^p\left(0,T;F\right) \quad \text{für } h \to 0.$$

Aus diesen Konvergenzresultat folgt

$$r_h v \to v \quad \text{in } \mathrm{L}^p\left(\left]0,1\right[\times \left]0,T\right[\right) \quad \text{für } h \to 0$$

und

$$\nabla_{x,h}^{-} r_h v \to \mathrm{D}_x v \quad \text{in } \mathrm{L}^p\left(\left]0,1\right[\times \left]0,T\right[\right) \quad \text{für } h \to 0. \tag{3.4.11}$$

Gemäß Theorem A.2.4 kann der Nemyckii-Operator $\mathrm{F} : \mathrm{L}^p\left(0,1\right) \to \mathrm{L}^q\left(0,1\right)$, der zum Nachweis der Eigenschaft (a.5) verwendet wurde, zu einen beschränkten, stetigen Operator $\mathcal{F} : \mathrm{L}^p\left(\left]0,1\right[\times \left]0,T\right[\right) \to \mathrm{L}^q\left(\left]0,1\right[\times \left]0,T\right[\right)$ mit

$$\mathcal{F}\left(\phi\right)\left(x,t\right) = \mathrm{F}\left(\phi\left(x,t\right)\right),$$

für alle $\phi \in \mathrm{L}^p\left(\left]0,1\right[\times \left]0,T\right[\right)$ und $\left(x,t\right) \in \left]0,1\right[\times \left]0,T\right[$, fortgesetzt werden. Damit ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\Lambda_h^1\right|_{\mathbb{R}} &= \left|\int_0^T \int_0^1 \left(\mathrm{F}\left(\nabla_{x,h}^{-} r_h v\left(x,t\right)\right) - \mathrm{F}\left(\mathrm{D}_x v\left(x,t\right)\right)\right) \nabla_{x,h}^{-} w_h\left(x,t\right) dxdt\right|_{\mathbb{R}} \\ &\leq \left\|\mathcal{F}\left(\nabla_{x,h}^{-} r_h v\right) - \mathcal{F}\left(\mathrm{D}_x v\right)\right\|_{\mathrm{L}^q\left(\left]0,1\right[\times\left]0,T\right[\right)} \left\|\nabla_{x,h}^{-} w_h\right\|_{\mathrm{L}^p\left(\left]0,1\right[\times\left]0,T\right[\right)} \end{aligned}$$

Des Weiteren folgt aus (3.4.10), dass die Folge $\left(\nabla_{x,h}^{-} w_h\right)_{h\in\mathcal{H}}$ in $\mathrm{L}^p\left(\left]0,1\right[\times \left]0,T\right[\right)$ beschränkt ist. Da der Operator $\mathcal{F}$ stetig ist folgt aus den Konvergenzresultat (3.4.11) und der obigen Abschäzung, dass $|\Lambda_h^1|_{\mathbb{R}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ferner ergibt sich die Identität

$$\begin{aligned} \Lambda_h^2 &= \int_0^T \int_0^1 \left|\mathrm{D}_x v\left(x,t\right)\right|_{\mathbb{R}}^{p-2} \mathrm{D}_x v\left(x,t\right) \left(\nabla_{x,h}^{-} w_h\left(x,t\right) - \mathrm{D}_x w\left(x,t\right)\right) dxdt \\ &= \int_0^T \int_0^1 \mathrm{F}\left(\mathrm{D}_x v\left(x,t\right)\right) \left(\nabla_{x,h}^{-} w_h\left(x,t\right) - \mathrm{D}_x w\left(x,t\right)\right) dxdt \\ &= \left\langle \mathcal{F}\left(\mathrm{D}_x v\right), \nabla_{x,h}^{-} w_h - \mathrm{D}_x w\right\rangle_{\mathrm{L}^q\left(\left]0,1\right[\times\left]0,T\right[\right)\times\mathrm{L}^p\left(\left]0,1\right[\times\left]0,T\right[\right)}. \end{aligned}$$

Aus dieser Identität und den Konvergenzresultat (3.4.10) folgt, dass $|\Lambda_h^2|_{\mathbb{R}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Also gilt

$$\lim_{h\to 0} \left| \int_0^T a_h\left(r_h v\left(t\right), w_h\left(t\right)\right) - \left\langle \mathrm{A} v\left(t\right), w\left(t\right)\right\rangle dt \right|_{\mathbb{R}} = \lim_{h\to 0} \left|\Lambda_h^1 + \Lambda_h^2\right|_{\mathbb{R}} = 0.$$

Dementsprechend ist die Familie $\left(a_h\right)_{h\in\mathcal{H}}$ eine konsitente Approximation an den Operator A. □

Insofern kann das in Abschnitt 3.2 und 3.3 konstruierte Näherungsverfahren auf das Evolutionsgleichungsproblem 3.4.2 angewendet werden.

A. Analytische Hilfsmittel

Die in dieser Arbeit vorgestellten Resultate setzen diverse Werkzeuge aus Teilgebieten der Analysis voraus. Einige Begriffe und Sätze können zitiert werden. Andere verlangen eine genauere Erörterung. Im Folgenden werden die wichtigsten Hilfsmittel vorgestellt.

A.1. Konvergenzarten und Sätze aus der Funktionalanalysis

In einem reellen, normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ kann eine Folge auf unterschiedliche Weise konvergieren. Im Allgemeinen wird zwischen starker, schwacher und schwach*-Konvergenz unterschieden. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark gegen einen Grenzwert $x \in X$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$. Für die starke Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ gegen einen Punkt x hat sich die Schreibweise $x_n \to x$ etabliert. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen einen Punkt x, wenn für alle Funktionale $f \in X^*$ gilt, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle_{X^*\times X} = \langle f, x\rangle_{X^*\times X}$. Für die schwache Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ gegen einen Punkt x wird die Schreibweise $x_n \rightharpoonup x$ verwendet. Die schwach*-Konvergenz bezieht sich auf den topologischen Dualraum X^* des normierten Raums X. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ konvergiert schwach* gegen ein Funktional f, wenn für alle $v \in X$ gilt, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, v\rangle_{X^*\times X} = \langle f, v\rangle_{X^*\times X}$. Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ schwach* gegen ein Funktional f, so wird die Schreibweise $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ verwendet.

Aus den Satz von Banach-Steinhaus folgt, dass in jedem normierten Raum eine schwach konvergente Folge beschränkt ist (vergleiche Werner [38, Kapitel IV, Korollar IV.2.3]). Ebenso kann die Beschränktheit schwach*-konvergenter Teilfolgen gezeigt werden. Dafür muss der Primalraum ein Banach-Raum sein (vergleiche Werner [38, Kapitel IV, Korollar IV.2.4).

Da schwach und schwach*-konvergente Folgen aus einem Banach-Raum beschränkt sind, kann eine Aussage über das Konvergenzverhalten der dualen Paarung zwischen einer stark und schwach oder schwach* konvergenten Folge getroffen werden.

Lemma A.1.1. *Sei* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein reeller Banach-Raum,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$*. Dann gilt:*

(i) *Konvergiert* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach in* X *gegen ein* $x \in X$ *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *stark gegen ein* $f \in X^*$ *folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\langle f_n, x_n\rangle_{X^*\times X} - \langle f, x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} = 0.$$

(ii) *Konvergiert* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *stark in* X *gegen ein* $x \in X$ *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach** *gegen ein* $f \in X^*$ *folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\langle f_n, x_n\rangle_{X^*\times X} - \langle f, x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} = 0.$$

Beweis. Zu (i): Als schwach konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X beschränkt. Insofern ergibt sich aus der starken Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in X^*, dass $\|f_n - f\|_{X^*} \|x_n\|_X$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Nun folgt aus der schwachen Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x in X

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left|\langle f_n, x_n\rangle_{X^*\times X} - \langle f, x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} \\
\leq\ &\lim_{n\to\infty} \left|\langle f_n - f, x_n\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} + \left|\langle f, x_n - x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} \\
\leq\ &\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{X^*} \|x_n\|_X + \left|\langle f, x_n - x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} = 0.
\end{aligned}$$

Zu (ii): Da X ein Banach-Raum ist und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* schwach*-konvergiert, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* beschränkt. Damit konvergiert $\|x_n - x\|_{X^*} \|f_n\|_X$ für $n \to \infty$ gegen Null, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X stark gegen x konvergiert. Demgemäß folgt aus der schwach*-Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f in X^*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left|\langle f_n, x_n\rangle_{X^*\times X} - \langle f, x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} \\
\leq\ &\lim_{n\to\infty} \left|\langle f_n, x_n - x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} + \left|\langle f_n - f, x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} \\
\leq\ &\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*} \|x_n - x\|_X + \left|\langle f_n - f, x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} = 0.
\end{aligned}$$

□

Im folgenden werden für spezielle reelle Banach-Räume Eigenschaften schwach und schwach*-konvergenter Folgen angegeben.

Definition A.1.1. Ein reeller Banach-Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt:

(i) separabel, wenn X eine abzählbare Teilmenge enthält, die in X dicht liegt.

(ii) reflexiv, wenn X in kanonischer Weise[1] mit seinem Bidualraum identifiziert werden kann.

(iii) gleichmäßig konvex, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ mit $\|x\|_X$, $\|y\|_X \leq 1$ und $\|x - y\|_X \geq \varepsilon$ folgt

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X \leq 1 - \delta.$$

Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, reflexiver Banach-Raum, so existiert zu jedem $x \in X$ genau ein $\varphi \in X^{**}$ mit $\langle \varphi, f \rangle_{X^{**} \times X^*} = \langle f, x \rangle_{X^* \times X}$ für alle $f \in X^*$. Daher konvergiert in diesem Fall eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ genau dann schwach* gegen ein Funktional f, wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen f konvergiert.

Lemma A.1.2. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banach-Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$. Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen x, gilt*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|_X . \tag{A.1.1}$$

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage trivial. Ist $x \neq 0$ gilt für alle $f \in X^* \setminus \{0\}$

$$\frac{\left| \langle f, x \rangle_{X^* \times X} \right|_{\mathbb{R}}}{\|x\|_X} \leq \sup_{y \in X \setminus \{0\}} \frac{\left| \langle f, y \rangle_{X^* \times X} \right|_{\mathbb{R}}}{\|y\|_X} = \|f\|_{X^*} .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|x\|_X &\leq \frac{\left| \langle f, x \rangle_{X^* \times X} \right|_{\mathbb{R}}}{\|f\|_{X^*}} \leq \frac{1}{\|f\|_{X^*}} \left(\left| \langle f, x - x_n \rangle_{X^* \times X} \right|_{\mathbb{R}} + \left| \langle f, x_n \rangle_{X^* \times X} \right|_{\mathbb{R}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\|f\|_{X^*}} \left| \langle f, x - x_n \rangle_{X^* \times X} \right|_{\mathbb{R}} + \|x_n\|_X . \end{aligned}$$

Wird der Limes inferior für $n \to \infty$ über der obigen Abschätzung betrachtet, folgt aus der schwachen Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x die Abschätzung (A.1.1). $\square$

[1] Für jedes beliebige, fest gewählte $x \in X$ ist durch $\pi_x : X^* \to \mathbb{R}$ mit $\langle \pi_x, f \rangle_{X^{**} \times X} = \langle f, x \rangle_{X^* \times X}$ für alle $f \in X^*$ ein Funktional aus X^{**} definiert (siehe Werner [38, Kapitel III, Abschnitt 3]). Dann kann durch $\pi : X \to X^{**}$ mit $x \mapsto \pi_x$ für alle $x \in X$ eine kanonische Abbildung zwischen X und dem zugehörigen Bidualraum X^{**} definiert werden. Diese Abbildung ist eine Isometrie und als solche injektiv. Ist $\pi : X \to X^{**}$ auch surjektiv, wird X als reflexiv bezeichnet. Dann ist die Umkehrabbildung von π stetig (vergleiche Werner [38, Kapitel IV, Theorem IV.3.3]). Daher ist jeder reelle, reflexive Banach-Raum isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum. Umgekehrt ist nicht jeder Banach-Raum, der isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum ist, reflexiv.

Das nachfolgende Lemma ist in Brézis [10, Kapitel III, Proposition III.30] bewiesen.

Lemma A.1.3. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, gleichmäßig konvexer Banach-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \rightharpoonup x$ in X sowie $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_X \leq \|x\|_X$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X stark gegen x.*

In jedem endlichdimensionalen, normierten Raum besitzt eine beschränkte Folge eine stark konvergente Teilfolge. Dieses Ergebnis aus der klassischen Analysis wird für unendlichdimensionale, normierte Räume nach dem Kompaktheitssatz von Riesz (vergleiche Werner [38, Kapitel I, Satz I.2.7]) hinfällig. Allerdings gilt in reflexiven Räumen ein Kompaktheitskriterium bezüglich der schwachen Topologie. Dieses Kriterium wird im folgenden Theorem angegeben.

Theorem A.1.1. *In einem reellen, reflexiven Banach-Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Ein Beweis für die Aussage des Theorems findet sich in Brézis [10, Kapitel III, Theorem III.27] oder Werner [38, Kapitel III, Theorem III.3.7]. Der Satz von Eberlein-Šmulian besagt, dass auch die Umgekehrung der Aussage korrekt ist (vergleiche Brézis [10, Kapitel III, Theorem III.28]).

Eine Folgerung aus Theorem A.1.1 ist das nachfolgende Lemma. Dazu vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel I, Lemma 5.4].

Lemma A.1.4. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, reflexiver Banach-Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen ein $x \in X$, wenn jede schwach konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.*

Für separable Räume gilt ein Kompaktheits-Kriterium bezüglich der schwach*-Topologie.

Theorem A.1.2. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, separabler Banach-Raum. Dann besitzt jede beschränkte Folge aus dem topologischen Dualraum von X eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

Die Aussage von Theorem A.1.2 ist in Kolmogorov und Fomin [27, Kapitel 4, Abschnitt 4.3, Satz 3] bewiesen.

Aus Theorem A.1.2 ergibt sich ein Analogon zu Lemma A.1.4 für separable Banach-Räume und schwach*-Konvergenz.

Lemma A.1.5. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, separabler Banach-Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ eine beschränkte Folge. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach* gegen ein $f \in X^*$, wenn jede schwach* konvergente Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f konvergiert.*

Beweis. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schwach* gegen f, existieren ein $x \in X$, eine Teilfolge $(f_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $n' \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\langle f_{n'}, x\rangle_{X^*\times X} - \langle f, x\rangle_{X^*\times X}\right|_{\mathbb{R}} \geq \varepsilon_0. \tag{A.1.2}$$

Die Folge $(f_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Daher besitzt $(f_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ gemäß Theorem A.1.2 eine schwach* konvergente Teilfolge. Diese Teilfolge konvergiert schwach* gegen f, weil alle schwach* konvergenten Teilfolgen von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f konvergieren. Die Existenz einer solchen Teilfolge widerspricht der Bedingung (A.1.2). □

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden einige Hilfsresultate, die sich auf den Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ beziehen, aufgeführt.

Lemma A.1.6. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier. Dann gilt für alle $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = \langle u'(t), u(t)\rangle \tag{A.1.3}$$

im verallgemeinerten Sinne und fast überall auf $]0,T[$.

Beweis. In Emmrich [16, Kapitel 8, Korollar 8.1.10] ist ein Beweis für den Spezialfall $p = 2$ angegeben. Ein analoger Beweis liefert die Behauptung für alle $p \in [1,\infty[$.

Sei $u \in \mathcal{W}^p(0,T)$. Dann sind $t \mapsto |u(t)|$ und $t \mapsto |u'(t)|$ Bochner-integrierbar (vergleiche Yosida [39, Kapitel V, Abschnitt 5, Theorem 1]). Also sind $t \mapsto |u(t)|^2$ und $t \mapsto \langle u'(t), u(t)\rangle$ in $\mathrm{L}^1(0,T)$ enthalten. Ferner folgt für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,T[)$ aus der verallgemeinerten Regel partieller Integration für den Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ (vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.17])

$$\begin{aligned}\int_0^T |u(t)|^2 \varphi'(t)\,dt &= \int_0^T \left\langle u(t), \frac{d}{dt}(u(t)\varphi(t))\right\rangle dt - \int_0^T \langle u(t), u'(t)\rangle \varphi(t)\,dt \\ &= -\int_0^T 2\langle u'(t), u(t)\rangle \varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Somit ist $|u(\cdot)|^2 \in \mathrm{W}^{1,1}(0,T)$. Daher kann ein stetiger Repräsentant $t \mapsto v(t)$ mit $v(t) = |u(t)|^2$ fast überall auf $]0,T[$ und $v(t) = v(0) + \int_0^t 2\langle u'(s), u(s)\rangle\,ds$ für alle $t \in [0,T]$ bestimmt werden (vergleiche Brézis [10, Kapitel VIII, Theorem VIII.2]). Gemäß Kolmogorov und Fomin [27, Kapitel 6, Abschnitt 6.3, Satz 1] besitzt dieser Repräsentant für fast alle $t \in]0,T[$ die klassische Ableitung $v'(t) = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$. Ist eine Funktion klassisch differenzierbar, ist die verallgemeinerte Ableitung der Funktion gleich der klassischen Ableitung. Insofern gilt (A.1.3) fast überall auf $]0,T[$. □

Das folgende Hilfsresultat ist eine Kompaktheitsaussage für den Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$. Diese Aussage ergibt sich aus den Satz von Lions-Aubin (vergleiche Roubíček [32, Kapitel 7, Lemma 7.7] oder Růžička [33, Kapitel 3, 3.74 Lemma]).

Theorem A.1.3. *Sei* (V, H, V^*) *ein Gelfand-Dreier. Der reelle Banach-Raum* V *sei kompakt in den reellen Hilbert-Raum* H *eingebettet. Dann ist für jedes* $r \in [0, \infty[$ *der Raum* $\mathcal{W}^p(0,T)$ *kompakt in* $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ *eingebettet.*

Beweis. Sei $r \in [1, \infty[$ ein beliebiger, fest gewählter Parameter. Dann ist der Raum $\mathcal{C}([0,T];H)$ stetig in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ eingebettet (vergleiche Zeidler [41, Kapitel 23, Proposition 23.2 (c)]). Ferner ist der Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ stetig in $\mathcal{C}([0,T];H)$ eingebettet (vergleiche Gajewski, Gröger und Zacharias [21, Kapitel IV, Satz 1.17]). Also gilt

$$\mathcal{W}^p(0,T) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];H) \hookrightarrow \mathrm{L}^r(0,T;H). \tag{A.1.4}$$

Da $\mathcal{W}^p(0,T) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];H)$ ist, ergibt sich für alle $v \in \mathcal{W}^p(0,T)$ die Abschätzung

$$\|v\|^r_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \leq \|v\|^{r-p}_{\mathcal{C}([0,T];H)} \|v\|^p_{\mathrm{L}^p(0,T;H)}. \tag{A.1.5}$$

Aus dem Satz von Lions-Aubin ergibt sich, dass der Raum $\mathcal{W}^p(0,T)$ kompakt in $\mathrm{L}^p(0,T;H)$ eingebettet ist. Daher folgt aus (A.1.4) und (A.1.5), dass $\mathcal{W}^p(0,T)$ kompakt in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ eingebettet ist. □

Das Theorem A.1.3 bildet das Fundament für das nachfolgende Lemma.

Lemma A.1.7. *Sei* (V, H, V^*) *ein Gelfand-Dreier. Der reelle Banach-Raum* V *sei kompakt in den reellen Hilbert-Raum* H *eingebettet. Die Folge* $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}^p(0,T)$ *sei in* $\mathcal{W}^p(0,T)$ *beschränkt. Des Weiteren sei* $r \in [1, \infty[$, $w \in \mathrm{L}^r(0,T;H)$ *und die Folge* $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiere in* $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ *schwach gegen* w. *Dann konvergiert die Folge* $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ *stark gegen* w.

Beweis. Angenommen, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ nicht stark gegen $w \in \mathrm{L}^r(0,T;H)$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$ von $(k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\|w_{k'} - w\|_{\mathrm{L}^r(0,T;H)} \geq \varepsilon_0. \tag{A.1.6}$$

Da V kompakt in H eingebettete ist, folgt aus Theorem A.1.3, dass $\mathcal{W}^p(0,T) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^r(0,T;H)$ ist. Ferner ist $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt. Also existiert ein $w_0 \in \mathrm{L}^r(0,T;H)$ und eine Teilfolge $(k'')_{k''\in\mathbb{N}}$ von $(k')_{k'\in\mathbb{N}}$, so dass

$$w_{k''} \to w_0 \quad \text{in } \mathrm{L}^r(0,T;H) \quad \text{für } k'' \to \infty .$$

Da die Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ schwach gegen w konvergiert, ist $w_0 = w$. Also konvergiert die Folge $(w_{k''})_{k''\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^r(0,T;H)$ stark gegen w. Dieses Konvergenzresultat widerspricht der Relation (A.1.6). □

A.2. Operatoreigenschaften

Dieser Abschnitt verschafft einen Überblick der Bedingungen, die im Verlauf der Arbeit an Operatoren, die einen reellen, reflexiven Banach-Raum auf den zugehörigen topologischen Dualraum abbilden, gestellt werden. Die Begriffe werden etwas unübersichtlich nacheinander angegeben. Dadurch geht die Feinheit der Begriffsbildung verloren. Zum genaueren Studium solcher Operatoren vergleiche Gajewski, Gröger, Zacharias [21], Růžička [33] oder Zeidler [42].

Definition A.2.1. (Stetigkeitseigenschaften für einen Operator): Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, reflexiver Banach-Raum und $\mathrm{A} : X \to X^*$ ein Operator. Dann heißt A:

(i) stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ in X folgt $\mathrm{A}x_n \to \mathrm{A}x$ für $n \to \infty$ in X^*.

(ii) verstärkt stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$ in X folgt $\mathrm{A}x_n \to \mathrm{A}x$ für $n \to \infty$ in X^*.

(iii) demistetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ in X folgt $\mathrm{A}x_n \rightharpoonup \mathrm{A}x$ für $n \to \infty$ in X^*.

(iv) hemistetig, wenn die reelle Funktion $t \mapsto \langle \mathrm{A}(x + ty), z\rangle_{X^*\times X}$ für alle beliebigen, fest gewählten $x, y, z \in X$ stetig in $[0, 1]$ ist.

(v) Hölder-stetig[2] in X zum Exponenten $\delta \in \,]0, 1]$, wenn eine Konstante $c_{\mathcal{H}} > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$\|\mathrm{A}x - \mathrm{A}y\|_{X^*} \leq c_{\mathcal{H}} \|x - y\|_X^\delta .$$

Definition A.2.2. (Fundamentale Operatoreigenschaften): Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, reflexiver Banach-Raum und $\mathrm{A} : V \to V^*$ ein Operator. Dann heißt A:

(i) monoton, wenn die Abschätzung $\langle \mathrm{A}x - \mathrm{A}y, x - y\rangle_{X^*\times X} \geq 0$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

(ii) strikt monoton, wenn die Abschätzung $\langle \mathrm{A}x - \mathrm{A}y, x - y\rangle_{X^*\times X} > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ erfüllt ist.

(iii) beschränkt, wenn für jede beschränkte Menge $M \subseteq X$ die Bildmenge, $\mathrm{A}(M) \subseteq X^*$ beschränkt ist.

[2]Ist der Hölder-Exponenten $\delta = 1$ entartet die Hölder-Stetigkeit zur Lipschitz-Stetigkeit.

(iv) koerzitiv, wenn eine reelle Funktion $\Phi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{s\to\infty} \Phi(s) = \infty$ existiert, so dass für alle $x \in X$ die Abschätzung

$$\langle \mathrm{A}x, x \rangle_{X^* \times X} \geq \Phi(\|x\|_X)\,\|x\|_X$$

erfüllt ist.

Zu Funktionen, die einer Carathéodory- und Wachstumsbedingung genügen, kann ein stetiger und beschränkter Operator konstruiert werden vergleiche Zeidler [42, Kapitel 26, Abschnitt 3]. Dieser Operator wird als Nymyckii Operator bezeichnet. Ebenso kann ein demistetiger Operator, der einer Wachstumsbedingung genügt und einen reellen, separablen, reflexiven Banach-Raum auf den zugehörigen topologischen Dualraum abbildet, erweitert werden.

Theorem A.2.1. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum und $\mathrm{A} : X \to X^*$ ein demistetiger Operator, der einer $(p-1)$-Wachstumsbedingung genüge das heißt, es existiert eine Konstante $c_{\mathrm{A}} > 0$ mit*

$$\|\mathrm{A}v\|_{X^*} \leq c_{\mathrm{A}} \left(\|v\|_X^{p-1} + 1\right) \quad \text{für alle } v \in X. \tag{A.2.1}$$

Dann kann durch $(\mathcal{A}u)(t) = \mathrm{A}(u(t))$, für jedes $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ und für alle $t \in \,]0,T[$, ein beschränkter Operator $\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;X) \to \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ konstruiert werden.

Beweis. Sei u ein beliebiges, fest gewähltes Element aus $\mathrm{L}^p(0,T;X)$. Dann existiert eine Folge einfacher Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|u(t) - u_n(t)\|_X \quad f.ü. \text{ auf }]0,T[\,.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie eine Familie Lebesgue-messbarer, paarweise disjunkter Mengen $(E_{k,n})_{k=1}^{N_n}$ mit $E_{k,n} \subseteq \,]0,T[$ und $E_{k,n}$ ist von endlichem Maß. Des Weiteren existiert eine Folge $(u_{k,n})_{k=1}^{N_n} \subseteq X$ mit $u_n(t) = u_{n_k}$ für alle $t \in E_{k,n}$. Die charakteristische Funktion einer beliebigen Menge $E \subseteq [0,T]$ sei durch

$$t \mapsto \chi_E(t) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

gegeben. Demzufolge ergibt sich für jedes Folgenglied u_n die Darstellung

$$u_n = \sum_{k=1}^{N_n} u_{k,n} \chi_{E_{k,n}}.$$

Da A ein demistetiger Operator ist, ergibt sich für jedes beliebig, fest gewählte $v \in X$ die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{A}\left(u\left(t\right)\right), v\rangle_{X^*\times X} &= \left\langle \mathrm{A}\left(\lim_{n\to\infty} u_n\left(t\right)\right), v\right\rangle_{X^*\times X} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{A}\left(u_n\left(t\right)\right), v\rangle_{X^*\times X} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \mathrm{A}\left(\sum_{k=1}^{N_n} u_{k,n}\chi_{E_{k,n}}\left(t\right)\right), v\right\rangle_{X^*\times X} \quad f.ü. \text{ auf } \left]0,T\right[.\end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(E_{k,n})_{k=1}^{N_n}$ eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen von $]0,T[$. Insofern gilt für jedes $m = 1, ..., N_n$ und $t \in E_{m,n}$

$$\mathrm{A}\left(\sum_{k=1}^{N_n} u_{k,n}\chi_{E_{k,n}}\left(t\right)\right) = \mathrm{A}\left(u_{m,n}\right) = \sum_{k=1}^{N_n} \mathrm{A}\left(u_{k,n}\right)\chi_{E_{k,n}}\left(t\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{A}\left(u\left(t\right)\right), v\rangle_{V^*\times V} &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \mathrm{A}\left(\sum_{k=1}^{N_n} u_{k,n}\chi_{E_{k,n}}\left(t\right)\right), v\right\rangle_{X^*\times X} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} \langle \mathrm{A}\left(u_{k,n}\right), v\rangle_{X^*\times X} \chi_{E_{k,n}}\left(t\right) \quad f.ü. \text{ auf } \left]0,T\right[.\end{aligned}$$

Also ist $t \mapsto \langle \mathrm{A}(u(t)), v\rangle_{X^*\times X}$, als Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen, für alle $v \in X$ Lebesgue-messbar. Das impliziert die schwache Bochner-Messbarkeit der abstrakten Funktion $t \mapsto \mathrm{A}(u(t))$. Denn aufgrund der Reflexivität von X existiert zu jedem $\varphi \in X^{**}$ genau ein $v \in X$ mit $t \mapsto \langle \varphi, \mathrm{A}(u(t))\rangle_{X^{**}\times X^*} = \langle \mathrm{A}(u(t)), v\rangle_{X^*\times X}$. Demgemäß ist die reellwertige Funktion $t \mapsto \langle \varphi, \mathrm{A}(u(t))\rangle_{X^{**}\times X^*}$ für alle $\varphi \in X^{**}$ Lebesgue-messbar. Da X ein reflexiver, separabler Banach-Raum ist, ist X^* separabel (vergleiche Brézis [10, Kapitel III, Korollar III.24] oder Werner [38, Kapitel III, Korollar III.3.5]). Dementsprechend ist $t \mapsto \mathrm{A}(u(t))$ separabelwertig. Also folgt aus den Satz von Pettis (vergleiche Yosida [39, Kapitel V, Abschnitt 4, Theorem 1]) die Bochner-Messbarkeit von $t \mapsto \mathrm{A}(u(t))$.

Aus der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (A.2.1) und der diskreten Hölder-Ungleichung ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T \|\mathrm{A}\left(u\left(t\right)\right)\|_{X^*}^q \, dt\right) &\leq c_{\mathrm{A}}^q \left(\int_0^T \left(\|u\left(t\right)\|_X^{p-1} + 1\right)^q dt\right) \\ &\leq c_{\mathrm{A}}^q 2^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^T \|u\left(t\right)\|_X^p \, dt + T\right) < \infty. \quad \text{(A.2.2)}\end{aligned}$$

Dementsprechend folgt aus dem Satz von Bochner (vergleiche Yosida [39, Kapitel V, Abschnitt 5, Theorem 1]) die Bochner-Integrierbarkeit von $t \mapsto \mathrm{A}(u(t))$. Infolgedessen ist für jedes $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ durch $\mathcal{A}u :]0,T[\to X^*$ eine Bochner-integrierbare, abstrakte Funktion mit $\mathcal{A}u(t) = \mathrm{A}(u(t))$ für alle $t \in]0,T[$ gegeben. Des Weiteren ist die abstrakte Funktion $\mathcal{A}u$ ein Element aus $\mathrm{L}^q(0,T;X^*)$, weil sich aus (A.2.2) die Abschätzung

$$\|\mathcal{A}u\|_{\mathrm{L}^q(0,T;X^*)} = \left(\int_0^T \|\mathrm{A}(u(t))\|_{X^*}^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

ergibt. Daher ist der Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;X) &\to \mathrm{L}^q(0,T;X^*) \\ u &\mapsto \mathcal{A}u \end{aligned}$$

wohldefiniert. Aufgrund der Abschätzung (A.2.2) ist dieser Operator beschränkt. □

Theorem A.2.2. *Sei* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum und* $\mathrm{A} : X \to X^*$ *ein monotoner, hemistetiger Operator, welcher der* $(p-1)$*-Wachstumsbedingung* (A.2.1) *genüge. Des Weiteren seien Konstanten* $\mu > 0$ *und* $\lambda \geq 0$ *gegeben, so dass* A *der p-Koerzitivitätsbedingung*

$$\langle \mathrm{A}v, v\rangle_{X^* \times X} \geq \mu \|v\|_X^p - \lambda \text{ für alle } v \in X, \tag{A.2.3}$$

genüge. Dann kann durch $(\mathcal{A}u)(t) = \mathrm{A}(u(t))$*, für jedes* $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ *und für alle* $t \in]0,T[$*, ein beschränkter, monotoner, hemistetiger Operator* $\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;X) \to \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ *konstruiert werden. Der so konstruierte Operator* $\mathcal{A}$ *genügt genau wie* A *einer p-Koerzitivitätsbedingung.*

Beweis. Ein monotoner und hemistetiger Operator ist demistetig (vergleiche Gajewski, Gröger, Zacharias [21, Kapitel III, Lemma 1.3] oder Zeidler [41, Kapitel 26, Proposition 26.4 (c)]). Also ist der Operator $\mathrm{A} : X \to X^*$ demistetigt. Demzufolge existiert gemäß Theorem A.2.1 ein beschränkter Operator $\mathcal{A} : \mathrm{L}^p(0,T;X) \to \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ mit $(\mathcal{A}u)(t) = \mathrm{A}(u(t))$ für alle $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ und $t \in]0,T[$. Insbesondere gilt für alle $u, v \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;X)\times\mathrm{L}^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle \mathrm{A}u(t), v(t)\rangle_{X^*\times X} \, dt.$$

Aufgrund der Monotonieeigenschaft von A ergibt sich für alle $u, v \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ die Abschätzung

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;X)\times\mathrm{L}^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle \mathrm{A}u(t) - \mathrm{A}v(t), u(t) - v(t)\rangle_{X^*\times X} \, dt \geq 0.$$

Also impliziert die Monotonieeigenschaft des Operators A die Monotonie von $\mathcal{A}$. Ebenso impliziert die p-Koerzitivitätsbedingung (A.2.3) von A die p-Koerzitivitätsbedingung von $\mathcal{A}$. Denn für alle $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ gilt

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle_{\mathrm{L}^q(0,T;X)\times \mathrm{L}^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle \mathrm{A}u(t), u(t)\rangle_{X^*\times X}\, dt \geq \mu \|u\|^p_{\mathrm{L}^p(0,T;X)} - \lambda T.$$

Es bleibt nachzuweisen, dass der Operator $\mathcal{A}$ hemistetig ist. Dazu sei θ ein beliebiges, fest gewähltes Element aus $[0,1]$ und $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} |\theta_n - \theta|_{\mathbb{R}} = 0$. Dann folgt für alle $u,v,w \in \mathrm{L}^p(0,T,X)$ und $t \in \,]0,T[$ aus der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (A.2.1) und der diskreten Hölder-Ungleichun

$$\begin{aligned}
& \langle \mathrm{A}(u(t)+\theta_n v(t)), w(t)\rangle_{X^*\times X} \\
\leq\; & \|\mathrm{A}(u(t)+\theta_n v(t))\|_{X^*} \|w(t)\|_X \\
\leq\; & c_{\mathrm{A}} \left(\|u(t)+\theta_n v(t)\|^{p-1}_X + 1\right) \|w(t)\|_X \\
\leq\; & c_{\mathrm{A}} \left((\|u(t)\|_X + \theta_n \|v(t)\|_X)^{p-1} + 1\right) \|w(t)\|_X \\
\leq\; & c_{\mathrm{A}} \max\left(2^{p-2},1\right) \left(\|u(t)\|^{p-1}_X + \|v(t)\|^{p-1}_X + 1\right) \|w(t)\|_X .
\end{aligned}$$

Für alle $t \in \,]0,T[$ sei

$$m(t) := c\left(\|u(t)\|^{p-1}_X + \|v(t)\|^{p-1}_X + 1\right) \|w(t)\|_X ,$$

wobei $c := c_{\mathrm{A}} \max(2^{p-2},1)$. Da $u,v,w \in \mathrm{L}^p(0,T;V)$ sind, folgt aus den Satz von Bochner (vergleiche Yosida [39, Kapitel V, Abschnitt 5, Theorem 1]), dass $\|u(\cdot)\|^p_X, \|v(\cdot)\|^p_X, \|w(\cdot)\|^p_X \in \mathrm{L}^p(0,T)$ sind. Daher ergibt sich aus der Hölder-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \int_0^T |m(t)|_{\mathbb{R}}\, dt \\
=\; & c\int_0^T \|u(t)\|^{p-1}_X \|w(t)\|_X\, dt + c\int_0^T \|v(t)\|^{p-1}_X \|w(t)\|_X\, dt + c\int_0^T \|w(t)\|_X\, dt \\
\leq\; & c\|u\|^{\frac{p}{q}}_{\mathrm{L}^p(0,T)} \|w\|_{\mathrm{L}^p(0,T)} + c\|v\|^{\frac{p}{q}}_{\mathrm{L}^p(0,T)} \|w\|_{\mathrm{L}^p(0,T)} + c\|w\|_{\mathrm{L}^1(0,T)} < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist $m \in \mathrm{L}^1(0,T)$. Da A ein hemistetiger Operator ist, ist die reellwertige Funktion $\xi \mapsto \langle \mathrm{A}(u(t)+\xi v(t)), w(t)\rangle_{V^*\times V}$ in jedem $\xi \in [0,1]$ stetig. Demgemäß gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\langle \mathrm{A}(u(t)+\theta_n v(t)) - \mathrm{A}(u(t)+\theta v(t)), w(t)\rangle_{V^*\times V}\right|_{\mathbb{R}} = 0.$$

Daher folgt aus den Satz über die majorisierte Konvergenz von Lebesgue (vergleiche

Amann und Escher [3, Kapitel X, Abschnitt 3, 3.12 Theorem])

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \mathrm{A}\left(u\left(t\right)+\theta_n v\left(t\right)\right), w\left(t\right)\rangle_{V^*\times V}\, dt \\
=\;&\int_0^T \langle \mathrm{A}\left(u\left(t\right)+\theta v\left(t\right)\right), w\left(t\right)\rangle_{V^*\times V}\, dt.
\end{aligned}$$

Infolgedessen ist $\mathcal{A}$ ein beschränkter, monotoner, hemistetiger Operator, der einer p-Koerzitivitätsbedingung genügt. □

Theorem A.2.3. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier. Der reelle Banach-Raum V sei kompakt in dem reellen Hilbert-Raum H eingebettete und der Operator $\mathrm{B} : V \to V^*$ genüge der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (A.2.1). Des Weiteren seien ein $\delta \in]0, p-1]$ und eine Konstante $c_{\mathcal{H}} > 0$ gegeben, so dass für alle $v, w \in V$ gelte*

$$\|\mathrm{B}v - \mathrm{B}w\|_* \le c_{\mathcal{H}} \max\left(\|v\|, \|w\|\right)^{p-1-\delta} |v-w|^{\frac{\delta}{p}}. \tag{A.2.4}$$

Dann kann durch $(\mathcal{B}u)(t) = \mathrm{B}(u(t))$, für jedes $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ und für alle $t \in]0,T[$, ein beschränkter Operator $\mathcal{B} : \mathrm{L}^p(0,T;X) \to \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ konstruiert werden. Ferner ist der so konstruierte Operator $\mathcal{B}$, eingeschränkt auf $\mathcal{W}^p(0,T)$, verstärkt stetig.

Beweis. Da $V \hookrightarrow H$ ist, existiert eine Konstante $\alpha > 0$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$|v| \le \alpha \|v\|.$$

Aus dieser Abschätzung und der Relation (A.2.4) ergibt sich für alle $v, w \in V$

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{B}v - \mathrm{B}w\|_* &\le c_{\mathcal{H}} \max\left(\|v\|, \|w\|\right)^{p-1-\delta} |v-w|^{\frac{\delta}{p}} \\
&\le c_{\mathcal{H}}\alpha^{\frac{\delta}{p}} \max\left(\|v\|, \|w\|\right)^{p-1-\delta} \|v-w\|^{\frac{\delta}{p}}.
\end{aligned}$$

Demgemäß ist der Operator $\mathrm{B} : V \to V^*$ Hölder-stetig. Demzufolge existiert gemäß Theorem A.2.1 ein Operator $\mathcal{B} : \mathrm{L}^p(0,T;X) \to \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ mit $(\mathcal{B}u)(t) = \mathrm{B}(u(t))$, für jedes $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ und für alle $t \in]0,T[$.

Nun wird nachgewiesen, dass der so konstruierte Operator $\mathcal{B}$, eingeschränkt auf $\mathcal{W}^p(0,T)$, verstärkt stetig ist. Dazu sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}^p(0,T)$ und $x \in \mathcal{W}^p(0,T)$, so dass

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{in } \mathcal{W}^p(0,T) \quad \text{für } n \to \infty. \tag{A.2.5}$$

Aus (A.2.5) ergibt sich, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt ist und in $\mathrm{L}^1(0,T;H)$ schwach gegen x konvergiert. Dementsprechend folgt aus Lemma A.1.7

$$x_n \to x \quad \text{in } \mathrm{L}^1(0,T;H) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}^p(0,T)$ beschränkt ist, ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^T \max\left(\|x_n(t)\|,\|x(t)\|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leq\ & \|x_n(t)\|_{\mathcal{W}^p(0,T)}+\|x(t)\|_{\mathcal{W}^p(0,T)}<\infty.\end{aligned} \tag{A.2.6}$$

Aus (A.2.4) und der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{B}x_n-\mathcal{B}x\|^q_{\mathrm{L}^q(0,T;V^*)}\\ \leq\ & c^q_{\mathcal{H}}\int_0^T\left(\max\left(\|x_n(t)\|,\|x(t)\|\right)^{p-1-\delta}|x_n(t)-x(t)|^{\frac{\delta}{p}}\right)^q dt\\ \leq\ & c^q_{\mathcal{H}}\left(\int_0^T\max\left(\|x_n(t)\|,\|x(t)\|\right)^p dt\right)^{\left(1-\frac{\delta}{(p-1)}\right)}\|x_n(t)-x(t)\|^{\frac{\delta}{(p-1)}}_{\mathrm{L}^1(0,T;H)}.\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Abschätzung konvergiert für $n\to\infty$ gegen Null. Denn gemäß (A.2.6) ist der Term $\int_0^T\max\left(\|x_n(t)\|,\|x(t)\|\right)^p dt$ beschränkt. Infolgedessen konvergiert $(\mathcal{B}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{L}^q(0,T;V^*)$ stark gegen $\mathcal{B}x$. Damit ist der Operator $\mathcal{B}$, eingeschränkt auf $\mathcal{W}^p(0,T)$, verstärkt stetig. □

Das nachfolgende Lemma ist eine Verallgemeinerung des Satzes über die majorisierte Konvergenz von Lebesgue. Das Lemma ist unter anderem in Růžička [33, Appendix, 11.11 Satz] zu finden. Auf Grundlage des Lemmas wird nachgewiesen, dass ein stetiger Operator, der einer Wachstumsbedingung genügt und einen reellen, separablen, reflexiven Banach-Raum auf den zugehörigen topologischen Dualraum abbildet, auf Bochner-Lebesgue-Räumen fortgesetzt werden kann.

Lemma A.2.1. *Sei $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}},(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathrm{L}^1(\mathcal{I})$ und $f,g\in\mathrm{L}^1(\mathcal{I})$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere fast überall auf $\mathcal{I}$ gegen f und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere fast überall auf $\mathcal{I}$ gegen h. Des Weiteren sei $|f_n(x)|_{\mathbb{R}}\leq h_n(x)$ für alle $x\in\mathcal{I}$ sowie $n\in\mathbb{N}$ und es gelte*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{I}}h_n(x)\,dx=\int_{\mathcal{I}}h(x)\,dx.$$

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{I}}|f_n(x)-f(x)|_{\mathbb{R}}\,dx=0.$$

Theorem A.2.4. *Sei $(X,\|\cdot\|_X)$ ein reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum und $\mathrm{F}:X\to X^*$ ein stetiger Operator, welcher der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (A.2.1) genüge. Dann kann durch $(\mathcal{F}u)(t)=\mathrm{F}(u(t))$, für jedes $u\in\mathrm{L}^p(0,T;X)$ und für alle $t\in\,]0,T[$, ein beschränkter, stetiger Operator $\mathcal{F}:\mathrm{L}^p(0,T;X)\to\mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ konstruiert werden.*

Beweis. [3] Der Operator $\mathrm{F} : X \to X^*$ ist stetig. Also ist F auch demistetigt. Demzufolge existiert gemäß Theorem A.2.1 ein beschränkter Operator $\mathcal{F} : \mathrm{L}^p(0,T;X) \to \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ mit $(\mathcal{F}u)(t) = \mathrm{F}(u(t))$ für alle $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ und $t \in \,]0,T[$.

Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{L}^p(0,T;X)$ und $u \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ mit

$$u_n \to u \quad \text{in } \mathrm{L}^p(0,T;X) \quad \text{für } n \to \infty. \tag{A.2.7}$$

Dann existiert eine Teilfolge $(u_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\lim_{n'\to\infty} u_{n'}(t) = u(t) \quad \text{in } X \quad \textit{f.ü.} \text{ auf } \,]0,T[\,. \tag{A.2.8}$$

Aus der $(p-1)$-Wachstumsbedingung (A.2.1) und der diskreten Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\mathrm{F}u_n(t) - \mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q &\le 2^{q-1}\left(\|\mathrm{F}u_n(t)\|_{X^*}^q + \|\mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q\right) \\ &\le 2^{q-1}\left(c_{\mathrm{F}}\left(1 + \|u_n(t)\|_X^{p-1}\right)^q + \|\mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q\right) \\ &\le 4^{q-1}c_{\mathrm{F}}\left(1 + \|u_n(t)\|_X^p\right) + 2^{q-1}\|\mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q . \end{aligned} \tag{A.2.9}$$

Im Folgenden seien für alle $t \in \,]0,T[$ und $n \in \mathbb{N}$

$$h(t) := 4^{q-1}c_{\mathrm{F}}\left(1 + \|u(t)\|_X^p\right) + 2^{q-1}\|\mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q$$

und

$$h_n(t) := 4^{q-1}c_{\mathrm{F}}\left(1 + \|u_n(t)\|_X^p\right) + 2^{q-1}\|\mathrm{F}u(t)\|_{X*}^q .$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind $u, u_n \in \mathrm{L}^p(0,T;X)$ und $\mathcal{F}u \in \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$. Dementsprechend sind gemäß dem Satz von Bochner (vergleiche Yosida [39, Kapitel V, Abschnitt 5, Theorem 1]) $\|u\|_X^p, \|u_n\|_X^p, \|\mathcal{F}u\|_{X^*} \in \mathrm{L}^1(0,T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also sind $h, h_n \in \mathrm{L}^1(0,T)$. Aus (A.2.7) und (A.2.8) ergeben sich die Konvergenzresultate

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T h_n(t)\,dt = \int_0^T h(t)\,dt$$

und

$$\lim_{n'\to\infty} h_{n'}(t) = h(t) \;\; \textit{f.ü.} \text{ auf } \,]0,T[\,.$$

Des Weiteren ergibt sich aus (A.2.9) für alle $t \in \,]0,T[$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\|\mathrm{F}u_n(t) - \mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q \le h_n(t)\,.$$

[3] Der in dieser Arbeit angegebene Beweis für Theorem A.2.4 orientiert sich an einen Beweis aus dem Buch von Růžička [33, Kapitel 3, 1.19 Lemma].

Ferner sind $\mathcal{F}u, \mathcal{F}u_n \in \mathrm{L}^q(0,T;X^*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also folgt aus dem Satz von Bochner (vergleiche Yosida [39, Kapitel V, Abschnitt 5, Theorem 1]), dass $\|\mathcal{F}u_n - \mathcal{F}u\|_{X^*}^q \in \mathrm{L}^1(0,T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Da F stetig ist, ergibt sich aus den Konvergenzresultat (A.2.8)

$$\lim_{n' \to \infty} \|\mathrm{F}u_{n'}(t) - \mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q = 0 \ f.\ddot{u}. \text{ auf } \left]0,T\right[.$$

Demzufolge sind für die Teilfolge $(n')_{n' \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von Lemma A.2.1 erfüllt. Folglich gilt

$$\lim_{n' \to \infty} \|\mathcal{F}u_{n'}(t) - \mathcal{F}u(t)\|_{\mathrm{L}^q(0,T;X^*)}^q = \lim_{n' \to \infty} \int_0^T \|\mathrm{F}u_{n'}(t) - \mathrm{F}u(t)\|_{X^*}^q = 0.$$

Mit einem Widerspruchsbeweis kann nachgewiesen werden, dass dieses Konvergenzresultat für die gesamte Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt. Also ist der Operator $\mathcal{F}$ stetig. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Amann H. und Escher J.: Analysis I., Birkhäuser, Basel - Bosten - Berlin, 3.Auflage, 2006.

[2] Amann H. und Escher J.: Analysis II., Birkhäuser, Basel - Bosten - Berlin, 1999.

[3] Amann H. und Escher J.: Analysis III., Birkhäuser, Basel - Bosten - Berlin, 2001.

[4] Appel J. und Väth M.: Elemente der Funktionalanalysis. Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2005.

[5] Alt H. W.: Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2., verbesserte Auflage, 1992.

[6] Barbu V.: Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.

[7] Barbu V. und Precupanu Th.: Convexity and Optimization in Banach Spaces. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht - Boston - Lancaster, 3. Auflage, 1986.

[8] Bartle R. G.: A Modern Theory of Integration. Graduate Studies in Mathematics Volume 32. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[9] Bramble J.H., Pasciak J.E. und Steinbach O.: On the stability of the L^2-projection in H^1_0. Math. Comput.71 (2001) 147–156.

[10] Brézis H.: Analyse Fonctionnelle. Theorie et applications. Mathematiques appliquees pour le Master. Dunod, Paris, 2005.

[11] Crouzeix M. and Thomée V.: The stability in L^p and $W^{1,p}$ of the L^2-projection onto finite element function spaces. Math. Comput.48 (1987) 521–532.

[12] DiBenedetto E.: Degenerate Parabolic Equations. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1993.

[13] Edwards R. E.: Functional Analysis. Theory and Applications. Holt, Rinehart and Winston, New York - Chicago - San Francisco, 1965.

[14] Emmrich E.: External Approximation of Nonlinear Operator Equations. Numerical Functional Analysis and Optimization 30 (2009) 5-6, pp. 486-498.

[15] Emmrich E. und Šiška D.: Full Discretization of the Porous Medium/Fast Diffusion Equation based on its very weak Formulation. Computational Methods in Applied Mathematics 11 (2011) 4, pp. 441-459.

[16] Emmrich E.: Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen. Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2004.

[17] Emmrich E. und Thalhammer M.: Stiffly accurate Runge-Kutta methods for nonlinear evolution problems governed by a monotone operator Math. Comp. 79 (2010), pp. 785-806.

[18] Emmrich E.: Two-step BDF time discretisation of nonlinear evolution problems governed by monotone operators with strongly continuous perturbations Comput. Methods Appl. Math. 9 (2009) 1, pp. 37-62.

[19] Emmrich E.: Variable time-step ϑ-scheme for nonlinear evolution equations governed by a monotone operator. Calcolo 46 (2009) 3, pp. 187-210.

[20] Evans L.C.: Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics Volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 3., Nachdruck mit Korrekturen, 2008.

[21] Gajewski H., Gröger K. und Zacharias K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[22] Glowinski R.: Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1984.

[23] Heuser H.: Lehrbuch der Analysis Teil 1. Teubner, Stuttgart - Leipzig - Wiesbaden, 16., durchgesehene Auflage, 2006.

[24] Heuser H.: Lehrbuch der Analysis Teil 2. Teubner, Stuttgart - Leipzig - Wiesbaden, 13., durchgesehene Auflage, 2004.

[25] Hu S. und Papageorgiou N.S.: Handbook of Multivalued Analysis. Volume I: Theory. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Boston - London, 1997.

[26] Hu S. und Papageorgiou N.S.: Handbook of Multivalued Analysis. Volume II: Applications. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Boston - London, 2000.

[27] Kolmogorov A.N. und Fomin S.V.: Reelle Funktionen und Funktionalanalysis. Hochschulbücher für Mathematik Band 78. Deutscher Verlag der Wissenschafen, Berlin, 1975.

[28] Naas J. und Tutschke W.: Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik. Identitäten des schönen, Allgemeinen, Anwendbaren. Verlag Harri Deutsch, 3., korrigierte und erweiterte Auflage, 2009.

[29] Natanson I.P.: Theory of Functions of a real Variable Volume I. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 3. Auflage, 1964.

[30] Plato R.: Numerische Mathematik kompakt. Grundlagenwissen für Studium und Praxis. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 3., aktualisierte und verbesserte Auflage, 2006.

[31] Renardy M. und Rogers R.C.: An Introduction to Partial Differential Equations. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, Berlin - Heidelberg, 2. Auflage, 2004.

[32] Roubíček T.: Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. Birkhäuser, Basel - Bosten - Berlin, 2005.

[33] Růžička M.: Nichtlineare Funktionalanalysis. Eine Einführung. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2004.

[34] Saadoune M. und Valadier M.: Extraction of a "Good" Subsequence from a Bounded Sequence of Integrable Functions. J. Convex Anal., 2 (1995) 1/2, pp. 345-357.

[35] Shioji N.: Existence of Periodic Solutions for Nonlinear Evolution Equations with Pseudo Monotone Operators. Proceedings of the American Mathematical Society 125 (1997), pp. 2921-2929.

[36] Temam R.: Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Nachdruck mit Korrekturen, 2001.

[37] Temam R.: Numerical Analysis. D.Reidel Publishing Company, Dordrecht - Boston, 1973.

[38] Werner D.: Funktionalanalysis. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 6., korrigierte Auflage, 2007.

[39] Yosida K.: Functional Analysis. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 4. Auflage, 1974.

[40] Zeidler E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications I. Fixed-Point Theorems. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1986.

[41] Zeidler E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A. Linear Monotone Operators. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1990.

[42] Zeidler E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B. Nonlinear Monotone Operators. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1990.

[43] Zeidler E.: Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics. Applied Mathematical Sciences 108. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1995.

[44] Zeidler E., Hrsg.: Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner, Stuttgart - Leipzig - Wiesbaden, 2. Auflage, 2003.