

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FAKULTÄT II – INSTITUT FÜR MATHEMATIK

MASTERARBEIT
IM STUDIENGANG MATHEMATIK

Differentialgleichungen in Netzwerken

Martin Plonka (337266)

betreut von Prof. Dr. Etienne Emmrich

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung dieser Arbeit versichert an Eides statt:

Berlin, den

Martin Plonka

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Partielle Differentialgleichungen	2
1.2	Netzwerke	4
1.3	Funktionsräume für Netzwerke	7
2	Lineare Diffusion	13
2.1	Problemstellung	13
2.2	Existenz- und Eindeutigkeitsatz	20
2.3	Weitere Resultate	24
3	Lineare Schwingungen	35
3.1	Problemstellung	35
3.2	Existenz- und Eindeutigkeitsatz	36
3.3	Weitere Resultate	38
4	Nichtlineare Diffusion	42
4.1	Problemstellung	42
4.2	Existenz- und Eindeutigkeitsatz	44
4.3	Offene Probleme	48
5	Umparametrisierungen und allgemeinere Netzwerke	49
5.1	Normierung und Orientierung	49
5.2	C^k -Netzwerke	52
6	Lineare Transportprobleme	53
7	Anwendungen	56
7.1	Chemotaxis	56
7.2	Isotherme Euler-Gleichungen	57
8	Numerische Betrachtungen	59
9	Ausblick	68
A	Anhang	70
A.1	Graphentheorie	70
A.2	Funktionalanalysis	71
	Literaturverzeichnis	75

1 Einführung

Historisch wurden Differentialgleichungen in Netzwerken (Def. 1.7) zuerst von Lumer in [Lum80] als ein Spezialfall von Differentialgleichungen auf verknüpften Mannigfaltigkeiten betrachtet. Seit den ersten Resultaten von Lumer [Lum80], von Below [Bel88], Roth [Rot84], Nicaise [Nic87] und Ali Mehmeti [AM86] zu Differentialgleichungen in Netzwerken wurde viel zu diesem Thema geforscht. Insbesondere sind die Autoren Felix Ali Mehmeti, Günter Leugering und Serge Nicaise seit mehreren Jahrzehnten auf diesem Gebiet aktiv. Momentan ist der Fortschritt in diesem Bereich vor allem durch konkrete Anwendungen (Kap. 7), wie zum Beispiel der Gastransport in Pipeline-Netzwerken, motiviert. Eine rein mathematische Motivation ist die Frage, inwiefern kombinatorische Eigenschaften des zugrunde liegenden Netzwerks mit den analytischen Eigenschaften der betrachteten Differentialgleichungen gemeinsam Lösbarkeit und Eigenschaften der Lösungen beeinflussen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Einführung in das relativ neue Gebiet der Differentialgleichungen in Netzwerken zu geben, da der Zugang zu diesem Thema trotz der umfangreichen Literatur schwerfällt. Weiterhin werden eigene Resultate in einem vereinheitlichten Rahmen präsentiert und bewiesen sowie bekannte Resultate vorgestellt. Für die Beweise der bereits bekannten Aussagen wird stets auf die entsprechende Literatur verwiesen. Die Begriffe und Symbole wurden dabei an das Konzept dieser Arbeit angepasst. Es wird herausgearbeitet, wo Unterschiede bei Problemen in Netzwerken entstehen können. Um die vorgestellten Ansätze auf Plausibilität zu überprüfen, werden in Kapitel 8 einfache numerische Beispiele präsentiert.

Dieses erste Kapitel führt viele Definitionen, elementare Aussagen und Objekte aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und Netzwerken ein, welche im Verlauf dieser Arbeit benötigt werden. Die Kapitel 2, 3, 4 und 6 beschäftigen sich jeweils mit einem speziellen Typ von Differentialgleichungen auf allen Kanten des Netzwerks. Dabei wird stets zuerst das Problem aufgestellt. Anschließend wird eine geeignete Formulierung gefunden und deren Lösbarkeit untersucht. Am Ende der jeweiligen Kapitel werden kurz weiterführende Resultate zusammengefasst. Die Kapitel 2 und 3 sind für leicht vereinfachte Netzwerke formuliert. In Kapitel 5 wird gezeigt, wann man diese Vereinfachungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann. Das letzte Kapitel 9 präsentiert einige interessante und offene Aussagen zu Varianten und Verallgemeinerungen der hier vorgestellten Probleme.

Die meisten bisherigen Resultate in diesem Gebiet beruhen auf Halbgruppentheorie. In dieser Arbeit wird ein anderer Ansatz verfolgt. Es werden bekannte Sätze zu Evolutionsgleichungen, welche auf Diskretisierungsbeweisen beruhen, verwendet, um Probleme gleicher Struktur in Netzwerken zu lösen. Dafür werden passende Funktionenräume für Netzwerke mit den zugehörigen Eigenschaften als Gelfand-Tripel (Def. 1.3) verwendet. Ein Vorteil dieser Herangehensweise sind Konvergenzaussagen zu den in Kapitel 8 verwendeten Diskretisierungen.

Bemerkung:

- In dieser Arbeit werden stets instationäre Probleme betrachtet und der stationäre Teil soweit wie nötig behandelt. Eine Übersicht über stationäre Differentialgleichungsprobleme in Netzwerken bieten [Kuc08] und [Mug14]. Dieses Gebiet wird im Englischen auch mit dem Begriff *Quantum Graphs* bezeichnet.

- Unter dem Thema Differentialgleichungen *auf* Netzwerken versteht man Probleme, bei denen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ im Ort auf einer diskreten Knotenmenge $I = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert sind und die Kanten $e = \{i, j\}$ eines Graphen nur die Möglichkeit zur Interaktion zwischen zwei Knoten $i \in I$ und $j \in I$ beschreiben. Dabei werden Orstdifferentiale mit entsprechenden diskreten Differenzen ersetzt, aber gewöhnliche Zeitableitungen verwendet. Diese Theorie findet unter anderem Anwendung in der Bildverarbeitung [EDLL14]. Eine Einführung wird in [Mug14] und eine Übersicht in [MOS13] gegeben. Die sprachliche Unterscheidung zwischen *auf* und *in*, im Englischen *on* und *in*, wird nicht von allen Autoren umgesetzt.

1.1 Partielle Differentialgleichungen

In dieser Arbeit werden Verallgemeinerungen der eindimensionalen Wärmeleitgleichung (Kap. 2 und Kap. 4)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t),$$

der eindimensionalen Wellengleichung (Kap. 3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t)$$

sowie der eindimensionalen Transportgleichung (Kap. 6)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t)$$

auf den Kanten eines Netzwerks (Def. 1.7) mit Kopplung an den Knoten auf Wohlgestelltheit untersucht. Dazu wird in den Kapiteln 2, 3 und 4 eine passende schwache Formulierung der Probleme aufgestellt, sodass ein entsprechender bereits bekannter Satz für Evolutionsgleichungen angewendet werden kann. Zu diesem Zweck werden zunächst übliche und wichtige Funktionenräume und deren Eigenschaften aus der Theorie für partielle Differentialgleichungen wiederholt. Einige Konzepte, wie zum Beispiel die klassischen L^p -Räume, Sobolew-Räume und schwache Konvergenz werden als bekannt vorausgesetzt. Um schwache Formulierungen für instationäre Probleme aufzustellen, benutzt man Bochner-Lebesgue-Integration und verallgemeinerte Ableitungen. Auch diese Konzepte werden als bekannt vorausgesetzt. Für eine Einführung in die hier benötigte Bochner-Lebesgue-Theorie wird auf [Emm04, Kap. 7] verwiesen. Eventuell werden in dieser Arbeit auch noch weitere nicht triviale Konzepte verwendet, aber nicht konkret eingeführt. An entsprechender Stelle wird stets auf ergänzende Literatur verwiesen. Es werden nur die für diese Arbeit absolut essentiellen Definitionen wiederholt.

Definition 1.1

Für $k \in \mathbb{N}$ sowie $1 \leq p < \infty$ und ein offenes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ heißt

$$W^{k,p}(a, b) := \left\{ f \in L^p(a, b) \mid \exists \frac{d^l f}{dx^l} \in L^p(a, b) \text{ für alle } l = 1, \dots, k \right\}$$

Sobolew-Raum. Dieser wird versehen mit der Norm

$$\|f\|_{W^{k,p}(a,b)} := \left(\sum_{l=0}^k \left\| \frac{d^l f}{dx^l} \right\|_{L^p(a,b)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Ableitungen sind im schwachen Sinne zu verstehen. Diese Räume sind für $1 \leq p < \infty$ separable Banach-Räume und für $1 < p < \infty$ sogar reflexiv. Für den Fall $p = 2$, welcher meist bei linearen Problemen betrachtet wird, erhält man mit dem Skalarprodukt

$$(u, w)_{H^k(a,b)} := \sum_{l=0}^k \left(\frac{d^l u}{dx^l}, \frac{d^l w}{dx^l} \right)_{L^2(a,b)}$$

die Hilbert-Räume $H^k(a, b) := W^{k,2}(a, b)$. Eine Definition für Sobolew-Räume in beliebigen Raumdimensionen (Def. A.17) und einige ihrer Eigenschaften sind im Anhang A.2 zu finden. Ein universelles Nachschlagewerk für Sobolew-Räume ist [AF03]. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, werden die Intervalle bei den Normen und Skalarprodukten weggelassen.

In nur einer Raumdimension gilt eine spezielle Einbettung (Def. A.12), die im folgenden Satz festgehalten wird.

Satz 1.2

Für ein beschränktes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist jede Funktion $f \in W^{1,p}(a, b)$ auf $[a, b]$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ gilt die Einbettung (Def. A.12) $W^{k,p}(a, b) \hookrightarrow C^{(k-1)}[a, b]$. Diese Einbettung ist für $1 < p < \infty$ kompakt.

Beweis. Ein Beweis für den Fall $k = 1$ kann in [Bre11, S.213] nachgelesen werden. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ folgt die Aussage nun induktiv. □

Die in den Kapiteln 2, 3 und 4 verwendete Theorie zu Evolutionsgleichungen macht insbesondere von dem folgenden Konzept Gebrauch.

Definition 1.3

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein unendlichdimensionaler, reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum mit dem Dualraum $(V^, \|\cdot\|_{V^*})$, $(H, |\cdot|_H)$ ein reeller, separabler Hilbert-Raum und sei V stetig eingebettet in H und liege dicht in H . Dann bilden die Räume V , H , und V^* ein **Gelfand-Tripel**.*

Mit Hilfe von Gelfand-Tripeln und den folgenden Bochner-Lebesgue-Räumen kann man die geeigneten Lösungs- und Testräume aufstellen.

Definition 1.4

Für $1 \leq p < \infty$ und einen Banach-Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ bezeichne $L^p(0, T; X)$ den linearen Raum von Äquivalenzklassen Bochner-integrierbarer Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ mit

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Eine umfangreichere Definition und Einführung in die relevante Bochner-Lebesgue-Integration ist in [Emm04, Kap.7] zu finden.

Für nichtlineare Probleme wird der folgende Satz aus [Emm04, Satz 8.4.1] verwendet.

Satz 1.5

Sei V , H und V^* ein Gelfand-Tripel und für $1 < p < \infty$ der konjugierte Exponent p^* definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Dann ist

$$\mathcal{W}^p(0, T) := \left\{ u \in L^p(0, T; V) \mid \exists u' \in L^{p^*}(0, T; V^*) \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{W}^p(0, T)} := \|u\|_{L^p(0, T; V)} + \|u'\|_{L^{p^*}(0, T; V^*)}$$

ein Banach-Raum und es gilt die Einbettung $\mathcal{W}^p(0, T) \hookrightarrow C([0, T]; H)$.

Die Ableitung u' ist eine verallgemeinerte Ableitung ([Emm04, Def. 8.1.1]). Für lineare Probleme wird mit $p = 2$ der Raum $\mathcal{W}(0, T) := \mathcal{W}^2(0, T)$ mit der äquivalenten Norm

$$\|u\|_{\mathcal{W}(0, T)}^2 := \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|u'\|_{L^2(0, T; V^*)}^2$$

verwendet.

1.2 Netzwerke

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich diese Arbeit vorrangig an Leser mit einem Hintergrund in partiellen Differentialgleichungen richtet. Deshalb wird versucht, die dort übliche Notation beizubehalten. Dies führt allerdings zu stark unüblicher Notation für die graphentheoretischen Objekte dieses Kapitels.

Jede höchstens abzählbare Menge Γ kann als Menge von Knoten betrachtet werden. Ordnet man nun diese Menge, so kann man $\Gamma = \{v_1, v_2, \dots\}$ schreiben. Die Möglichkeit zur Interaktion zwischen zwei Knoten wird mit einer ungerichteten Kante $\{v_i, v_j\} \in E$ für $v_i, v_j \in \Gamma$ beschrieben. Dies führt auf den Begriff eines **Graphen** $G = (\Gamma, E)$ (Def. A.1). In dieser Arbeit werden stets endliche Graphen betrachtet, das heißt, es gibt nur endlich viele Knoten ($n := |\Gamma| < \infty$) und endlich viele Kanten ($m := |E| < \infty$). Nun kann man Kanten eine Orientierung zuweisen und erhält einen gerichteten Graphen ($D = (\Gamma, J)$) (Def. A.3), auch **Digraph** genannt. Eine Kante $\alpha_j \in J$ ist ein Tupel $(j_1, j_2) \in \Gamma \times \Gamma$ mit Startknoten j_1 und Endknoten j_2 . Kanten mit gleichen Anfangs- und Endpunkt werden **Schleifen** (Def. A.4) genannt.

Diese kombinatorischen Objekte können nun spezielle Eigenschaften besitzen, von denen einige im Folgenden definiert werden.

Definition 1.6

Für einen Knoten $v \in \Gamma$ eines Digraphen $D = (\Gamma, J)$ sei die Menge der eingehenden $\delta^-(v)$ und ausgehenden $\delta^+(v)$ Kanten von v definiert durch

$$\begin{aligned} \delta^-(v) &:= \{\alpha_j \in J \mid \alpha_j = (w, v) \text{ für ein } w \in \Gamma\}, \\ \delta^+(v) &:= \{\alpha_j \in J \mid \alpha_j = (v, w) \text{ für ein } w \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

Weiterhin bezeichne

$$\text{indeg}(v) := |\delta^-(v)|$$

den **Innengrad** von v und

$$\text{outdeg}(v) := |\delta^+(v)|$$

den **Außengrad** von v . Insgesamt heißt $\text{deg}(v) := \text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v)$ der **Grad** von v .

Falls es zwischen je zwei beliebigen Knoten einen Weg, gerichtet oder auch im ungeordneten Sinne, gibt, heißt der Graph **zusammenhängend** (Def. A.5). Einen endlichen Digraphen D ohne Schleifen kann man mit Hilfe der sogenannten Knoten-Kanten-Inzidenz-Matrix $\Phi \in \{-1, 0, 1\}^{n \times m}$, oder kurz Inzidenz-Matrix, beschreiben

$$\Phi_{ij} := \begin{cases} +1 & \text{Kante } \alpha_j \text{ endet in Knoten } v_i, \alpha_j \in \delta^-(v_i), \\ -1 & \text{Kante } \alpha_j \text{ startet in Knoten } v_i, \alpha_j \in \delta^+(v_i), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin sind die folgenden Matrizen nützlich um einen Digraphen zu beschreiben:

$$\Phi^+ := [\max\{0, \Phi_{ij}\}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \quad \text{und} \quad \Phi^- := [-\min\{0, \Phi_{ij}\}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}.$$

Somit gilt

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-.$$

Bemerkung:

- In dieser Arbeit werden Graphen und Digraphen stets als zusammenhängend betrachtet. Ist ein zugrundeliegender Digraph nicht zusammenhängend, so können die Resultate auf die einzelnen Zusammenhangskomponenten (Def. A.6) angewendet werden.
- Ein Digraph ist genau dann zusammenhängend, wenn seine Inzidenz-Matrix Φ irreduzibel ist (Satz A.9).
- Existiert in einem Digraph zwischen je zwei Knoten ein gerichteter Weg, heißt dieser Digraph **stark zusammenhängend**.
- Werden die Matrizen Φ^+ und Φ^- alternativ durch

$$(\Phi^+)_{ij} := \begin{cases} 1 & \alpha_j \text{ endet in } v_i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\Phi^-)_{ij} := \begin{cases} 1 & \alpha_j \text{ startet in } v_i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

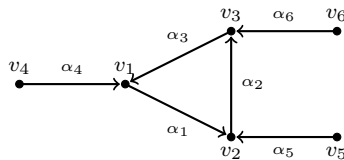
definiert, kann man mit beiden Matrizen zusammen auch einen Digraphen mit Schleifen beschreiben. Insbesondere ist die Theorie der folgende Kapitel auf Netzwerke mit Schleifen anwendbar, da stets Φ^+ und Φ^- und nicht Φ verwendet werden.

- Die Matrix Φ^+ charakterisiert die Mengen $\delta^-(v)$ und Φ^- die Mengen $\delta^+(v)$ für alle $v \in \Gamma$.

Diese graphentheoretischen Begriffe werden nun in einem Beispiel veranschaulicht.

Beispiel 1

Der Digraph $D = (\Gamma, J)$



mit

- $\Gamma = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

erzeugt die Inzidenz-Matrizen

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^- = \text{Id}_{6 \times 6}.$$

Weiterhin ergeben sich die definierten Größen als

$$\delta(v_1) := \delta^+(v_1) \cup \delta^-(v_1) = \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_3, \alpha_4\} \quad \text{und} \quad \deg(v_1) = 3.$$

Wird nun eine Schleife α_7 an v_4 hinzugefügt, ist Φ nicht mehr wohldefiniert. Der Digraph kann aber auch dann noch mit Φ^+ und Φ^- beschrieben werden, indem zu beiden Matrizen jeweils die Spalte $(0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$ hinzugefügt wird. \diamond

Bisher sind Digraphen rein kombinatorische Objekte. Diese sollen nun eine analytisch brauchbare Struktur erhalten.

Definition 1.7

Ein zusammenhängender Digraph $D = (\Gamma, J)$, bei dem man jede Kante $\alpha_j = (j_1, j_2)$ mit einem Intervall $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$, mit $a_j < b_j$ und die Anfangs- und Endpunkte mit den jeweiligen Knoten $j_1 \simeq a_j$ und $j_2 \simeq b_j$ identifiziert, definiert ein **Netzwerk** $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$. Weiterhin seien in einem Netzwerk die Knoten $\Gamma = \Gamma_I \dot{\cup} \Gamma_E$ disjunkt in innere Γ_I und äußere Γ_E Knoten unterteilt

$$\begin{aligned} \Gamma_I &:= \{v \in \Gamma \mid \deg(v) \geq 2\}, \\ \Gamma_E &:= \{v \in \Gamma \mid \deg(v) = 1\}. \end{aligned}$$

Bemerkung:

- In der Literatur werden Netzwerke nach Definition 1.7 auch metrische Graphen oder dynamische Graphen genannt. Bedauerlicherweise ist keiner dieser Begriffe wirklich zufriedenstellend, da alle diese Begriffe schon andere Bedeutungen in der Graphentheorie (siehe Def. A.10) besitzen. Der Begriff Netzwerk wurde hier aufgrund geringerer Verwechslungsgefahr, der größeren Popularität und der sprachlichen Nähe zu den Anwendungen gewählt.

Im Folgenden wird unter Umständen aus ästhetischen Gründen ein Knoten v_i oder auch eine Kante α_j mit dem entsprechenden Index identifiziert und umgekehrt.

Man unterteilt die äußeren Knoten $\Gamma_E = \Gamma_D \dot{\cup} \Gamma_N \dot{\cup} \Gamma_R$ disjunkt in drei Mengen auf denen man Dirichlet- (Γ_D), Neumann- (Γ_N) oder Robin-Randbedingungen (Γ_R) fordert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Knoten wie folgt sortiert:

$$\begin{aligned} \Gamma_I &= \{v_1, \dots, v_{n_I}\}, & \Gamma_D &= \{v_{n_I+1}, \dots, v_{n_I+n_D}\}, \\ \Gamma_N &= \{v_{n_I+n_D+1}, \dots, v_{n_I+n_D+n_N}\}, & \Gamma_R &= \{v_{n_I+n_D+n_N+1}, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

Es gilt $n_I + n_D + n_N + n_R = n$. Weiterhin werden die Teilmatrizen der Inzidenz-Matrix

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma_I} &:= [\Phi_{ij}]_{i=1, \dots, n_I}^{j=1, \dots, m} && \in \{-1, 0, 1\}^{n_I \times m}, \\ \Phi_{\Gamma_D} &:= [\Phi_{ij}]_{i=n_I+1, \dots, n_I+n_D}^{j=1, \dots, m} && \in \{-1, 0, 1\}^{n_D \times m}, \\ \Phi_{\Gamma_N} &:= [\Phi_{ij}]_{i=n_I+n_D+1, \dots, n_I+n_D+n_N}^{j=1, \dots, m} && \in \{-1, 0, 1\}^{n_N \times m}, \\ \Phi_{\Gamma_R} &:= [\Phi_{ij}]_{i=n_I+n_D+n_N+1, \dots, n}^{j=1, \dots, m} && \in \{-1, 0, 1\}^{n_R \times m} \end{aligned}$$

sowie analog die Teilmatrizen von Φ^+ und Φ^- definiert. In Kapitel 5 wird gezeigt, wann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit jede Kante mit dem Intervall $[0, 1]$ identifizieren kann. Außerdem wird gezeigt, dass für die Probleme in den Kapiteln 2 und 3 die gewählte Orientierung der Kanten keine Rolle spielt.

1.3 Funktionenräume für Netzwerke

Definition 1.8

Der Raum $C(\mathfrak{N})$ aller auf dem gesamten Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ stetigen Funktionen wird definiert durch

$$C(\mathfrak{N}) := \left\{ f \in \prod_{j=1}^m C[a_j, b_j] \mid f \text{ erfüllt (S1)} \right\} .$$

Dabei bezeichnet die j -te Komponente f_j von f eine Funktion auf der Kante $\alpha_j \simeq [a_j, b_j]$ und (S1) die folgenden Stetigkeitsbedingungen für alle Knoten $v \in \Gamma$

$$f_l(b_l) = f_k(b_k) = f_j(a_j) = f_i(a_i) \tag{S1}$$

für alle $\alpha_l, \alpha_k \in \delta^-(v)$ und für alle $\alpha_j, \alpha_i \in \delta^+(v)$. Auf diesem Raum wird die Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{j=1, \dots, m} \max_{x \in [a_j, b_j]} |f_j(x)|$$

definiert. Weiterhin sei

$$C_c^\infty(\mathfrak{N}) := \prod_{j=1}^m C_c^\infty(a_j, b_j) .$$

Eine Funktion $f \in C_c^\infty(\mathfrak{N})$ wird in jedem Knoten mit 0 fortgesetzt. Für $f \in C_c^\infty(\mathfrak{N})$ ist (S1) dann trivialerweise erfüllt.

Zunächst sei für $k \in \mathbb{N}$

$$C^k(\mathfrak{N}) := \left\{ f \in \prod_{j=1}^m C^k[a_j, b_j] \mid f \text{ erfüllt (S1)} \right\} .$$

Allerdings ist dies nicht die einzige Möglichkeit Räume höherer Regularität in Netzwerken zu definieren. Eine weitere Möglichkeit wird in [AM86] untersucht und in dem Abschnitt 2.3 vorgestellt.

Bemerkung:

- Inwiefern f_j mit der Einschränkung von f auf die Kante α_j identifiziert werden kann, wird in Abschnitt 5.2 erläutert.
- Die Frage, wie man Funktionen höherer Regularität in Netzwerken definiert, ist nicht trivial und auch noch nicht im Detail untersucht, da sich die Frage stellt, ob es sinnvolle Bedingungen für die Ableitungen in den Knoten gibt, die man fordern muss.

Da nach Satz 1.2 jede Funktion $f_j \in W^{k,p}(a_j, b_j)$ mit einer absolut stetigen Funktion auf $[a_j, b_j]$ identifiziert werden kann, sind Punktauswertungsfunktionale wohldefiniert, indem man den absolut stetigen Repräsentanten auswertet.

Definition 1.9

Für ein Netzwerk \mathfrak{N} sowie $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ sei

$$V^{k,p}(\mathfrak{N}) := \left\{ f \in \prod_{j=1}^m W^{k,p}(a_j, b_j) \mid f \text{ erfüllt (S1)} \right\} .$$

Dieser Raum wird versehen mit der kanonischen Norm

$$\|f\|_{V^{k,p}} := \left(\sum_{j=1}^m \|f_j\|_{W^{k,p}(a_j, b_j)}^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Für äußere Knoten $v \in \Gamma_E$ existiert stets nur eine inzidente Kante α_j , entweder eingehend $v \simeq b_j$ oder ausgehend $v \simeq a_j$. Somit besitzt eine Funktion $f \in V^{k,p}(\mathfrak{N})$ genau einen Wert in $v \in \Gamma_E$. Dieser wird mit

$$P_v(f) := \begin{cases} f_k(b_k) & \text{falls } v \simeq b_k, \alpha_k \in \delta^-(v), \\ f_j(a_j) & \text{falls } v \simeq a_j, \alpha_j \in \delta^+(v), \end{cases} \quad (1.1)$$

beschrieben. $P_v(f)$ ist auch für innere Knoten $v \in \Gamma_I$ aufgrund der Stetigkeitsbedingung (S1) wohldefiniert. Man erhält somit für $v \in \Gamma$ eine Knotenauswertungsabbildung

$$P_v : V^{k,p}(\mathfrak{N}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Bemerkung:

- Für $k > 1$ sind nach Satz 1.2 für Randknoten auch C^{k-1} Auswertungen, also Auswertung der $k - 1$ ersten Ableitungen, im Sinne der Spur möglich. Allerdings ist nicht unbedingt klar, welche Bedingungen für $k > 1$ für die Ableitungen von f in den inneren Knoten sinnvoll sind.

Die folgenden Räume werden benötigt, um homogene Dirichlet-Randbedingungen zu behandeln.

Definition 1.10

Für $\Gamma_D \subset \Gamma$ sei der Raum

$$V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N}) := \left\{ f \in V^{k,p}(\mathfrak{N}) \mid P_v(f) = 0 \text{ für alle } v \in \Gamma_D \right\}$$

ebenfalls mit der Norm $\|\cdot\|_{V^{k,p}}$ versehen.

Bemerkung:

- Für den Fall $\Gamma_D = \emptyset$ gilt $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N}) = V_{\emptyset}^{k,p}(\mathfrak{N}) = V^{k,p}(\mathfrak{N})$.
- Unter Umständen könnte es nützlich sein für verschiedene Kanten verschiedene Integrationsordnungen $p_j \in (1, \infty)$ zu zulassen. Dies wird in dieser Arbeit zunächst nicht weiter betrachtet.
- Der Raum $C(\mathfrak{N})$ wird in der Literatur meist ebenso bezeichnet. Die Räume $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ haben in der Literatur keine eigenen Symbole und werden je nach Schule des Autors meist nur mit X, Y oder V bezeichnet.
- Es werden in dieser Arbeit Funktionen $f_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. Viele Aussagen lassen sich analog auf Funktionen $f : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ und Funktionen $f_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^d$ erweitern. Dafür müssen unter anderem in den obigen Definitionen die entsprechenden Räume, wie zum Beispiel $W^{k,p}(a_j, b_j)^d$ oder $W^{k,p}((a_j, b_j); \mathbb{C})$, verwendet werden.

Die folgenden Aussagen und Eigenschaften werden in der Literatur stets vorausgesetzt. Da keine Beweise für diese Aussagen gefunden werden konnten, werden diese hier bewiesen.

Satz 1.11

Die Räume $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ sind separable Banach-Räume.

Beweis. Das kartesische Produkt von separablen Räumen ist separabel bezüglich der kanonischen Produkttopologie. Das kartesische Produkt $V := V_1 \times V_2$ von Banach-Räumen

V_1, V_2 , versehen mit der kanonischen Norm $\|(u_1, u_2)\|_V = \|u_1\|_{V_1} + \|u_2\|_{V_2}$, ist ein Banach-Raum ([GGZ74, S.12]). Damit ist induktiv auch $U := \times_{j=1}^m W^{k,p}(a_j, b_j)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{V^{k,p}}$ ein separabler Banach-Raum, da die Normen $\|\cdot\|_U$ definiert durch

$$\|f\|_U := \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{W^{k,p}(a_j, b_j)}$$

und $\|\cdot\|_{V^{k,p}}$ äquivalent sind. $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ ist ein linearer Teilraum von U und somit auch separabel. Um zu zeigen, dass $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass er ein abgeschlossener Teilraum von U ist. Sei also $(u^n)_n \subset V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ eine in U gegen $u \in U$ konvergente Folge. Es bleibt $u \in V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ oder genauer nur noch zu zeigen, dass u die Bedingung (S1) und die Knotenbedingungen auf Γ_D erfüllt.

Man betrachte die absolut stetigen Repräsentanten der u_j^n . Diese erfüllen die geforderten Knotenbedingungen. Da $W^{k,p}(a_j, b_j)$ stetig in $C[a_j, b_j]$ eingebettet ist, folgt die gleichmäßige und punktweise Konvergenz überall für die absolut stetigen Repräsentanten von $(u_j^n)_n$. Insbesondere gilt für alle $v \in \Gamma$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$u_l^n(b_l) = u_k^n(b_k) = u_j^n(a_j) = u_i^n(a_i) = P_v(u^n)$$

für alle $\alpha_k, \alpha_l \in \delta^-(v)$ und $\alpha_i, \alpha_j \in \delta^+(v)$. Für $n \rightarrow \infty$ folgen die Stetigkeitsbedingungen und die Randbedingungen auf Γ_D auch für die Grenzfunktion u . \square

Satz 1.12

Für $1 < p < \infty$ sind die Räume $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ reflexiv.

Beweis. Da die $W^{k,p}(a_j, b_j)$ reflexiv sind ([AF03, S.61]) und das kartesische Produkt von reflexiven Räumen reflexiv ist, ist auch $U := \times_{j=1}^m W^{k,p}(a_j, b_j)$ reflexiv. Somit sind die nach dem Beweis zu Satz 1.11 abgeschlossenen Teilräume $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ reflexiv [Bre11, S.70]. \square

Satz 1.13

Für $p = 2$ sind die Räume $V_{\Gamma_D}^{k,2}(\mathfrak{N})$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, w)_{V^{k,2}} := \sum_{j=1}^m (u_j, w_j)_{H^k(a_j, b_j)} \quad \text{für } u, w \in V_{\Gamma_D}^{k,2}(\mathfrak{N})$$

Hilbert-Räume.

Beweis. Die Eigenschaften der Skalarprodukte $(\cdot, \cdot)_{H^k(a_j, b_j)}$ induzieren die Skalarprodukt-eigenschaften von $(\cdot, \cdot)_{V^{k,2}}$. Der Raum $V_{\Gamma_D}^{k,2}(\mathfrak{N})$ ist nach Satz 1.11 mit der Norm $\|\cdot\|_{V^{k,2}}$, welche durch das gegebene Skalarprodukt induziert wird, ein Banach-Raum. \square

Lemma 1.14

Die Räume $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ und $U := \times_{j=1}^m W^{k,p}(a_j, b_j)$ liegen dicht in $H := \times_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ bezüglich $|\cdot|_H$. Weiterhin ist $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ stetig und kompakt in H eingebettet.

Beweis. Betrachtet man den Raum $W := C_c^\infty(\mathfrak{N})$, so gilt $W \subset V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$, $W \subset U$, $W \subset H$ und W ist dicht in H bezüglich der beiden äquivalenten Normen

$$\|u\|_H := \sum_{j=1}^m \|u_j\|_{L^2(a_j, b_j)} \quad \text{und} \quad |u|_H := \left(\sum_{j=1}^m \|u\|_{L^2(a_j, b_j)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies sieht man leicht ein, da die entsprechenden eindimensionalen Resultate für jede Kante einzeln verwendet werden können. Da auch $W \subset V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N}) \subset U \subset H$ gilt, sind ebenso $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ und U bezüglich $|\cdot|_H$ dicht in H . Aus dem Satz von Rellich-Kondrachov [Bre11, Satz 9.16] folgt für die endlich vielen Kanten nacheinander angewendet, dass U kompakt in H eingebettet ist. Nun sind die $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ als abgeschlossene Teilräume mit der gleichen Norm ebenfalls kompakt in H eingebettet. \square

Bemerkung:

- Offensichtlich liegt $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ weder bezüglich $\|\cdot\|_{V^{k,p}}$ noch $\|\cdot\|_U$ dicht in U .
- Im folgenden bezeichnet $|\cdot|_2$ die durch das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^d}$ induzierte euklidische Norm im \mathbb{R}^d und $|\cdot|_p$ die entsprechende p -Norm.

Da man die Räume $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ für entsprechende Gelfand-Tripel verwenden möchte, ist es nützlich, deren Dualräume genauer zu charakterisieren. Dies stellt sich als schwierig heraus und wurde in der Literatur noch nicht getan. Zunächst gilt der folgende Satz.

Satz 1.15

Für Banach-Räume V_1, \dots, V_m gilt

$$\left(\prod_{j=1}^m V_j \right)^* \cong \bigoplus_{j=1}^m (V_j)^* .$$

Beweis. Die Aussage folgt aus dem analogen Resultat für beliebige kartesische Produkte von lokalkonvexen Räumen in [Sch99, S. 137] \square

Bemerkung:

- Für jedes $f \in \left(\prod_{j=1}^m W^{k,p}(a_j, b_j) \right)^*$ ist die Einschränkung von f auf $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ ein lineares stetiges Funktional auf $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$. In diesem Sinne gilt also $f \in (V_{\Gamma_D}^{k,p})^*$.
- Funktionale aus $(V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N}))^*$, die auf $\prod_{j=1}^m W^{k,p}(a_j, b_j)$ nicht wohldefiniert sind, sind zum Beispiel Punktauswertungen auf inneren Knoten, welche bei verallgemeinerten Kirchhoff-Bedingungen (Kap. 2) auftreten.

Analog zu der Knotenauswertung (1.1) sind für $u \in V^{k,p}(\mathfrak{N})$ und Teilmengen $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $\tilde{\Gamma} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_{\tilde{n}}}\} \subset \Gamma$ auch Objekte der Art

$$u_{\tilde{\Gamma}} := P_{\tilde{\Gamma}}(u) := \begin{pmatrix} P_{v_{i_1}}(u) \\ \vdots \\ P_{v_{i_{\tilde{n}}}}(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}, \quad (1.2)$$

also die Spur von u auf $\tilde{\Gamma}$, wohldefiniert. Dies ist auch für innere Knoten wohldefiniert, in denen die Stetigkeitsbedingungen (S1) gelten. Das folgende Lemma wird in den Kapiteln 2, 3 und 4 für Beschränktheitsabschätzungen benötigt.

Lemma 1.16

Für $\emptyset \neq \tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $\tilde{n} := |\tilde{\Gamma}|$ und $1 < p < \infty$ gibt es Konstanten $K_1, K_2 \geq 0$, sodass für alle $u \in V^{1,p}(\mathfrak{N})$ die folgenden Abschätzungen gelten:

$$|u_{\tilde{\Gamma}}|_p \leq K_1 \|u\|_{V^{1,p}} \quad (1.3)$$

und

$$\sum_{j=1}^m \left\| \frac{du_j}{dx} \right\|_{L^p(a_j, b_j)} \leq K_2 \|u\|_{V^{1,p}} . \quad (1.4)$$

Beweis. Mit der stetigen Einbettung $W^{1,p}(a_j, b_j) \hookrightarrow C[a_j, b_j]$ gilt

$$|u_{\tilde{\Gamma}}|_p = \left(\sum_{v \in \tilde{\Gamma}} P_v(u)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^m \|u_j\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^m k_j^p \|u_j\|_{W^{1,p}(a_j, b_j)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_1 \|u\|_{V^{1,p}}.$$

Dabei sind k_j die Einbettungskonstanten zu $W^{1,p}(a_j, b_j) \hookrightarrow C[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, und K_1 das Maximum der k_j .

Die zweite Abschätzung (1.4) folgt sofort aus

$$\left\| \frac{du_j}{dx} \right\|_{L^p(a_j, b_j)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(a_j, b_j)} \quad (1.5)$$

und der Ungleichung

$$\sum_{j=1}^m a_j \leq m^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^m a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.6)$$

für nichtnegative $a_j \in \mathbb{R}$, welche aus der Hölderschen Ungleichung in \mathbb{R}^m folgt. \square

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die folgende Abkürzung für $u \in V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ verwendet

$$\frac{d^l u}{dx^l} := \left(\frac{du_j}{dx} \right)_{j=1, \dots, m} \quad \text{für } l = 1, \dots, k.$$

Nun wird ein Lemma bewiesen, welches für eine Gårdingsche Ungleichung bei Robin-Knotenbedingungen verwendet wird.

Lemma 1.17

Für $\emptyset \neq \tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ gibt es ein $K > 0$, sodass für alle $u \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ die Ungleichung

$$\left| \frac{du}{dx} \right|_H^2 + |u_{\tilde{\Gamma}}|_2^2 \geq K |u|_H^2 \quad (1.7)$$

mit $H := \times_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ und $|\cdot|_H$ aus Lemma 1.14 vom Poincaré-Friedrich-Typ gilt.

Beweis. Angenommen die Aussage gilt nicht. Dann gibt es eine Folge $(u^n)_n \subset V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert ist ($\|u^n\|_{V^{1,2}} = 1$), sodass gilt

$$\left| \frac{du^n}{dx} \right|_H^2 + |u_{\tilde{\Gamma}}^n|_2^2 < \frac{1}{n} |u^n|_H^2 \leq \frac{1}{n} \|u^n\|_{V^{1,2}}^2 \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Da $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ reflexiv ist (Satz 1.12) und $(u^n)_n$ beschränkt ist, existiert nach Eberlein-Šmulian (Satz A.13) eine in $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ schwach gegen $u \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ konvergente Teilfolge, welche wieder mit $(u^n)_n$ bezeichnet wird. Mit der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit der Normen gilt

$$0 \leq \left| \frac{du}{dx} \right|_H^2 + |u_{\tilde{\Gamma}}|_2^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{du^n}{dx} \right|_H^2 + \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_{\tilde{\Gamma}}^n|_2^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Daraus folgt, dass die schwache Ableitung von u fast überall verschwindet und der absolut stetige Repräsentant von u somit auf jeder Kante konstant ist. Aufgrund der Stetigkeitsbedingung (S1) in den Knoten haben alle Komponenten von u den gleichen Wert, da das Netzwerk zusammenhängend ist. Nun ist der Wert in den Knoten aus $\tilde{\Gamma}$ bekannt und mit

$$|u_{\tilde{\Gamma}}^n|_2^2 = 0$$

gleich Null. Somit verschwindet u auf dem gesamten Netzwerk. Mit Hilfe von

$$\left| \frac{du^n}{dx} \right|_H^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und $\|u\|_{V^{1,2}} = 1$ erhält man

$$\|u^n\|_{V^{1,2}} - \left| \frac{du^n}{dx} \right|_H^2 = |u^n|_H^2 \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Weiterhin folgt aus der schwachen Konvergenz von $(u^n)_n$ gegen $u = 0$ in $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ auch die schwache Konvergenz der Komponentenfolgen $(u_j^n)_n$ gegen 0 in W_j mit

$$W_j := \{f \in H^1(0, 1) \mid f(v) = 0, \text{ falls } \alpha_j \in \delta(v) \text{ und } v \in \Gamma_D\}.$$

Diese Aussage ist nicht trivial und beruht auf der Identifikation aus Satz 1.15. Nimmt man nun ein beliebiges $\varphi_j \in (W_j)^*$ und Nullfunktionale für alle anderen Komponenten, erhält man ein

$$\varphi \in \left(\prod_{k=1}^m W_k \right)^* \quad \text{mit} \quad \varphi(u^n) = \varphi_j(u_j^n),$$

dessen Einschränkung auf $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ in $(V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*$ liegt.

Mit dem Einbettungssatz von Rellich (Satz A.19) folgt nun die starke Konvergenz von $(u_j^n)_n$ in $L^2(a_j, b_j)$ und somit auch die starke Konvergenz von $(u^n)_n$ in $\prod_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ gegen 0, was ein Widerspruch zu (1.8) ist. \square

Bemerkung:

- Die starke Konvergenz von $(u^n)_n$ in $\prod_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ folgt auch aus Lemma 1.14.
- Falls \mathfrak{N} nicht zusammenhängend ist, gilt das Lemma 1.17 immer noch sinngemäß, vorausgesetzt $\tilde{\Gamma}$ enthält mindestens einen Knoten aus jeder Zusammenhangskomponente.
- Aus der schwachen Konvergenz jeder Komponente folgt nicht die schwache Konvergenz in $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$, wie man sich leicht anhand von Punktauswertungsfunktionalen auf inneren Knoten klar macht.
- Das Lemma 1.17 wurde unabhängig von der äquivalenten Aussage [EK16, Satz 5.4] erarbeitet. Zu dem Beweis in [EK16] ist zu sagen, dass dort mit *Einbettung* vermutlich eine vorher eingeführte Projektion Π_0 und keine Einbettung im Sinne von Definition A.12 gemeint ist.

Nach diesen Grundlagen werden in den folgenden Kapiteln spezielle Typen von instationären Differentialgleichungen in Netzwerken untersucht.

2 Lineare Diffusion

In den folgenden Abschnitten wird eine Verallgemeinerung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + e(x, t)u(x, t) = f(x, t)$$

der Wärmeleitgleichung auf jeder Kante betrachtet. Auch wenn dieser Typ von Differentialgleichungen in den Anwendungen wenig präsent ist, eignet er sich, um einige netzwerkspezifische Konzepte vorzustellen und mit Hilfe geeigneter Notation kürzere und übersichtlichere Formulierungen aufzustellen. Weiterhin basieren die bisherigen Resultate zu Diffusionsgleichungen in Netzwerken überwiegend auf Halbgruppentheorie. Deshalb wird dieses Problem hier mit variationellen Methoden auf Diskretisierungsbeweise zurückgeführt.

In Abschnitt 2.1 wird das konkrete Problem vorgestellt. Außerdem werden Knotenbedingungen, die bei Netzwerkproblemen anstelle von Randbedingungen auftreten können, eingeführt und motiviert. Anschließend wird eine schwache Formulierung aufgestellt. Diese wird in Abschnitt 2.2 näher auf eindeutige Lösbarkeit untersucht. Daraufhin wird das hier unabhängig von der Literatur erzielte Resultat in Abschnitt 2.3 mit bekannten Resultaten verglichen. Abschließend werden weiterführende Aussagen präsentiert.

2.1 Problemstellung

Es sei ein Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ mit $n := |\Gamma|$ und $m := |J|$ gegeben, wobei alle Kanten $\alpha_j \in J$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $[0, 1]$ identifiziert werden. In Kapitel 5 wird gezeigt, dass dies in diesem Zusammenhang keine Einschränkung darstellt. Für die folgenden Betrachtungen seien zunächst alle beteiligten Funktionen hinreichend glatt.

Für $T > 0$ und für alle Kanten $\alpha_j \in J$ fordert man auf $(0, T)$ und dem Inneren $(0, 1)$ der Kante α_j eine Differentialgleichung

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) + e_j(x, t)u_j(x, t) = f_j(x, t) \quad (2.1)$$

mit einem Anfangswert

$$u_j(x, 0) = (u_0)_j(x) .$$

In den äußeren Knoten Γ_E gibt es stets nur eine inzidente Kante. Somit können auf $\Gamma_E = \Gamma_D \dot{\cup} \Gamma_N \dot{\cup} \Gamma_R$ Randbedingungen gefordert werden. Für ein $v \in \Gamma_D$ mit $n_D := |\Gamma_D|$ und $h_D : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_D}$ gelte die Dirichlet-Randbedingung

$$u_j(0, t) = (h_D(t))_v = u_k(1, t) \quad \text{für alle } \alpha_j \in \delta^+(v), \alpha_k \in \delta^-(v) \text{ } t \in [0, T] .$$

In dieser Bedingung bezeichnet $(h_D(t))_v$ die zu $v \in \Gamma_D$ zugehörige Komponente von $h_D(t)$. Für $v \in \Gamma_E$ enthalten $\delta^+(v)$ und $\delta^-(v)$ zusammen stets genau eine Kante. Nun kann man diese Randbedingungen für alle Knoten $v \in \Gamma_D$ gemeinsam kurz mit Hilfe der Matrizen $\Phi_{\Gamma_D}^+$ und $\Phi_{\Gamma_D}^-$ formulieren

$$u_{\Gamma_D}(t) := \Phi_{\Gamma_D}^+ u(1, t) + \Phi_{\Gamma_D}^- u(0, t) = h_D(t) . \quad (2.2)$$

Hierbei sind die Ausdrücke

$$u(1, t) := (u_j(1, t))_{j=1}^m \quad \text{und} \quad u(0, t) := (u_j(0, t))_{j=1}^m$$

nur eine Abkürzung.

Bemerkung:

- Die Matrizen Φ^+ , Φ^- und Φ sowie deren Teilmatrizen ordnen Kanten ihren Knoten zu.
- Man könnte in dem betrachteten Spezialfall, $\alpha_j \simeq [0, 1]$ für alle $\alpha_j \in J$, wie in (2.2) suggeriert wird, den Raum $\times_{j=1}^m W^{k,p}(0, 1)$ mit $W^{k,p}(0, 1)^m$ identifizieren, was in einigen Arbeiten getan wird. Hier wird dies nicht getan, um die allgemeine Vorgehensweise für $\alpha_j \simeq [a_j, b_j]$ zu verdeutlichen und Missverständnisse zu vermeiden. Deshalb werden in dieser Arbeit solche Abkürzungen nur für die Start- und Endpunkte der Kanten verwendet.

Analog ergeben sich für alle $v \in \Gamma_N$, $n_N := |\Gamma_N|$, und $h_N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_N}$ die Neumann-Randbedingungen

$$\nu_v^j c_j(v, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(v, t) = (h_N(t))_v \quad \text{für } \alpha_j \in \delta(v) = \delta^+(v) \cup \delta^-(v).$$

Dabei bezeichnen für $v \in \Gamma_E$ und $w \in C(\mathfrak{N})$

$$\nu_v^j := \begin{cases} +1 & \text{für } v \simeq 1, \alpha_j \in \delta^-(v), \\ -1 & \text{für } v \simeq 0, \alpha_j \in \delta^+(v), \end{cases} \quad \text{und} \quad w_j(v) := \begin{cases} w_j(1) & \text{für } \alpha_j \in \delta^-(v), \\ w_j(0) & \text{für } \alpha_j \in \delta^+(v), \end{cases}$$

den äußeren Normalenvektor und den Wert von w in v . Dies ist wohldefiniert, da es für $v \in \Gamma_E$ stets nur eine inzidente Kante gibt. Mit den Matrizen $\Phi_{\Gamma_N}^+$, $\Phi_{\Gamma_N}^-$ und den Vereinbarungen

$$\begin{aligned} C(1, t) &:= \text{diag}(c_j(1, t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}, & \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &:= \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) \right)_{j=1, \dots, m}, \\ C(0, t) &:= \text{diag}(c_j(0, t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}, & \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &:= \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) \right)_{j=1, \dots, m} \end{aligned}$$

lassen sich diese Randbedingungen kurz schreiben als

$$\Phi_{\Gamma_N}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_N}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h_N(t). \quad (2.3)$$

Nach diesem Prinzip sei für jedes $v \in \Gamma_R$, $r_v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h_R : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_R}$ eine Robin-Randbedingung gegeben durch

$$\nu_v^j c_j(v, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(v, t) + r_v(t) u_j(v, t) = (h_R(t))_v \quad \text{für } \alpha_j \in \delta(v).$$

Mit $R(t) := \text{diag}(r_v(t)) \in \mathbb{R}^{n_R \times n_R}$ und $u_{\Gamma_R}(t) := \Phi_{\Gamma_R}^+ u(1, t) + \Phi_{\Gamma_R}^- u(0, t)$ ergibt sich

$$\Phi_{\Gamma_R}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_R}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + R(t) u_{\Gamma_R}(t) = h_R(t). \quad (2.4)$$

Dies ergibt $n_E = n - n_I = n_D + n_N + n_R$ Randbedingungen. Für die m Differentialgleichungen erwartet man allerdings $2m$ Rand- und Knotenbedingungen.

Im Folgenden werden die kanonischen Knotenbedingungen für innere Knoten vorgestellt.

In jedem inneren Knoten $v \in \Gamma_I$, $n_I := |\Gamma_I|$, ist eine sogenannte homogene Standard-Kirchhoff-Bedingung

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (\text{K1})$$

üblich. Weiterhin fordert man folgende Stetigkeitsvoraussetzungen auf dem Netzwerk. Für alle $v \in \Gamma$ gelte

$$u_i(0, t) = u_j(0, t) = u_k(1, t) = u_l(1, t) \quad (\text{S2})$$

für alle $\alpha_i, \alpha_j \in \delta^+(v)$ und für alle $\alpha_k, \alpha_l \in \delta^-(v)$. Diese Bedingungen sind nur auf den inneren Knoten relevant, da sie in den Randknoten trivialerweise erfüllt werden.

Motivation der inneren Knotenbedingungen

Selbstverständlich stellt sich die Frage, warum genau diese Kirchhoff (K1) und Stetigkeitsbedingungen (S2) für innere Knoten gefordert werden.

Dazu sei zunächst die homogene Wärmeleitgleichung auf dem Intervall $[0, 2]$ mit homogenen Neumann-Randbedingungen, Anfangswert u_0 und die zugehörige klassische Lösung $u : [0, 2] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Dieses Problem kann man sich auch als auf dem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\{v_1, v_2\}, \{(v_1, v_2)\})$ mit einer Kante $(v_1, v_2) \simeq [0, 2]$ gestellt denken. In diesem System gilt der Energieerhaltungssatz, das heißt, die gesamte Energie des Systems bleibt zeitlich konstant

$$\frac{d}{dt} \int_0^2 u(x, t) dx = 0.$$

Wird nun das Intervall $[0, 2]$ mit einem neuen Knoten $v_3 \simeq 1$ in die zwei neuen Kanten $\alpha_1 = (v_1, v_3) \simeq [0, 1]$ und $\alpha_2 = (v_3, v_2) \simeq [1, 2]$ aufgeteilt, stellt sich die Frage, welche Knotenbedingungen sich in v_3 ergeben. Man erwartet, dass die Lösung \tilde{u} des neuen Netzwerkproblems gegeben ist durch

$$\tilde{u} := \begin{pmatrix} u_1 := u|_{[0,1] \times [0,T]} \\ u_2 := u|_{[1,2] \times [0,T]} \end{pmatrix}.$$

Der Energieerhaltungssatz lautet in dieser Formulierung:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u_1(x, t) dx + \int_1^2 u_2(x, t) dx \right) = 0.$$

Da u_1 und u_2 auf dem Inneren der jeweiligen Kanten die Wärmeleitgleichung erfüllen und in 0 und 2 homogene Neumann-Randbedingungen vorgegeben sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u_1(x, t) dx + \int_1^2 u_2(x, t) dx \right) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x, t) dx + \int_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x, t) dx \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(1, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) + \frac{\partial u_2}{\partial x}(2, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(1, t) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(v_3, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(v_3, t). \end{aligned}$$

Dies entspricht genau den homogenen Standard-Kirchhoff-Bedingungen in dem inneren Knoten v_3 .

Bemerkung:

- In der obigen Rechnung wurde Integration und Differentiation mit einer Folgerung aus dem Satz von Lebesgue (Satz A.16) vertauscht. Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von u bezüglich t können konstante Majoranten gewählt werden.
- Bei den hyperbolischen Transportproblemen in Kapitel 6 wird eine analoge Kirchhoff-Bedingung gefordert. Diese stellt sicher, dass in einem inneren Knoten der gesamte Einfluss dem gesamten Ausfluss entspricht.

Die schwache Lösung $u \in L^2(0, T; H^1(0, 2))$ der Wärmeleitgleichung über $(0, 2)$ zu einer rechten Seite $f \in L^2(0, T; (H^1(0, 2))^*)$ ist aufgrund der Einbettung $H^1(0, 2) \hookrightarrow C[0, 2]$ (Satz 1.2) im Sinne der Spur stetig in 1, also sollte die Netzwerklösung \tilde{u} dies auch sein. Deshalb fordert man die Stetigkeitsbedingungen (S2) in allen Knoten $v \in \Gamma$.

Man kann noch einen Schritt weiter gehen und mit $k_v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_I}$ für $n_I := |\Gamma_I|$ verallgemeinerte Kirchhoff-Bedingungen

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} c_j(b_j, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(b_j, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} c_j(a_j, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(a_j, t) + k_v(t) P_v(u(t)) = (h_K(t))_v$$

betrachten. Abkürzend ergibt sich mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$, $u_{\Gamma_I}(t) := P_{\Gamma_I}(u(t))$ und der Matrix $K(t) := \text{diag}(k_v(t)) \in \mathbb{R}^{n_I \times n_I}$ die Darstellung

$$\Phi_{\Gamma_I}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_I}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + K(t) u_{\Gamma_I}(t) = h_K(t). \quad (\text{K2})$$

Bemerkung:

- Der Ausdruck $u(t)$ bezeichnet die abstrakte Funktion $u(t) = (u_j(\cdot, t))_{j=1}^m$.
- Mit Hilfe der abstrakten Funktion u und der Knotenauswertung P_v lassen sich die Stetigkeitsbedingungen (S2) für alle $v \in \Gamma$ schreiben als

$$u_i(1, t) = u_k(0, t) = P_v(u(t)) \quad \text{für alle } \alpha_i \in \delta^-(v), \alpha_k \in \delta^+(v).$$

Diese Kirchhoff-Bedingungen sind nun, wie später deutlich wird, eine natürliche Knotenbedingung pro innerem Knoten $v \in \Gamma_I$, also insgesamt n_I Bedingungen. Die Stetigkeitsbedingungen (S2) ergeben $\text{deg}(v) - 1$ essentielle Bedingungen pro Knoten v , da man den Wert einer inzidenten Kante festhält und alle $\text{deg}(v) - 1$ anderen inzidenten Kanten denselben Wert haben sollen. Diese Bedingungen werden in die Lösungs- und Testräume eingearbeitet.

Für jeden Digraphen (Γ, J) gilt

$$\sum_{v \in \Gamma} \text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v) = \sum_{v \in \Gamma} \text{deg}(v) = 2|J| = 2m,$$

da jede Kante zu genau zwei Knoten inzident ist. Insgesamt ergibt dies wie erwartet

$$\sum_{v \in \Gamma} (\text{deg}(v) - 1) + n_I + n_E = 2m - n + n = 2m$$

Rand- und Knotenbedingungen.

Das gesamte Problem konstituiert sich nun aus den Differentialgleichungen (2.1) samt Anfangswert für alle $\alpha_j \in J$, den Randbedingungen (2.2) , (2.3) und (2.4) sowie den Knotenbedingungen (S2) und (K2)

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) + e_j(x, t) u_j(x, t) = f_j(x, t) \\ u_j(x, 0) = (u_0)_j(x) \\ \Phi_{\Gamma_D}^+ u(1, t) + \Phi_{\Gamma_D}^- u(0, t) = h_D(t) \\ \Phi_{\Gamma_N}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_N}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h_N(t) \\ \Phi_{\Gamma_R}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_R}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + R(t) u_{\Gamma_R}(t) = h_R(t) \\ u_i(1, t) = u_k(0, t) = P_v(u(t)) \\ \Phi_{\Gamma_I}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_I}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + K(t) u_{\Gamma_I}(t) = h_K(t) . \end{array} \right.$$

In dieser kurzen Darstellung wird benutzt, dass alle Kanten α_j mit einem normierten Intervall $[0, 1]$ identifiziert werden. Für beliebige Kanten kann man mit ähnlichen Abkürzungen eine analoge Kurzform aufstellen, da nur Symbole für die Auswertungen an den Randpunkten benötigt werden. Weiterhin werden in dieser Arbeit bei solchen Formulierungen aus ästhetischen Gründen die Quantifizierungen, wie zum Beispiel

$$\begin{array}{ll} \text{für alle } \alpha_j \in J, & \text{für alle } v \in \Gamma, \\ \text{für alle } \alpha_i \in \delta^-(v), \alpha_k \in \delta^+(v), & \text{für alle } (x, t) \in \alpha_j \times [0, T], \end{array}$$

für die entsprechenden Bedingungen nicht mit in das System geschrieben, sondern möglichst davor oder danach im Text präzisiert.

Nun wird die schwache Formulierung dieses Problems aufgestellt.

Schwache Formulierung

Seien zunächst homogene Dirichlet-Knotenbedingungen, das heißt, $h_D = 0$, gegeben. Der Fall von inhomogenen Dirichlet-Bedingungen wird aufgeschoben und nach Satz 2.6 behandelt. Nach Satz 1.11, Satz 1.12 und Lemma 1.14 bilden

$$(V =) V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \xrightarrow{c} (H =) \bigotimes_{j=1}^m L^2(0, 1) \hookrightarrow (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^* (= V^*)$$

einen Gelfand-Tripel. Es seien die Räume $L^2(0, T; V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))$, $L^2(0, T; (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*)$ sowie

$$\mathcal{W}_{\Gamma_D}(0, T) := \left\{ u \in L^2(0, T; V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})) \mid \exists u' \in L^2(0, T; (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*) \right\}$$

gegeben. Es werden abstrakte Funktionen betrachtet. Die Funktion $u : (0, T) \rightarrow V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ wird mit $u(t) := (u_j(\cdot, t))_{j=1}^m$ identifiziert. Um die schwache Formulierung von (P1) zu erhalten, wird (2.1) mit $w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ getestet. Dies ergibt zunächst

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{j=1}^m \int_0^1 \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) \varphi(t) w_j(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) \varphi(t) w_j(x) \\ & + e_j(x, t) u_j(x, t) \varphi(t) w_j(x) dx dt = \int_0^T \sum_{j=1}^m \int_0^1 f_j(x, t) \varphi(t) w_j(x) dx dt . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nach partieller Integration in den Termen mit den Ortsableitungen folgt

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^m \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) w_j(x) dx \\
 & = \sum_{j=1}^m \int_0^1 \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) \frac{dw_j}{dx}(x) dx \\
 & \quad - \left(\sum_{j=1}^m c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x} u_j(1, t) w_j(1) - c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) w_j(0) \right). \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Nun wird die spezielle Graphenstruktur und deren Darstellung mit Hilfe der Inzidenz-Matrizen genutzt, um die Randauswertungen der partiellen Integration mit den geforderten Knotenbedingungen zu ersetzen. Jede Kante α_j startet in genau einem Knoten und endet in genau einem Knoten. Die Werte der Funktion w sind nach (S1) in jedem Knoten eindeutig festgelegt. Weiterhin entfallen alle Knoten mit den homogenen Dirichlet-Bedingungen aufgrund der Wahl der Testfunktion $w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) w_j(1) - c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) w_j(0) \\
 & = \sum_{v \in \Gamma \setminus \Gamma_D} \sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) P_v(w) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) P_v(w) \\
 & = \sum_{\substack{v \in \\ \Gamma_I \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R}} \left(\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) \right) P_v(w) \\
 & = \left(\Phi_{\Gamma_I}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_I}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), w_{\Gamma_I} \right)_{\mathbb{R}^{n_I}} \\
 & \quad + \left(\Phi_{\Gamma_N}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_N}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), w_{\Gamma_N} \right)_{\mathbb{R}^{n_N}} \\
 & \quad + \left(\Phi_{\Gamma_R}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_R}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), w_{\Gamma_R} \right)_{\mathbb{R}^{n_R}}.
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit verwendet die oben eingeführten Abkürzungen und $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^d}$ bezeichnet für $d = n_I, n_N, n_R$ jeweils das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^d . Mit den Bedingungen (2.3), (2.4) und (K2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) w_j(1) - c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) w_j(0) \\
 & = (-K(t)u_{\Gamma_I}(t) + h_K(t), w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} \\
 & \quad + (h_N(t), w_{\Gamma_N})_{\mathbb{R}^{n_N}} + (-R(t)u_{\Gamma_R}(t) + h_R(t), w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}}. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (2.5) folgt mit (2.6) und (2.7)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \sum_{j=1}^m \int_0^1 \varphi(t) \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) w_j(x) + \varphi(t) \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) \frac{dw_j}{dx}(x) \\
 & \quad + \varphi(t) e_j(x, t) u_j(x, t) w_j(x) dx \\
 & \quad + \varphi(t) (K(t) u_{\Gamma_I}(t), w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} + \varphi(t) (R(t) u_{\Gamma_R}(t), w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} dt \\
 & = \int_0^T \varphi(t) \left(\sum_{j=1}^m \int_0^1 f_j(x, t) w_j(x) dx + (h_K(t), w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} \right. \\
 & \quad \left. + (h_N(t), w_{\Gamma_N})_{\mathbb{R}^{n_N}} + (h_R(t), w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Mit den abstrakten Funktionen für $c_j(t) := c_j(\cdot, t)$ und $e_j(t) := e_j(\cdot, t)$, $j = 1, \dots, m$ sowie den Matrizen $E(t) := \text{diag}(e_j(t))$ und $C(t) := \text{diag}(c_j(t))$ und dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ in $\times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ werden eine Abbildung $\beta_1 : [0, T] \times V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \times V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
 \beta_1(t, u, w) & := \sum_{j=1}^m \int_0^1 c_j(x, t) \frac{du_j}{dx}(x) \frac{dw_j}{dx}(x) + e_j(x, t) u_j(x) w_j(x) dx \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n_I} k_{v_i}(t) P_{v_i}(u) P_{v_i}(w) + \sum_{i=n_I+n_D+n_N+1}^n r_{v_i}(t) P_{v_i}(u) P_{v_i}(w) \tag{2.8} \\
 & = \left(C(t) \frac{du}{dx}, \frac{dw}{dx} \right)_H + (E(t)u, w)_H + (K(t)u_{\Gamma_I}, w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} + (R(t)u_{\Gamma_R}, w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}}
 \end{aligned}$$

und die rechte Seite $F_1(t) : V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
 \langle F_1(t), w \rangle_{(V_{\Gamma_D}^{1,2})^* \times V_{\Gamma_D}^{1,2}} & := \sum_{j=1}^m \int_0^1 f_j(x, t) w_j(x) dx \\
 & \quad + (h_K(t), w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} + (h_N(t), w_{\Gamma_N})_{\mathbb{R}^{n_N}} + (h_R(t), w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}}
 \end{aligned}$$

betrachtet. Nun wird die schwache Version des oben eingeführten Problems (P1) noch einmal zusammengefasst. Im Folgenden werden die dualen Paarungen, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, nur mit dem Primal-Raum indiziert.

Problem In einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$, mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$ für alle $\alpha_j \in J$, wird für gegebene $f_j \in L^2(0, T; (W_j)^*)$, $0 < c_j, e_j \in C([0, T]; C[0, 1])$, $h_K \in C[0, T]^{n_I}$, $h_N \in C[0, T]^{n_N}$, $h_R \in C[0, T]^{n_R}$, $0 < r_v, k_v \in C[0, T]$ und $u_0 \in \times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ eine Lösung $u \in \mathcal{W}_{\Gamma_D}(0, T)$ gesucht, sodass

$$(SP1) \begin{cases} \int_0^T \varphi(t) \langle u'(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} + \varphi(t) \beta_1(t, u(t), w) dt = \int_0^T \varphi(t) \langle F_1(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} dt \\ u(0) = u_0 \quad \text{in } \times_{j=1}^m L^2(0, 1) \end{cases}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ und für alle $w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ gilt. Je nach Kante gilt

$$W_j := \{f \in H^1(0, 1) \mid f(v) = 0, \text{ falls } \alpha_j \in \delta(v) \text{ und } v \in \Gamma_D\}.$$

Bemerkung:

- Die Mengen Γ_D , Γ_N und Γ_R dürfen leer sein. Falls Γ_I leer ist, gibt es aufgrund des Zusammenhangs des Digraphen nur eine Kante.
- In dem Beweis von Lemma 2.4 wird deutlich, dass man nur $e_j \geq 0$ und nur entweder $r_v > 0$ oder $k_v > 0$ für ein $v \in \Gamma_R \cup \Gamma_I$ benötigt und für alle anderen r_v und k_v nicht negative Funktionen zulassen kann. Alternativ genügt auch $\Gamma_D \neq \emptyset$.
- Für glatte Lösungen u von (SP1) erhält man die Differentialgleichungen und Knotenbedingungen, indem man geeignete Testfunktionen wählt. Dies wird in Lemma 2.8 gezeigt.
- Die Daten f_j und $(u_0)_j$ sind so gewählt, wie es für die Wohlgestelltheit des schwachen Problems auf dem Interval $(0, 1)$ üblich ist. Die anderen Funktionen sind hinreichend für das Netzwerkproblem gewählt und können sicher noch allgemeiner gewählt werden.
- Die Zeitableitung ist eine verallgemeinerte Ableitung ([Emm04, Def. 8.1.1]).

2.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, das Problem (SP1) mit Hilfe eines bekannten Satzes für lineare Evolutionsprobleme erster Ordnung (Satz 2.1) zu lösen.

Satz 2.1 [Zei90a]

Seien V , H und V^* ein Gelfand-Tripel. Dann gibt es zu jedem $F \in L^2(0, T; V^*)$ und $u_0 \in H$ genau ein $u \in \mathcal{W}(0, T)$ mit

$$\int_0^T \varphi(t) \langle u'(t), w \rangle_{V^* \times V} + \varphi(t) \beta(t, u(t), w) dt = \int_0^T \varphi(t) \langle F(t), w \rangle_{V^* \times V} dt$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ und für alle $w \in V$ und $u(0) = u_0$ in H , falls die Abbildung β die folgenden Eigenschaften erfüllt.

- (L1) Für festes $t \in [0, T]$ ist durch $\beta(t, \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform gegeben und für feste $u, w \in V$ ist $\beta(\cdot, u, w) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar.
- (L2) Die Bilinearform $\beta(t, \cdot, \cdot)$ ist bezüglich des ersten Argumentes gleichmäßig beschränkt im zweiten und dritten Argument. Es gibt also ein $\gamma > 0$, so dass

$$|\beta(t, u, w)| \leq \gamma \|u\|_V \|w\|_V$$

für alle $u, w \in V$ und $t \in [0, T]$ gilt.

- (L3) Die Abbildung β genügt einer Gårdingschen Ungleichung. Es gibt also ein $\mu > 0$ und ein $\kappa \geq 0$, sodass

$$\beta(t, u, u) \geq \mu \|u\|_V^2 - \kappa \|u\|_H^2$$

für alle $u \in V$ und $t \in [0, T]$ gilt.

Weiterhin hängt die Lösung stetig und linear von den Daten ab. Es gibt ein $\tilde{K} > 0$ mit

$$\|u\|_{\mathcal{W}(0, T)} \leq \tilde{K} (\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0, T; V^*)}) . \quad (2.9)$$

Die im Beweis konstruierten Galerkin-Approximationen konvergieren im folgenden Sinne gegen u

$$u^n \rightarrow u \text{ in } L^2(0, T; V) \quad \max_{0 \leq t \leq T} |u^n(t) - u(t)|_H \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty . \quad (2.10)$$

Beweis. Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [Zei90a, Kap. 23.7-23.9]. □

Bemerkung:

- Da alle beteiligten Räume eines Gelfand-Tripels nach Definition separable Banach-Räume sind, gibt es die benötigte Galerkin Basis $\{w^1, w^2, \dots\} \subset V$ (Def. A.14) und eine Folge $u_0^n \rightarrow u_0$ in H mit $u_0^n \in \text{span}\{w^1, \dots, w^n\}$ ([Emm04, Lem. 4.1.2]), die in [Zei90a] gefordert werden.

Ziel ist es nun zu zeigen, dass $F_1 \in L^2(0, T; (V_{\Gamma_D}^{1,2})^*)$ gilt, β_1 die Bedingungen (L1), (L2) und (L3) erfüllt und somit Satz 2.1 anwendbar ist.

Lemma 2.2

Die Abbildung β_1 aus (2.8) erfüllt (L1).

Beweis. Da die c_j und e_j für jedes feste $x \in \alpha_j \simeq [0, 1]$ sowie r_v und k_v für jedes $v \in \Gamma_R$ beziehungsweise $v \in \Gamma_I$ Lebesgue-messbar in t sind, ist auch $\beta_1(\cdot, u, w)$ für $u, w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ Lebesgue-messbar in t .

Weiterhin ist $\beta_1(t, \cdot, \cdot)$ sogar eine symmetrische Bilinearform auf $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$, da $C(t)$, $E(t)$, $K(t)$ und $R(t)$ als Diagonalmatrizen symmetrisch sind und die Linearität in jedem Argument aus den Eigenschaften der Skalarprodukte folgt. □

Lemma 2.3

Die Bilinearform $\beta_1(t, \cdot, \cdot)$ erfüllt (L2).

Beweis. Es gilt mit der Beschränktheit der c_j , e_j , k_v und der r_v sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in L^2 und in \mathbb{R}^d , $d = m, n_I, n_R$, die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |\beta_1(t, u, w)| &\leq \sum_{j=1}^m \|c_j\|_\infty \left\| \frac{du_j}{dx} \right\|_{L^2} \left\| \frac{dw_j}{dx} \right\|_{L^2} + \|e_j\|_\infty \|u_j\|_{L^2} \|w_j\|_{L^2} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_I} \|k_{v_i}\|_\infty |P_{v_i}(u)| |P_{v_i}(w)| + \sum_{i=n_I+n_D+n_N+1}^n \|r_{v_i}\|_\infty |P_{v_i}(u)| |P_{v_i}(w)| \\
 &\leq K_1 \left(\sum_{j=1}^m \left\| \frac{du_j}{dx} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^m \left\| \frac{dw_j}{dx} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left(\sum_{j=1}^m \|u_j\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^m \|w_j\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + K_3 |u_{\Gamma_I}|_2 |w_{\Gamma_I}|_2 + K_4 |u_{\Gamma_R}|_2 |w_{\Gamma_R}|_2 \\
 &\leq (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \|u\|_{V^{1,2}} \|w\|_{V^{1,2}}.
 \end{aligned}$$

Die Konstanten K_1 , K_2 , K_3 und K_4 sind die Maxima der

$$\|c_j\|_\infty := \max_{(x,t) \in [0,1] \times [0,T]} |c_j(x,t)| \quad \|e_j\|_\infty := \max_{(x,t) \in [0,1] \times [0,T]} |e_j(x,t)|$$

und $\|k_{v_i}\|_\infty$, $\|r_{v_i}\|_\infty$. Weiterhin wurden die Abschätzungen (1.5) und (1.3) aus Lemma 1.16 und

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1} \text{ für } f \in H^1(0, 1)$$

verwendet. □

Lemma 2.4

Es gilt, β_1 erfüllt (L3).

Beweis. Mit den Voraussetzungen an die c_j und e_j , $j = 1, \dots, m$, gilt

$$\begin{aligned} \beta_1(t, u, u) &= \sum_{j=1}^m \int_0^1 c_j(x, t) \left(\frac{du_j}{dx}(x) \right)^2 + e_j(x, t) u_j(x)^2 dx \\ &\quad + (K(t)u_{\Gamma_I}, u_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} + (R(t)u_{\Gamma_R}, u_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} \\ &\geq \sum_{j=1}^m \int_0^1 \mu \left(\frac{du_j}{dx}(x) \right)^2 dx + (K(t)u_{\Gamma_I}, u_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} + (R(t)u_{\Gamma_R}, u_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} . \end{aligned}$$

Aus den Anforderungen an die c_j ergibt sich die Konstante

$$\mu := \min_{j=1, \dots, m} \min_{\substack{(x,t) \in \\ [a_j, b_j] \times [0, T]}} |c_j(x, t)| > 0 .$$

Sei zunächst $\Gamma_R \dot{\cup} \Gamma_I \neq \emptyset$, dann gibt es $v \in \Gamma_I \dot{\cup} \Gamma_R$ mit entweder $r_v > 0$ oder $k_v > 0$. Sei $\tilde{\Gamma}$ die Menge dieser Knoten und sei

$$c := \min \left\{ \min_{v \in \tilde{\Gamma} \cap \Gamma_I} \left\{ \min_{t \in [0, T]} k_v(t) \right\}, \min_{v \in \tilde{\Gamma} \cap \Gamma_R} \left\{ \min_{t \in [0, T]} r_v(t) \right\} \right\} > 0 .$$

Dann folgt mit Lemma 1.17 für die Knotenmenge $\tilde{\Gamma}$

$$\begin{aligned} \beta_1(t, u, u) &\geq \min\{2c, \mu\} \left(\sum_{j=1}^m \int_0^1 \left(\frac{du_j}{dx}(x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} |u_{\tilde{\Gamma}}|_2^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \min\{2c, \mu\} \cdot \min\{K, 1\} \|u\|_{V^{1,2}}^2 . \end{aligned}$$

Sei nun $\Gamma_I \cup \Gamma_R = \emptyset$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \beta_1(t, u, u) &= \sum_{j=1}^m \int_0^1 c_j(x, t) \left(\frac{du_j}{dx}(x) \right)^2 + e_j(x, t) u_j(x)^2 dx \\ &\geq \mu \left| \frac{du}{dx} \right|_H^2 + \mu |u|_H^2 - \mu |u|_H^2 = \mu \|u\|_{V^{1,2}}^2 - \mu |u|_H^2 . \end{aligned}$$

Somit erfüllt β_1 in beiden Fällen eine Gärdingsche Ungleichung. □

Falls $\Gamma_D \neq \emptyset$ gilt, kann auch Γ_D für die Argumentation mit Lemma 1.17 verwendet werden. Das Lemma 2.4 gilt sinngemäß für nicht zusammenhängende Netzwerke, falls $\tilde{\Gamma}$ oder Γ_D mindestens einen Knoten aus jeder Zusammenhangskomponente enthält.

Lemma 2.5

Es gilt $F_1 \in L^2(0, T; (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^)$.*

Beweis. Per Definition bildet $F_1(t)$ ein lineares Funktional auf $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$. Sei $w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$. Dann gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 1.16

$$\begin{aligned} |\langle F_1(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}}| &\leq \sum_{j=1}^m |\langle f_j(t), w \rangle_{W_j}| + (n_I)^{\frac{1}{2}} \|h_K\|_{\infty} |w_{\Gamma_I}|_2 \\ &\quad + (n_N)^{\frac{1}{2}} \|h_N\|_{\infty} |w_{\Gamma_N}|_2 + (n_R)^{\frac{1}{2}} \|h_R\|_{\infty} |w_{\Gamma_R}|_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} \|w_j\|_{H^1} + M_1 |w_{\Gamma_I}|_2 + M_2 |w_{\Gamma_N}|_2 + M_3 |w_{\Gamma_R}|_2 \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} + \tilde{M} \right) \|w\|_{V^{1,2}}. \end{aligned}$$

Somit ist $F_1(t)$ auch stetig auf $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$. Insbesondere gilt $F_1(t) \in (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*$. Aus der Bochner-Messbarkeit von f_j und der Reflexivität von $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und $H^1(0, 1)$ folgt die schwache Bochner-Messbarkeit von F_1 . Mit der Separabilität von $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und dem Satz von Pettis folgt weiter die Bochner-Messbarkeit von F_1 . Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in \mathbb{R}^m folgt

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{L^2(0,T;(V_{\Gamma_D}^{1,2})^*)}^2 &= \int_0^T \|F_1(t)\|_{(V_{\Gamma_D}^{1,2})^*}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left(\sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} + \tilde{M} \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^T 2 \left(\sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} \right)^2 + 2\tilde{M}^2 dt \\ &\leq 2m^2 \sum_{j=1}^m \int_0^T \|f_j(t)\|_{(W_j)^*}^2 dt + \hat{M} \\ &\leq K \sum_{j=1}^m \|f\|_{L^2(0,T;(W_j)^*)}^2 + \hat{M} < \infty. \end{aligned}$$

□

Satz 2.6

Das Problem (SP1) ist wohlgestellt. Insbesondere gibt es genau eine schwache Lösung, welche im Sinne von (2.9) von den Daten abhängt. Weiterhin folgt die Konvergenz von Diskretisierungsverfahren im Sinne von (2.10).

Beweis. Mit Satz 1.11, Satz 1.12 und Lemma 1.14 bilden $V = V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$, $H = \times_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ und $V^* = (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*$ ein Gelfand-Tripel. Die Bilinearform β_1 aus (2.8) erfüllt (L1) (Lemma 2.2), (L2) (Lemma 2.3) und (L3) (Lemma 2.4). Mit den Daten $F_1 \in L^2(0, T; (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*)$ und $u_0 \in H$ folgt die Behauptung mit Satz 2.1. □

Inhomogene Dirichlet-Bedingungen

Sei nun $0 \neq h_D \in C[0, T]^{n_D}$ und $u_D \in \mathcal{W}_0(0, T)$ eine Funktion, welche die Dirichlet-Knotenbedingungen erfüllt

$$P_v(u_D(t)) = (h_D)_v(t) \quad \text{für alle } v \in \Gamma_D.$$

Dann kann man den Ansatz $u = \tilde{u} + u_D$ für $\tilde{u} \in \mathcal{W}_{\Gamma_D}(0, T)$ in die schwache Formulierung einsetzen. Dies ergibt

$$\begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \langle u'(t), w \rangle_{(V^{1,2})^* \times V^{1,2}} + \varphi(t) \beta_1(t, u(t), w) dt \\ &= \int_0^T \varphi(t) \langle \tilde{u}'(t), w \rangle_{(V_{\Gamma_D}^{1,2})^* \times V_{\Gamma_D}^{1,2}} + \varphi(t) \langle u'_D(t), w \rangle_{(V^{1,2})^* \times V^{1,2}} \\ & \quad + \varphi(t) \beta_1(t, \tilde{u}(t), w) + \varphi(t) \beta_1(t, u_D(t), w) dt \\ &= \int_0^T \varphi(t) \langle F_1(t), w \rangle_{(V_{\Gamma_D}^{1,2})^* \times V_{\Gamma_D}^{1,2}} dt \end{aligned}$$

für alle $w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und für alle $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ und eine schwache Formulierung mit dem Anfangswert $\tilde{u}(0) = u_0 - u_D(0)$ in $\times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ und mit homogenen Dirichlet-Bedingungen für \tilde{u}

$$\int_0^T \varphi(t) \langle \tilde{u}'(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} + \varphi(t) \beta_1(t, \tilde{u}(t), w) dt = \int_0^T \varphi(t) \langle \tilde{F}_1(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} dt .$$

Zunächst ist $u'_D(t) \in (V^{1,2}(\mathfrak{N}))^*$, weshalb die Einschränkung auf $V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ betrachtet wird. Als rechte Seite ergibt sich

$$\tilde{F}_1(t)(w) := F_1(t)(w) - \langle u'_D(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} - \beta_1(t, u_D(t), w) .$$

Durch die Eigenschaften von u_D und β_1 ist $\tilde{F}_1 \in L^2(0, T; (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*)$ und somit das Problem (SP1) auch für inhomogene Dirichlet-Knotenbedingungen wohlgestellt.

2.3 Weitere Resultate

Nachdem in den zwei vorherigen Abschnitten unabhängig von der Literatur zu Differentialgleichungen in Netzwerken gearbeitet wurde, werden nun wichtige bekannte Resultate zusammengefasst. Die getroffene Auswahl deckt keineswegs die gesamte Breite der Literatur zu diesem Thema ab. Die präsentierten Arbeiten und Aussagen sollen einen Überblick geben und den Einstieg in das Thema erleichtern. Weitere interessante Literatur zu Diffusion in Netzwerken ist zum Beispiel in [CC15] und in den Quellen aller in diesem Abschnitt vorgestellten Arbeiten zu Differentialgleichungen in Netzwerken zu finden.

Klassische Lösbarkeit

In [Bel88] wird die klassische Lösbarkeit von parabolischen Problemen in Netzwerken untersucht. Für jede Kante $\alpha_j \simeq [0, l_j]$, $\alpha_j \in J$, eines Netzwerks $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ wird die Gleichung

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - c_j(x, t) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, t) - d_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) - e_j(x, t) u_j(x, t) = f_j(x, t) \quad (2.11)$$

betrachtet. Es werden Dirichlet- (h_D) oder inhomogenen Robin-Bedingungen ($h_R \neq 0$) zugelassen. Weiterhin werden für alle Knoten $v_i \in \Gamma_I$ verallgemeinerte Kirchhoff-Bedingungen

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v_i)} \mu_{ij}(t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(l_j, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v_i)} \mu_{ij}(t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) + k_{v_i}(t) P_{v_i}(u(t)) = (h_K(t))_{v_i} \quad (K2+)$$

mit Leitfähigkeitskoeffizienten $\mu_{ij} > 0$ für alle $\alpha_j \in \delta(v_i)$ und Stetigkeitsbedingungen (S2) betrachtet. Mit $\mu_{ij}(t) = c_j(v_i, t)$ ergibt sich (K2). Dabei werden für $\gamma \in (0, 1]$ die Daten $u_0 \in C^{2+\gamma}(\mathfrak{N})$ und

$$d_j, e_j, f_j, 0 < c_j \in C^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}([0, l_j] \times [0, T]), \quad r_{v_i}, k_{v_i}, (h_R)_{v_i}, (h_K)_{v_i}, (h_D)_{v_i} \in C^{1+\frac{\gamma}{2}}[0, T]$$

sowie

$$\mu_{ij} \in C^{1+\frac{\gamma}{2}}[0, T] \text{ für alle } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

gefordert. Hierbei bezeichnet $C^{p,q}([0, l_j] \times [0, T])$ den Raum der $[p]$ mal in x stetig differenzierbaren und $[q]$ mal in t stetig differenzierbaren Funktionen. Die nicht ganzzahligen Anteile $p - [p]$ und $q - [q]$ sind die Hölder-Exponenten der höchsten partiellen Ableitungen. Weiterhin werden spezielle Kompatibilitätsbedingungen benötigt.

- Der Anfangswert u_0 erfüllt alle Knoten- und Randbedingungen.
- Für alle $v \in \Gamma_D$ gilt

$$h_v(0) = c_j(v, 0) \frac{d^2(u_0)_j}{dx^2}(v_i) + d_j(v, 0) \frac{d(u_0)_j}{dx}(v) + e_j(v, 0)(u_0)_j(v) + f_j(v, 0)$$

für die eine inzidente Kante $\alpha_j \in \delta(v)$.

- Für alle $v \in \Gamma_I$ gilt

$$\begin{aligned} c_j(v, 0) \frac{d^2(u_0)_j}{dx^2}(v) + d_j(v, 0) \frac{d(u_0)_j}{dx}(v) + e_j(v, 0)(u_0)_j(v) + f_j(v, 0) \\ = c_k(v, 0) \frac{d^2(u_0)_k}{dx^2}(v) + d_k(v, 0) \frac{d(u_0)_k}{dx}(v) + e_k(v, 0)(u_0)_k(v) + f_k(v, 0) \end{aligned}$$

für je zwei inzidente Kanten $\alpha_j, \alpha_k \in \delta(v)$.

Satz 2.7 [Bel88]

Mit den Regularitätsvoraussetzungen und den Kompatibilitätsbedingungen besitzt das oben eingeführte Problem aus [Bel88] genau eine Lösung $u \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\mathfrak{N} \times [0, T])$. Diese hängt stetig von f, h_K, h_R, h_D und u_0 ab.

Beweis. In dem Beweis in [Bel88] wird das gegebene Netzwerk zunächst durch geeignete Netzwerkoperationen in ein im richtigen Sinne äquivalentes Netzwerk transformiert. Das zugehörige Problem ist dann äquivalent zu einem System parabolischer Gleichungen, auf welches ein Existenzsatz von Solonnikov [Sol67] angewendet werden kann. \square

Bemerkung:

- Der Raum $C^{p,q}(\mathfrak{N} \times [0, T])$ bezeichnet den Raum aller Funktionen $u \in C(\mathfrak{N})$ mit $u_j \in C^{p,q}([0, l_j] \times [0, T])$ für alle Kanten $\alpha_j \in J$.

An dieser Stelle wird die Gelegenheit genutzt und die folgende Aussage als Ergänzung zu Abschnitt 2.2 bewiesen.

Lemma 2.8

Sei nun $u \in \mathcal{W}_{\Gamma_D}(0, T)$ die schwache Lösung von (SP1) mit glatten Daten. Seien $c_j \in C^{1,0}([0, 1] \times [0, T])$, $f_j, e_j \in C^{0,0}([0, 1] \times [0, T])$, $u \in C^{2,1}(\mathfrak{N} \times [0, T])$ und $u_0 \in C^2(\mathfrak{N})$ erfülle die Knotenbedingungen für $t = 0$. Mit $u \in C^{2,1}(\mathfrak{N} \times [0, T])$ erfüllt u auch (P1) im klassischen Sinne.

Beweis. Die einzelnen Gleichungen und Bedingungen erhält man stets, indem man mit den richtigen Testfunktionen testet und die gegebenen Regularitäten ausnutzt.

- (1) Mit $u_0 \in C^2(\mathfrak{N})$ und $u \in C^{2,1}(\mathfrak{N} \times [0, T])$ sind die Dirichlet-Bedingungen und der Anfangswert überall klassisch erfüllt.
- (2) Für ein $w \in C_c^\infty(\mathfrak{N})$, welches nur im Inneren einer Kante $\alpha_j \in J$ nicht verschwindet, ergibt sich aus (SP1) zunächst mit partieller Integration bezüglich x

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) \varphi(t) w_j(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) \varphi(t) w_j(x) \\ & \quad + e_j(x, t) u_j(x, t) \varphi(t) w_j(x) \, dx \, dt \\ & = \int_0^T \int_0^1 f_j(x, t) \varphi(t) w(x) \, dx \, dt . \end{aligned}$$

Die Randterme entfallen aufgrund der Wahl der Testfunktion $w \in C_c^\infty(\mathfrak{N})$. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung für φ und danach für w_j folgt mit der Stetigkeit aller beteiligten Terme

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) + e_j(x, t) u_j(x, t) = f_j(x, t)$$

für alle $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

- (3) Um die Knotenbedingungen in einem Knoten $v \in \Gamma \setminus \Gamma_D$ zu erhalten, wird mit einem $w \in C^1(\mathfrak{N})$, dessen Träger für $0 < \varepsilon < 1$ in einer ε -Umgebung von v liegt, getestet. Das heißt, es gilt für $j = 1, \dots, m$

$$w_j(x) = 0, \text{ falls } \begin{cases} j \in \delta^+(v) \text{ und } x > \varepsilon, \\ j \in \delta^-(v) \text{ und } x < 1 - \varepsilon, \\ j \notin \delta(v) = \delta^+(v) \cup \delta^-(v). \end{cases}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{j \in \delta(v)} \int_0^1 \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) \varphi(t) w_j(x) + c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \varphi(t) \frac{dw_j}{dx}(x) \, dx \\ & \quad + n_v(t) P_v(u(t)) P_v(w) \varphi \, dt \\ & = \int_0^T \sum_{j \in \delta(v)} \int_0^1 f_j(x, t) w_j(x) \varphi(t) \, dx + h_v(t) P_v(w) \varphi(t) \, dt, \end{aligned}$$

wobei

$$n_v(t) := \begin{cases} k_v(t) & \text{falls } v \in \Gamma_I, \\ r_v(t) & \text{falls } v \in \Gamma_R, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt und $h_v(t)$ die entsprechende Komponente von entweder h_N , h_R oder h_K für den Knoten v bezeichnet. Nach partieller Integration auf jeder Kante α_j bezüglich x und

dem Ergebnis aus (2), dass die Differentialgleichung (2.1) für $j = 1, \dots, m$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^T n_v(t) P_v(u(t)) P_v(w) \varphi(t) \\ & + \varphi(t) \left(\sum_{j \in \delta^-(v)} c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) w_j(1) - \sum_{j \in \delta^+(v)} c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) w_j(0) \right) dt \\ & = \int_0^T h_v(t) P_v(w) \varphi(t) dt . \end{aligned}$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung für φ ergibt sich für $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} h_v(t) P_v(w) & = \left(\sum_{j \in \delta^-(v)} c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) - \sum_{j \in \delta^+(v)} c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) \right) P_v(w) \\ & + n_v(t) P_v(u(t)) P_v(w) . \end{aligned}$$

Da man für alle Werte $y \in \mathbb{R}$ ein zulässiges w mit $P_v(w) = y$ findet, folgen die richtigen Rand- oder Knotenbedingungen in $v \in \Gamma \setminus \Gamma_D$ für $t \in (0, T)$. □

Hauptaussagen

Im Folgenden werden Resultate präsentiert, in denen Netzwerkprobleme als abstrakte Cauchy-Probleme formuliert werden. Diese abstrakten Cauchy-Probleme werden dann mit der Hilfe von Halbgruppentheorie gelöst. Eine gute Einführung in die verwendeten Begriffe und Aussagen der Halbgruppentheorie bieten [Paz83] und [Ouh05]. In diesem Abschnitt werden möglicherweise komplexwertige Funktionen u_j und die entsprechenden Räume $V_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ für komplexwertige Funktionen betrachtet.

In [KFMS07] wird das folgende Problem untersucht. Für Netzwerke \mathfrak{N} ohne Schleifen, ohne Mehrfachkanten mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$ und $\deg(v) \geq 2$ für alle $v \in \Gamma$, also ohne Randknoten $\Gamma = \Gamma_I$, wird pro Kante α_j die Gleichung

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) = 0$$

mit einem Anfangswert $u_j(\cdot, 0) = (u_0)_j \in L^2(0, 1)$ betrachtet. Weiterhin werden homogene Standard-Kirchhoff-Bedingungen (K1) und Stetigkeitsbedingungen (S2) für alle Knoten $v \in \Gamma$ gewählt. Mit $c_j \in H^1(0, 1)$ und der stationären Standard-Kirchhoff-Bedingung

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} c_j(1) \frac{du_j}{dx}(1) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} c_j(0) \frac{du_j}{dx}(0) = 0 \quad (\text{K0})$$

für alle $v \in \Gamma$ führt dies auf den selbstadjungierten dissipativen ([KFMS07, Satz 2.4]) Operator

$$A = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \left(c_1(\cdot) \frac{d}{dx} \right) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{d}{dx} \left(c_m(\cdot) \frac{d}{dx} \right) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $D(A) = \{u \in V^{2,2}(\mathfrak{N}) \mid u \text{ erfüllt (K0)}\} \subset \times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ und auf das abstrakte Cauchy-Problem

$$(ACP1) \begin{cases} u'(t) = Au(t) \text{ in } \times_{j=1}^m L^2(0, 1) \text{ f\u00fcr fast alle } t \geq 0 \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

Bemerkung:

- In diesem Abschnitt sind stets Lebesgue- und Sobolew-R\u00e4ume m\u00f6glicherweise komplexwertiger Funktionen gemeint.
- In [KFMS07] werden die Identifikation der Art $\times_{j=1}^m L^2(0, 1) \cong L^2(0, 1)^m$ vorgenommen, diese werden aber nicht inhaltlich verwendet. Deshalb k\u00f6nnen die in Kapitel 1 eingef\u00fchrten Netzwerkr\u00e4ume verwendet werden.
- Ein Graph ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten wird auch **einfacher Graph** genannt.

Der folgende Satz soll die Aussagen aus [KFMS07] zusammenfassen.

Satz 2.9 [KFMS07]

- (1) *Der Operator A generiert auf $\times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ eine stark stetige reelle positive Halbgruppe $(S_2(t))_{t \geq 0}$ und es gibt ein $M > 0$ mit*

$$\|S_2(t)f\|_{L^\infty} \leq Mt^{-\frac{1}{4}}\|f\|_{L^2} \quad \text{f\u00fcr alle } t \in (0, 1], f \in \times_{j=1}^m L^2(0, 1) .$$

- (2) *Die Halbgruppe $(S_2(t))_{t \geq 0}$ ist kontraktiv auf $\times_{j=1}^m L^\infty(0, 1)$.*

Mit Interpolationsargumenten folgt weiter:

- (3) *F\u00fcr $p \in [1, \infty)$ ist $(S_p(t))_{t \geq 0}$ stark stetig und f\u00fcr $p \in (1, \infty)$ analytisch mit Winkel $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}\right)$.*
- (4) *F\u00fcr $1 \leq p < \infty$ ist $(S_p(t))_{t \geq 0}$ eine Familie kompakter kontraktiver positiver Halbgruppen auf $\times_{j=1}^m L^p(0, 1)$.*
- (5) *Das Spektrum von A_p dem Generator von $(S_p(t))_{t \geq 0}$ ist unabh\u00e4ngig von p und es gilt*

$$D(A_p) = \{u \in V^{2,p}(\mathfrak{N}) \mid u \text{ erf\u00fcllt (K0)}\}$$

- (6) *Das Problem (ACP1) besitzt f\u00fcr $u_0 \in \times_{j=1}^m L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$ genau eine milde L\u00f6sung $u \in D(A_p)$, welche stetig von u_0 abh\u00e4ngt. F\u00fcr $c_j \in C^\infty[0, 1]$ und $1 < p < \infty$, gilt $u(t) \in D(A_p) \cap \times_{j=1}^m C^\infty[0, 1]$.*

Beweis. Der Beweis in [KFMS07, 3.1-3.6] beruht unter anderem auf Resultaten aus [Dav89], [ABHN01] und aus [Ouh05, 2.5,2.7,2.17]. □

Bemerkung:

- F\u00fcr die Definitionen der verwendeten Begriffe aus der Halbgruppentheorie wird auf [Paz83] oder auf die Definitionen A.20 -A.26 verwiesen.
- F\u00fcr den Beweis einiger Aussagen aus Satz 2.9 wird gezeigt, dass A eine hermitesche, positive, geschlossene Sesquilinearform auf $\times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ induziert. Der Beweis dieser Eigenschaften verl\u00e4uft \u00e4hnlich zu Abschnitt 2.2 (Lemma 2.2 - 2.4).

- In [KFMS07] werden eigentlich gewichtete Netzwerke betrachtet, das heißt, jede Kante α_j bekommt ein Gewicht $\mu_j > 0$, welche als Leitfähigkeitskoeffizienten in den Kirchhoff-Bedingungen auftreten

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} \mu_j c_j(1) \frac{du_j}{dx}(1) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} \mu_j c_j(0) \frac{du_j}{dx}(0) = 0.$$

Diese Bedingungen werden mit Hilfe der Integration bezüglich eines gewichteten Lebesgue-Maßes $\mu_j dx$ pro Kante $\alpha_j \in J$ behandelt.

In [ADKF14] wird in einem einfachen Netzwerk \mathfrak{N} mit $\deg(v) \geq 2$ für alle $v \in \Gamma$ die Gleichung

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) = c_j(t) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, t) + f_j(x, t) \quad \text{für alle } \alpha_j \in J$$

mit einem Anfangswert $u_0 \in V^{1,2}(\mathfrak{N})$ und Funktionen $\mu_j > 0$ in den Kirchhoff-Typ-Knotenbedingungen

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v_i)} \mu_j(t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v_i)} \mu_j(t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (\text{K1+})$$

betrachtet. Dieses Netzwerkproblem wird auf die Evolutionsgleichung

$$\begin{cases} B(t)u'(t) + A(t)u(t) = F(t) & \text{in } \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1) \text{ für fast alle } t \in (0, T) \\ u(0) = u_0 & \text{in } V^{1,2}(\mathfrak{N}) \end{cases} \quad (2.12)$$

mit den Operatoren

$$\begin{aligned} B(t) &:= \text{diag} \left(\frac{\mu_j(t)}{c_j(t)} \right), & A(t) &:= \text{diag} \left(\mu_j(t) \frac{d^2}{dx^2} \right), \\ D(B(t)) &:= \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1), & D(A(t)) &:= \{u \in V^{2,2}(\mathfrak{N}) \mid u \text{ erfüllt (K1+)}\} \end{aligned}$$

und der rechten Seite $F(t) = (f_j(\cdot, t))_{j=1}^m$ zurückgeführt. Mit einem Resultat aus [ADO13] gilt nun der folgende Satz aus [ADKF14, Satz 3.4].

Satz 2.10 [ADKF14]

Seien $\mu_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ Lipschitz-stetig und $c_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ messbar. Falls ein $\varepsilon \in (0, 1)$ mit $\varepsilon \leq \mu_j(t)$, $c_j(t) \leq \varepsilon^{-1}$ für alle $t \in (0, T)$ existiert, dann gibt es für alle $u_0 \in V^{1,2}(\mathfrak{N})$ und $F \in L^2(0, T; \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1))$ genau eine Lösung

$$u \in H^1 \left(0, T; \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1) \right) \cap C([0, T]; V^{1,2}(\mathfrak{N}))$$

zu dem Problem (2.12).

Bemerkung:

- Der Raum $H^1(0, T; \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1))$ wird in [ADKF14] nicht definiert. Vermutlich ist

$$H^1 \left(0, T; \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1) \right) = \left\{ u \in L^2 \left(0, T; \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1) \right) \mid \exists u' \in L^2 \left(0, T; \bigtimes_{j=1}^m L^2(0, 1) \right) \right\}$$

gemeint.

- In [ADKF14] sowie in [KFMS07] werden außerdem Eigenschaften der Halbgruppe wie Positivität und Stabilität und die Existenz globaler Lösungen untersucht.

Struktur des Netzwerks

Bisher sind die kombinatorischen Eigenschaften eines zugrundeliegenden Netzwerks kaum benutzt worden. Unter anderem sind folgende Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften des Graphen und dem Spektrum des Operators

$$A := \text{diag}\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) \quad \text{mit} \quad D(A) := \left\{u \in V_{\Gamma_D}^{2,2}(\mathfrak{N}) \mid u \text{ erfüllt (K0)}\right\}$$

in einem Netzwerk \mathfrak{N} ohne Schleifen mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$, $h_D = 0$, $h_N = 0$ und $\Gamma_R = \emptyset$ bekannt. Es werden wieder komplexwertige Funktionen betrachtet.

Satz 2.11 [NV07] & [CF03]

Für das Spektrum von A

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = S_1 \dot{\cup} S_2$$

gelten die folgenden Aussagen.

- Es gilt $0 \in \sigma(A)$ mit Vielfachheit 1 genau dann, wenn $\Gamma_D = \emptyset$.
- Es gilt $S_1 = \{k^2\pi^2 \mid \text{Vielfachheit } m_k \text{ für } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ mit den Vielfachheiten

$$m_k = \begin{cases} m - n + 2 & \text{falls } \mathfrak{N} \text{ bipartit ist,} \\ m - n + 1 + (-1)^k & \text{falls } \mathfrak{N} \text{ nicht bipartit ist,} \end{cases}$$

falls $\Gamma_D = \emptyset$ gilt, und sonst

$$m_k = m - |\Gamma \setminus \Gamma_D| = m - (n - n_D) \text{ falls } \Gamma_D \neq \emptyset.$$

- Für S_2 gilt $S_2 = \{\lambda^2 \mid \cos(\lambda) \in \sigma(\mathbb{A}) \cap (-1, 1)\}$, wobei λ^2 die gleiche Vielfachheit wie $\cos(\lambda)$ als Eigenwert von \mathbb{A} besitzt.

Die Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n-n_D \times n-n_D}$ ist eine Art reduzierter Adjazenz-Matrix (Def. A.1)

$$\mathbb{A}_{ij} := \frac{|\delta(v_i) \cap \delta(v_j)|}{\sqrt{|\delta(v_i)|} \sqrt{|\delta(v_j)|}}.$$

Beweis. Die Beweise dieser Aussagen aus [NV07, Satz 7.12] und [CF03, Kap.3] gehen teilweise sogar auf [Bel85] und [Nic87] zurück. In [BM13] werden Teile dieser Aussagen aus allgemeineren Resultaten gefolgert. \square

Bemerkung:

- In der Literatur wird Bipartitheit (Def. A.7) auch mit der Eigenschaft, dass der Graph keinen ungeraden Kreis besitzt, charakterisiert.
- Alternativ zu der Matrix \mathbb{A} wird auch die Matrix Z

$$Z_{ij} := \frac{|\delta(v_i) \cap \delta(v_j)|}{|\delta(v_i)|}$$

mit $Z^T Z = \mathbb{A}$ zur Charakterisierung von S_2 benutzt. Man kann zeigen, dass \mathbb{A} und Z die gleichen Eigenwerte besitzen. Außerdem ist $\rho = (\rho_i)_i$ ein Eigenvektor von Z genau dann, wenn $(\sqrt{|\delta(v_i)|} \rho_i)_i$ ein Eigenvektor von \mathbb{A} ist.

- Für Kanten $\alpha_j \simeq [0, l_j]$ hängt das Spektrum von A von den Kantenlängen ab. Dies wird in [VZ09] genauer untersucht.

Das Spektrum von A ist insbesondere für Stabilitäts- und Kontrolltheorie sehr wichtig.

Unendliche Netzwerke

In dieser Arbeit werden nur endliche Netzwerke betrachtet. In [Car08] wird folgender Ansatz für abzählbar unendliche Netzwerke $\mathfrak{N} := (\bar{\Gamma}, \bar{J})$ verfolgt. Sowohl die Knoten- als auch die Kantenmenge dürfen abzählbar unendlich sein. Es werden Inzidenz-Operatoren

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}^+ &: D(\bar{\Phi}^+) \subset \ell^2(\bar{J}) \rightarrow \ell^2(\bar{\Gamma}) \\ \bar{\Phi}^- &: D(\bar{\Phi}^-) \subset \ell^2(\bar{J}) \rightarrow \ell^2(\bar{\Gamma})\end{aligned}$$

eingeführt, welche die Inzidenz-Matrizen ersetzen. Die Mengen $D(\bar{\Phi}^+)$ und $D(\bar{\Phi}^-)$ sind dicht in $\ell^2(\bar{J})$ [Car08, Satz 55]. Weiterhin sind $\bar{\Phi}^+$ und $\bar{\Phi}^-$ genau dann beschränkt, wenn \mathfrak{N} gleichmäßig lokal endlich (Def. A.8) ist [Car08, Satz 56]. Mit den Räumen

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \left\{ (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} L^2(0,1) \mid \sum_{j \in \mathbb{N}} \|f_j\|_{L^2(0,1)}^2 < \infty \right\}, \\ \bar{V} &= \left\{ (u_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} H^1(0,1) \mid \sum_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{H^1(0,1)}^2 < \infty, u \text{ ist stetig auf } \bar{\mathfrak{N}} \right\}\end{aligned}$$

und formal analogen Knotenbedingungen

$$\bar{\Phi}^+ \frac{du}{dx}(1) - \bar{\Phi}^- \frac{du}{dx}(0) = 0 \quad (\text{K0+})$$

werden Gleichungen der Art

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) = 0$$

mit homogenen Standard-Kirchhoff-Bedingungen, $\Gamma_E = \Gamma_N$ und homogenen Neumann-Randbedingungen betrachtet. Der Operator

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{d}{dx} \left(c_j(\cdot) \frac{d}{dx} \right) \right)_{j \in \mathbb{N}} \\ D(A) &= \left\{ (u_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} H^2(0,1) \mid u \text{ ist stetig auf } \bar{\mathfrak{N}} \text{ und erfüllt (K0+)} \right\}\end{aligned}$$

des zugehörigen abstrakten Cauchy-Problems erzeugt auf \bar{H} eine analytische Halbgruppe ([Car08, Kap. 1.5]).

Bemerkung:

- Aufgrund der geforderten Hilbert-Raum Struktur für \bar{H} und \bar{V} , ist nicht klar, ob ein ähnlicher Ansatz auch für nichtlineare Probleme sinnvoll ist.
- Es wird in der Definition der Räume vorausgesetzt, dass die Energie auf dem gesamten Netzwerk endlich ist.
- In jedem nicht lokal endlichen Knoten (Def. A.8) stellt sich für $u \in \bar{V}$ automatisch eine homogene Dirichlet-Bedingung ein ([Car08, Satz 59]), da sonst aufgrund der Einbettung $H^1(0,1) \hookrightarrow C[0,1]$ ein Widerspruch zu

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{H^1(0,1)}^2 < \infty$$

entsteht.

Weiterhin werden in [Car08] auch im abzählbar unendlichen Fall einige Eigenschaften der Halbgruppe mit den Invarianzprinzipien aus [Ouh05, Kap. 2] bewiesen. In [Mug14] werden ebenfalls im Rahmen von Halbgruppentheorie unendliche Netzwerke untersucht.

Alternative Knotenbedingungen

Bisher wurden $\deg(v) - 1$ essentielle Stetigkeitsbedingungen und eine natürliche Kirchhoff-Bedingung pro innerem Knoten $v \in \Gamma_I$ betrachtet. In der Literatur finden sich auch andere Bedingungen. Unter anderem gibt es die sogenannten Anti-Stetigkeitsbedingungen

$$\sum_{j \in \delta^-(v)} u_j(b_j) + \sum_{j \in \delta^+(v)} u_j(a_j) = 0 \quad (\text{AS1})$$

und Anti-Kirchhoff-Bedingungen

$$\frac{du_j}{dx}(b_j) = -\frac{du_k}{dx}(a_j) \quad (\text{AK1})$$

und deren instationären Varianten

$$\sum_{j \in \delta^-(v)} u_j(b_j, t) + \sum_{j \in \delta^+(v)} u_j(a_j, t) = 0, \quad (\text{AS2})$$

$$P_v \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t) \right) = \frac{\partial u_j}{\partial x}(b_j, t) = -\frac{\partial u_k}{\partial x}(a_j, t) \quad \text{für alle } \alpha_j \in \delta^-(v), \alpha_k \in \delta^+(v). \quad (\text{AK2})$$

Diese ergeben eine essentielle und $\deg(v) - 1$ natürliche Knotenbedingungen für jeden Knoten $v \in \Gamma_I$. Ein Problem der Art (P1) mit (AK2) und (AS2) anstelle von (K2) und (S2) lässt sich auch mit diesen Knotenbedingungen mit dem Konzept aus Abschnitt 2.2 behandeln, falls die Koeffizientenfunktionen c_j in gemeinsamen Knoten stetig sind, also $(c_j(\cdot, t))_{j=1}^m \in C(\mathfrak{N})$ gilt. Dazu werden die separablen reflexiven Banach-Räume

$$\widehat{V}_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N}) := \left\{ f \in \prod_{j=1}^m W^{k,p}(a_j, b_j) \mid f \text{ erfüllt (AS1) und } P_v(f) = 0 \text{ für alle } v \in \Gamma_D \right\},$$

welche ebenfalls kompakt und dicht in $\prod_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ eingebettet sind, definiert. Die Beweise dieser Aussagen verlaufen analog zu den Resultaten aus Abschnitt 1.3.

Bemerkung:

- Punktauswertungen von $u \in \widehat{V}_{\Gamma_D}^{k,p}(\mathfrak{N})$ in inneren Knoten sind nicht mehr wohldefiniert.
- Es ist bisher noch nicht klar wie verallgemeinerte Anti-Kirchhoff- und Anti-Stetigkeitsbedingungen aussehen sollten oder wie inhomogene Anti-Stetigkeitsbedingungen behandelt werden können.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Folgenden wieder $\alpha_j \simeq [0, 1]$ für alle $\alpha_j \in J$ angenommen. Testet man nun (2.1) mit $w \in \widehat{V}_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ und integriert partiell in den Ortsableitungen wie in (2.6), folgt analog zu Abschnitt 2.1 mit den Eigenschaften der Testfunktionen $w \in \widehat{V}_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m c_j(1, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) w_j(1) - c_j(0, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) w_j(0) \\ &= \sum_{v_i \in \Gamma_I} P_{v_i}(c(t)) P_{v_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t) \right) \left(\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v_i)} w_j(1) + \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v_i)} w_j(0) \right) \\ & \quad + \left(\Phi_{\Gamma_N}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_N}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), w_{\Gamma_N} \right)_{\mathbb{R}^{n_N}} \\ & \quad + \left(\Phi_{\Gamma_R}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_R}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), w_{\Gamma_R} \right)_{\mathbb{R}^{n_R}} \\ &= 0 + (h_N(t), w_{\Gamma_N})_{\mathbb{R}^{n_N}} + (-R(t)u_{\Gamma_R}(t) + h_R(t), w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}}. \end{aligned}$$

Dies ergibt mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ auf $\times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_1 &: [0, T] \times \widehat{V}_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \times \widehat{V}_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \widehat{\beta}_1(t, u, w) &:= \left(C(t) \frac{du}{dx}, \frac{dw}{dx} \right)_H + (E(t)u, w)_H + (R(t)u_{\Gamma_R}, w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} \end{aligned}$$

und die rechte Seite $\widehat{F}_1 \in L^2(0, T; (\widehat{V}_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*)$

$$\langle \widehat{F}_1(t), w \rangle_{\widehat{V}_{\Gamma_D}^{1,2}} := \sum_{j=1}^m \int_0^1 f_j(x, t) w_j(x) dx + (h_N(t), w_{\Gamma_N})_{\mathbb{R}^{n_N}} + (h_R(t), w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} .$$

Die Eigenschaften (L1), (L2) und (L3) von $\widehat{\beta}_1$ beweist man analog zu β_1 (Lem. 2.2 - 2.4). Analog zu Lemma 2.5 gilt $\widehat{F}_1 \in L^2(0, T; (\widehat{V}_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*)$. Mit Satz 2.1 folgt die Wohlgestellttheit des schwachen Problems mit diesen Knotenbedingungen analog zu Satz 2.6.

Die Knotenbedingungen (AK1), (AS1) und (S1), (K0) sind Knotenbedingungen vom sogenannten Kuchment-Typ

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix} \in Y \subset \mathbb{R}^{2m} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -\frac{du}{dx}(0) \\ \frac{du}{dx}(1) \end{pmatrix} \in Y^\perp \subset \mathbb{R}^{2m} .$$

Dabei ist Y ein linearer Teilraum, in dem die Netzwerkstruktur mit einfließen kann. Diese Art von Bedingungen werden in verallgemeinerter Form für allgemeinere Probleme in [Mug10] betrachtet. Für ein Netzwerk \mathfrak{N} mit $\Gamma = \Gamma_I$ und der Wahl

$$Y = \text{ran} \begin{pmatrix} (\Phi^-)^T \\ (\Phi^+)^T \end{pmatrix}, \quad Y^\perp = \ker \begin{pmatrix} \Phi^- & \Phi^+ \end{pmatrix}$$

erhält man die Stetigkeitsbedingung (S1) und homogene Standard-Kirchhoff-Bedingungen (K0), denn es gilt

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix} \in \text{ran} \begin{pmatrix} (\Phi^-)^T \\ (\Phi^+)^T \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}^n : u(0) = (\Phi^-)^T d \quad u(1) = (\Phi^+)^T d .$$

Somit wird allen in v_i inzidenten Kanten $\alpha_j \in \delta(v_i)$ derselbe Wert $d_i = u_j(v_i)$ zugewiesen. Aus

$$\begin{pmatrix} -\frac{du}{dx}(0) \\ \frac{du}{dx}(1) \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} \Phi^- & \Phi^+ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Phi^+ \frac{du}{dx}(1) - \Phi^- \frac{du}{dx}(0) = 0$$

ergeben sich die homogenen Standard-Kirchhoff-Bedingungen (K0). Falls nun Y und Y^\perp die Rollen tauschen, charakterisiert dies die Anti-Stetigkeits- (AS1) und Anti-Kirchhoff-Bedingungen (AK1), welche also in diesem Sinne zu (S1) und (K0) komplementär sind.

Bemerkung:

- Fordert man für $\Gamma_I = \Gamma_A \dot{\cup} \Gamma_K$ auf Γ_A die Stetigkeit von $(c_j(\cdot, t))_{j=1}^m$ in Γ_A sowie (AS2) und (AK2) und auf Γ_K (S2) sowie (K2), lässt sich die schwache Formulierung des Problems (P1) mit gemischten Knotenbedingungen auch mit Satz 2.1 lösen.
- Auch wenn (SP1) formal wie eine Diffusionsgleichung für das gesamte Netzwerk aussieht, ist Vorsicht geboten. Denn auch (AK2) und (AS2) führen auf eine Gleichung derselben Form nur mit einem anderen Gelfand-Tripel. Aber die Gleichung für (AK2) und (AS2) hat mit einer Diffusion in dem Netzwerk nicht viel zu tun.
- In [NV07] werden Knotenbedingungen mit nacheilendem Argument für Wellenprobleme betrachtet. Dies wird in Kapitel 3.3 präsentiert.

Regularität

Die Arbeit [Bel88] garantiert klassische Lösungen für das am Anfang dieses Abschnitts 2.3 betrachtete Problem. In [AM86] wird für den Spezialfall des positiven selbstadjungierten Operators $A = \text{diag}(-\frac{d^2}{dx^2})$ mit $D(A) = \{u \in V^{2,2}(\mathfrak{N}) \mid u \text{ erfüllt (K0)}\}$ und einem Netzwerk \mathfrak{N} mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$ und $\Gamma = \Gamma_I$ die erreichte Regularität verfeinert. Es wird in [AM86] gezeigt, dass für Funktionen $u \in D(A^\infty) := \cap_{j=1}^\infty D(A^j)$ die folgenden zusätzlichen Eigenschaften gelten

$$\frac{d^k u}{dx^k} \text{ erfüllt } \begin{cases} \text{(K0)} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \text{(S1)} & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Somit beschreiben (2.13) und

$$D(A^k) := \left\{ u \in \prod_{j=1}^m H^{2k}(0, 1) \mid \frac{d^l u}{dx^l} \text{ erfüllt (2.13) für } l = 0, \dots, 2k - 1 \right\}$$

sinnvolle Bedingungen an die Ableitungen von $u \in V^{k,2}(\mathfrak{N})$ und $u \in C^k(\mathfrak{N})$. Diese Bedingungen sind allerdings nur für dieses spezielle Problem sinnvoll und widersprechen insbesondere für $C^k(\mathfrak{N})$ der Intuition.

3 Lineare Schwingungen

In diesem Kapitel wird analog zu Kapitel 2 verfahren. Auf jeder Kante wird eine Verallgemeinerung der Wellengleichung betrachtet. Zunächst wird die schwache Formulierung des Netzwerkproblems (P2) aufgestellt. Einige Schritte werden nicht noch einmal ausgeführt, da sie analog zu Abschnitt 2.1 verlaufen. Danach wird das Problem (SP2) mit Satz 3.1 auf einen Diskretisierungsbeweis zurückgeführt. In dem Abschnitt 3.3 wird das in Abschnitt 3.2 erzielte Resultat mit bekannten Resultaten verglichen. Schließlich wird ein Resultat für Knotenbedingungen mit nacheilendem Argument aus [NV07] präsentiert.

3.1 Problemstellung

Mit den Abkürzungen und Knotenbedingungen aus Abschnitt 2.1 wird in einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ das folgende Problem

$$(P2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) + e_j(x, t) u_j(x, t) = f_j(x, t) \\ u_j(x, 0) = (u_0)_j(x) \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, 0) = (v_0)_j(x) \\ \Phi_{\Gamma_D}^+ u(1, t) + \Phi_{\Gamma_D}^- u(0, t) = 0 \\ \Phi_{\Gamma_N}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_N}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \Phi_{\Gamma_R}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_R}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + R(t) u_{\Gamma_R}(t) = 0 \\ u_i(1, t) = u_k(0, t) = P_v(u(t)) \\ \Phi_{\Gamma_I}^+ C(1, t) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \Phi_{\Gamma_I}^- C(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + K(t) u_{\Gamma_I}(t) = 0 \end{array} \right.$$

für alle $\alpha_j \in J$, $v \in \Gamma$, $\alpha_i \in \delta^-(v)$ und $\alpha_k \in \delta^+(v)$ betrachtet. Die schwache Formulierung ergibt sich, indem man mit $w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ testet, wie in Abschnitt 2.1 partiell integriert und die Knotenbedingungen einsetzt. Man erhält

$$\begin{aligned} \beta_2(t, u, w) &:= \beta_1(t, u, w) \\ &= \left(C(t) \frac{du}{dx}, \frac{dw}{dx} \right)_H + (E(t)u, w)_H + (K(t)u_{\Gamma_I}, w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} + (R(t)u_{\Gamma_R}, w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} \end{aligned}$$

mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ auf $\times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ und die rechte Seite

$$\langle F_2(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} := \sum_{j=1}^m \int_0^1 f_j(x, t) w_j(x) dx. \quad (3.1)$$

Es wird wieder der Gelfand-Tripel

$$(V =) V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \xrightarrow{c} (H =) \times_{j=1}^m L^2(0, 1) \hookrightarrow (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^* (= V^*)$$

verwendet.

Bemerkung:

- Um Satz 3.1 anwenden zu können, wird eine rechte Seite $F \in L^2(0, T; H)$ benötigt. Deshalb können hier zunächst nur homogene Randbedingungen zugelassen werden, da Knotenauswertungen auf $\times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ nicht wohldefiniert sind.
- Möchte man allgemeinere rechte Seiten zulassen, insbesondere inhomogene Randbedingungen, benötigt man einen stärkeren Satz als Satz 3.1. Dafür eignet sich zum Beispiel [GGZ74, Satz 1.1, S.238].

Insgesamt ergibt sich das folgende schwache Problem.

Problem In einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$, mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$ für alle $\alpha_j \in J$, wird für gegebene $f_j \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $0 < c_j, e_j \in C^{0,1}([0, 1] \times [0, T])$, $0 < r_v, k_v \in C^1[0, T]$ sowie $u_0 \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ und $v_0 \in \times_{j=1}^m L^2(0, 1)$ eine Lösung

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T]; H) \cap \mathcal{W}_{\Gamma_D}(0, T), & u'' &\in L^2(0, T; (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*), \\ u' &\in C([0, T]; (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^*) \cap L^2(0, T; H) \end{aligned} \quad (3.2)$$

gesucht, sodass

$$(SP2) \begin{cases} \int_0^T \varphi(t) \langle u''(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} + \varphi(t) \beta_2(t, u(t), w) dt = \int_0^T \varphi(t) \langle F_2(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,2}} dt \\ u(0) = u_0 & \text{in } H \\ u'(0) = v_0 & \text{in } (V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}))^* \end{cases}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ und für alle $w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ gilt.

Bemerkung:

- Die Ableitungen u'' sind auch in diesem Kapitel wieder verallgemeinerte Ableitungen.
- Die Voraussetzungen an die c_j und die e_j können vermutlich abgeschwächt werden.
- Wie in Kapitel 2 wird nur $e_j \geq 0$ und nur für ein v $r_v > 0$ oder $k_v > 0$ benötigt. Alternativ genügt auch $\Gamma_D \neq \emptyset$.

3.2 Existenz- und Eindeigkeitssatz

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, das Problem (SP2) mithilfe des bekannten Satzes 3.1 für lineare Evolutionsprobleme zweiter Ordnung zu lösen.

Satz 3.1 [Zei90a]

Seien V , H und V^* ein Gelfand-Tripel. Dann gibt es zu jedem $F \in L^2(0, T; H)$, $u_0 \in V$ und $v_0 \in H$ genau ein u mit der Regularität

$$u \in C([0, T]; H) \cap \mathcal{W}(0, T), \quad u' \in C([0, T]; V^*) \cap L^2(0, T; H), \quad u'' \in L^2(0, T; V^*)$$

und

$$\int_0^T \varphi(t) \langle u''(t), w \rangle_{V^* \times V} + \varphi(t) \beta(t, u(t), w) dt = \int_0^T \varphi(t) \langle F(t), w \rangle_{V^* \times V} dt$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$, für alle $w \in V$ und $u(0) = u_0$ sowie $u'(0) = v_0$, falls β die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(L1)-(L3) aus Satz 2.1.

(L4) Für alle $u, w \in V$ sei $t \mapsto \beta(t, u, w)$ in $C^1[0, T]$. Die Ableitung bezüglich t sei $\beta'(t, u, w)$. Es gibt ein $\gamma' \geq 0$ mit

$$|\beta'(t, u, w)| \leq \gamma' \|u\|_V \cdot \|w\|_V$$

für alle $t \in [0, T]$ und $u, w \in V$.

Weiterhin hängt die Lösung linear und stetig von den Daten ab. Es existiert ein $K > 0$ mit

$$\|u\|_{L^2(0, T; V)} + \|u'\|_{L^2(0, T; H)} \leq K (\|u_0\|_V + \|v_0\|_H + \|f\|_{L^2(0, T; V^*)}) .$$

Für die im Beweis konstruierten Galerkin-Approximationen gilt

$$u^n \rightharpoonup u \text{ in } L^2(0, T; V) \quad (u')^n \rightharpoonup u' \text{ in } L(0, T; H) \quad (3.3)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Dieser Satz wird in [Zei90a, Kap. 24] bewiesen. □

Bemerkung:

- Auch wenn $F(t) \in H$ gilt, wird die duale Paarung mit V indiziert, um deutlich zu machen, dass mit $w \in V$ getestet wird.
- In [Zei90a] werden eine Galerkin Basis $\{w_1, w_2, \dots\} \subset V$ und zwei Folgen $(u_0^n)_n$ und $(v_0^n)_n$ mit

$$u_0^n \rightarrow u_0 \text{ in } V, \quad v_0^n \rightarrow v_0 \text{ in } H$$

und $u_0^n, v_0^n \in \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ benötigt. Die Existenz der Galerkin Basis und der Folgen folgt aus den Eigenschaften des Gelfand-Tripels, da V ein separabler Banach-Raum ist und dicht in H bezüglich $|\cdot|_H$ liegt.

Ziel ist es nun, die im Satz 3.1 geforderten Bedingungen für β_2 und F_2 nachzuweisen.

Lemma 3.2

Die Abbildung β_2 erfüllt (L1), (L2) und (L3).

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu den Eigenschaften von β_1 (Lem. 2.2 - 2.4). □

Lemma 3.3

Die Abbildung β_2 erfüllt (L4).

Beweis. Mit einer Folgerung (Satz A.16) aus dem Satz von Lebesgue folgt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \beta_2(t, u, w) &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^m \int_0^1 c_j(x, t) \frac{du_j}{dx}(x) \frac{dw_j}{dx}(x) + e_j(x, t) u_j(x) w_j(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_I} k'_{v_i}(t) P_{v_i}(u) P_{v_i}(w) + \sum_{i=n_I+n_D+n_N+1}^n r'_{v_i}(t) P_{v_i}(u) P_{v_i}(w) \\ &= \left(C'(t) \frac{du}{dx}, \frac{dw}{dx} \right)_H + (E'(t)u, w)_H + (R'(t)u_{\Gamma_R}, w_{\Gamma_R})_{\mathbb{R}^{n_R}} + (K'(t)u_{\Gamma_I}, w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} \end{aligned}$$

für beliebige aber feste $u, w \in V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N})$ mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} C'(t) &= \text{diag}\left(\frac{\partial c_j}{\partial t}(\cdot, t)\right), & R'(t) &= \text{diag}(r'_{v_i}(t)), \\ E'(t) &= \text{diag}\left(\frac{\partial e_j}{\partial t}(\cdot, t)\right), & K'(t) &= \text{diag}(k'_{v_i}(t)). \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Integration und Ableitung ist erlaubt, da der Integrand stetig in t ist und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 1.16 die Majorante

$$\left(\max_{j=1, \dots, m} \left\| \frac{\partial c_j}{\partial t} \right\|_{\infty} + \max_{j=1, \dots, m} \left\| \frac{\partial e_j}{\partial t} \right\|_{\infty} + \max_{v \in \Gamma_R} \|r'_v\|_{\infty} + \max_{v \in \Gamma_I} \|k'_v\|_{\infty} \right) \|u\|_{V^{1,2}} \|w\|_{V^{1,2}}$$

gewählt werden kann. □

Lemma 3.4

Es gilt $F_2 \in L^2(0, T; H)$.

Beweis. Die Bochner-Messbarkeit von F_2 (3.1) folgt analog zu Lemma 2.5. Mit $w \in H$ beliebig, der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 1.16 folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(F_2(t), w)_H| &\leq \sum_{j=1}^m \int_0^1 |f_j(x, t) w_j(x)| dx \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{L^2(0,1)} |w|_H. \end{aligned}$$

Nun folgt $\|F_2\|_{L^2(0,T;H)}^2 < \infty$ wieder analog zu Lemma 2.5. □

Satz 3.5

Für das Problem (SP2) gibt es genau eine Lösung mit der Regularität aus (3.2). Die Lösung hängt linear und stetig von den Daten ab. Weiterhin folgt die Konvergenz von Galerkin-Verfahren im Sinne von (3.3).

Beweis. Mit Lemma 3.2 und Lemma 3.3 erfüllt β_2 die nötigen Eigenschaften, sodass mit $u_0 \in V^{1,2}(\mathfrak{N})$, $v_0 \in H$ und $F_2 \in L^2(0, T; H)$ die Behauptung für den Gelfand-Tripel $V^{1,2}(\mathfrak{N})$, H und $(V^{1,2}(\mathfrak{N}))^*$ folgt. □

Bemerkung:

- Auf einer Teilmenge $\Gamma_A = \Gamma_I \setminus \Gamma_K$ können wieder Anti-Stetigkeits- und Anti-Kirchhoff-Bedingungen betrachtet werden, falls die Funktion $(c_j(\cdot, t))_{j=1}^m$ stetig in Γ_A ist.

3.3 Weitere Resultate

Ergänzend zu den in Abschnitt 3.2 erarbeiteten Aussagen, werden nun zwei interessante Resultate aus der Literatur vorgestellt.

Hauptaussagen

Die grundlegende Theorie zu Wellenproblemen in Netzwerken, bis hin zu quasilinearen Problemen, wurde von F. Ali Mehmeti und S. Nicaise entwickelt und in [AM94] zusammengefasst. Dort wird unter anderem für $t \in (0, T)$ die lineare Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x, t) + \beta_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - c_j(x, t) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, t) + d_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) + e_j(x, t) u_j(x, t) = 0$$

auf jeder Kante $\alpha_j \in J$ mit den Knotenbedingungen

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v_i)} \mu_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x}(l_j, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v_i)} \mu_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (\text{K1}^*)$$

für konstante $\mu_{ij} > 0$ und (S2) für alle $v_i \in \Gamma$ sowie den Anfangswerten $u_j(x, 0) = (u_0)_j(x)$ und $\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, 0) = (v_0)_j(x)$ in einem Netzwerk \mathfrak{N} mit $\Gamma_E = \Gamma_N$ und $\alpha_j \simeq [0, l_j]$ betrachtet. Mit den abstrakten Funktionen β_j, c_j, d_j und $e_j, j = 1, \dots, m$, werden die Operatoren

$$\begin{aligned} B(t)(u) &:= (\beta_j(t) u_j)_{j=1}^m \quad \text{mit} \quad D(B(t)) := V^{1,2}(\mathfrak{N}), \\ A(t)(u) &:= \left(-c_j(t) \frac{d^2 u_j}{dx^2} + d_j(t) \frac{du_j}{dx} + e_j(t) u_j \right)_{j=1}^m \quad \text{mit} \\ D(A(t)) &:= \{u \in V^{2,2}(\mathfrak{N}) \mid u \text{ erfüllt (K1}^*)\} =: D(A) \end{aligned}$$

und damit der Operator

$$\mathcal{A}(t) := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A(t) & B(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad D(\mathcal{A}) := D(A(t)) \times D(B(t)) = D(A) \times V^{1,2}(\mathfrak{N}),$$

$$\mathcal{H} := V^{2,2} \times \left(\bigtimes_{j=1}^m H^1(0, l_j) \right) \supset D(\mathcal{A})$$

definiert. Die Operatoren besitzen also konstante Definitionsbereiche. Für einen Anfangswert $(u_0, v_0)^T \in D(\mathcal{A})$, ergibt sich für $U = (u, u')^T$ die Evolutionsgleichung

$$\begin{cases} U'(t) + \mathcal{A}(t)U(t) = 0 \\ U(t) \in D(\mathcal{A}) \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Satz 3.6 [AM94]

Unter den Bedingungen

$$\frac{\partial^k c_j}{\partial t^k}, \frac{\partial^k d_j}{\partial t^k}, \frac{\partial^k e_j}{\partial t^k}, \frac{\partial^k \beta_j}{\partial t^k} \in C([0, T]; H^{2-k}(0, l_j)), \quad \beta_j \geq 0, \quad c_j > 0$$

für $0 \leq k \leq 2$ und für alle $\alpha_j \in J$ und mit Anfangswerten $u_0 \in D(A)$ und $v_0 \in V^{1,2}(\mathfrak{N})$ besitzt (3.4) genau eine Lösung U mit

$$U \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \cap C([0, T]; D(\mathcal{A})).$$

Beweis. Dieser Satz wird in [AM94, Kap. 3.2, S.72-92] mit Hilfe der Theorie zur Approximation von Evolutionsoperatoren nach Kato [Kat76] bewiesen. \square

Bemerkung:

- In Satz 3.6 bezeichnet $H^0(0, l_j)$ den Raum $L^2(0, l_j)$.
- Das eigentliche Resultat [AM94, Satz 3.2.23] ist wesentlich allgemeiner und komplexer. Aber es ermöglicht unter einigen Annahmen an die Koeffizientenfunktionen und Anfangswerte auch Aussagen zu Lösungen mit höherer Regularität in dem Inneren der Kanten.
- In [AM94, Kap. 3.3] werden auch Evolutionsgleichungen zu quasilinearen Wellenproblemen auf hinreichend kleinen Zeitintervallen mit zahlreichen Regularitäts- und Kompatibilitätsbedingungen mit den Resultaten von Kato [Kat76] gelöst. In dem Beweis [AM94, S.102-116] wird deutlich, dass analog auch quasilineare Diffusionsprobleme behandelt werden können.

Alternative Knotenbedingungen

Für Wellenprobleme in einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ mit $\alpha_j \simeq [0, l_j]$ werden in [NV07] überaus interessante Knotenbedingungen mit nacheilendem Argument für alle $v \in \Gamma_C \subset \Gamma$

$$\sum_{j \in \delta^-(v)} \frac{\partial u_j}{\partial x}(l_j, t) - \sum_{j \in \delta^+(v)} \frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) = - \left(\gamma_1^{v_i} \frac{\partial u}{\partial t}(v, t) + \gamma_2^v \frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v) \right) \quad (3.5)$$

mit $\gamma_1^v > \gamma_2^v > 0$ betrachtet. Damit diese Sinn ergeben, wird noch eine Vorgeschichte f_0^v pro Knoten $v \in \Gamma_C$ benötigt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v) = f_0^v(t - \tau_v) \text{ für alle } v \in \Gamma_C, \text{ für alle } 0 < t < \tau_v. \quad (3.6)$$

Bemerkung:

- Der Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial t}(v, t) = P_v(\frac{\partial u}{\partial t}(t))$ ist für eine auf dem Netzwerk stetige Funktion $\frac{\partial u}{\partial t}(t) = (\frac{\partial u_j}{\partial t}(\cdot, t))_{j=1}^m$ sinnvoll.

Die Knotenmenge Γ wird disjunkt unterteilt $\Gamma = \Gamma_D \dot{\cup} \Gamma_N \dot{\cup} \Gamma_I \dot{\cup} \Gamma_C$ und die Menge der kontrollierbaren Knoten wird mit Γ_C bezeichnet. Dabei kann Γ_C Knoten v mit $\deg(v) = 1$ als auch Knoten mit $\deg(v) \geq 2$ enthalten. Die Menge Γ_I enthält hier nicht unbedingt alle Knoten v mit $\deg(v) \geq 2$. Dies ergibt für alle $\alpha_j \in J$ das Problem

$$(DP) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, t) = 0 & \text{für alle } (x, t) \in \alpha_j \times [0, \infty) \\ u_j(x, 0) = (u_0)_j(x), \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, 0) = (v_0)_j(x) & \text{für alle } x \in \alpha_j \\ (3.5), (3.6) \text{ für alle } v \in \Gamma_C \\ (K1) \text{ für alle } v \in \Gamma_I \\ (S2) \text{ für alle } v \in \Gamma \end{cases}$$

mit homogenen Dirichlet-Bedingungen auf Γ_D und homogenen Neumann-Bedingungen auf Γ_N . Es werden neue Variablen

$$w := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z_v(\rho, t) := \frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v \rho) \quad \text{für } \rho \in (0, 1), v \in \Gamma_C$$

und ein Transportproblem für jede neue Variable z_v

$$\begin{cases} \tau_v \frac{\partial z_v}{\partial t}(\varrho, t) + \frac{\partial z_v}{\partial \varrho}(\varrho, t) = 0 \text{ für alle } (\varrho, t) \in (0, 1) \times [0, \infty) \\ z_v(\varrho, 0) = f_0^v(-\tau_v \varrho) \\ z_v(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(v, t) \end{cases}$$

eingeführt, um die Verzögerung in v geeignet zu beschreiben. Mit $z = (z_v)_{v \in \Gamma_C}$ ergibt sich das abstrakte Cauchy-Problem

$$(ACP2) \begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}U(t) \\ U(0) = (u_0, v_0, (f(0 - \tau_v \cdot))_{v \in \Gamma_C})^T = U_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

für $U = (u, w, z)^T$ mit dem Operator \mathcal{A}

$$\mathcal{A}U := \begin{pmatrix} w \\ \frac{d^2 u}{dx^2} \\ -\left(\frac{1}{\tau_v} \frac{dz_v}{d\varrho}\right)_{v \in \Gamma_C} \end{pmatrix}$$

und dessen Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} (u, w, z) \in (V_{\Gamma_D}^{2,2}(\mathfrak{N}) \times V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \times H^1(0, 1)^{|\Gamma_C|} \mid u \text{ erfüllt (K0) in } \Gamma_I, \\ \text{hom. Neumann-Bedingungen auf } \Gamma_N; \text{ für alle } v \in \Gamma_C \text{ gilt } z_v(0) = P_v(w) \\ \text{und } \sum_{j \in \delta^-(v)} \frac{du_j}{dx}(v) - \sum_{j \in \delta^+(v)} \frac{du_j}{dx}(v) = -(\gamma_1^v P_v(w) + \gamma_2^v z_v(1)) \end{array} \right\}.$$

Es gilt der folgende Satz [NV07, Satz 2.2].

Satz 3.7 [NV07]

Für alle $U_0 \in D(\mathcal{A})$ gibt es zu (ACP2) genau eine Lösung

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}) \quad \text{für} \quad \mathcal{H} := V_{\Gamma_D}^{1,2}(\mathfrak{N}) \times \left(\prod_{j=1}^m L^2(0, l_j) \right) \times L^2(0, 1)^{|\Gamma_C|}.$$

Beweis. Der Beweis in [NV07, Satz 2.2] beruht auf dem Lumer-Phillips Theorem [Paz83, Satz 4.3]. Dafür wird gezeigt, dass ein $\lambda > 0$ existiert, sodass $(\lambda I - \mathcal{A}) : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$ surjektiv ist, dass \mathcal{A} dissipativ ist, und dass $D(\mathcal{A})$ dicht in \mathcal{H} liegt. \square

Insbesondere Serge Nicaise forscht seit [Nic87] auf dem Gebiet der Wellengleichungen in Netzwerken, wodurch so komplexe und tiefgehende Resultate wie der Satz 3.7 ([NV07, Satz 2.2]) möglich sind. Das Buch [LLS94] beschäftigt sich ebenfalls mit linearen Schwingungen in Netzwerken. Auch wenn in [LLS94] eine stark andere Notation verwendet wird, bewegt sich das Buch im gleichen theoretischen Rahmen wie diese Arbeit. Schwingungsprobleme in Netzwerken sind in der Literatur etwas populärer als Diffusionsprobleme. Insbesondere im Hinblick auf mechanische Systeme wird eine umfangreiche Stabilitäts- und Kontrolltheorie in zum Beispiel [VZ09] und [LS12] entwickelt. In [Zua12] ist eine gute Zusammenfassung der Kontroll- und Stabilitätstheorie für Schwingungen in Netzwerken sowie eine Präsentation noch offener Probleme zu finden.

4 Nichtlineare Diffusion

Im Folgenden werden nichtlineare Diffusionsgleichungen der Art

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) \right) + e(x, t, u(x, t)) = f(x, t) \quad (4.1)$$

pro Kante in einem Netzwerk untersucht. Die Existenz einer eindeutigen Lösung des Netzwerkproblems ($P3$) für reine Neumann-Randbedingungen und homogene Kirchhoff-Bedingungen folgt implizit aus Resultaten aus [AMN93, Bem. 4.3] und aus [AM94, Kap. 3.3] für hinreichend kleine Zeiten T , welche in [AM94] wieder mit der Theorie von Kato [Kat76] und in [AMN93] mit der Theorie maximal monotoner Operatoren nach Brezis [Bre71] bewiesen werden. Für [AMN93] konnte der konkrete Lösungsbegriff nicht herausgearbeitet werden. Unter einigen starken Voraussetzungen wird in [AM94] die Existenz von klassischen Lösungen bewiesen. In diesem Kapitel wird ein Resultat zur eindeutigen Existenz von schwachen Lösungen explizit formuliert und auf einen Diskretisierungsbeweis aus [Zei90b] zurückgeführt.

Zunächst wird wieder das Netzwerkproblem vorgestellt und die schwache Formulierung ($SP3$) aufgestellt. Danach wird die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung zu ($SP3$) mit dem Satz 4.2 aus [Zei90b] bewiesen. Schließlich werden einige naheliegende offene Verallgemeinerungen präsentiert. Im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln wird hier eine allgemeinere Vorgehensweise vorgestellt, bei der Wohlgestelltheit des Problems auf einem Intervall vorausgesetzt wird. Anschließend werden Intervalle verknüpft und zulässige Knotenbedingungen formuliert, sodass das schwache Netzwerkproblem ebenfalls wohlgestellt ist. Dieser Ansatz ist auch für die Probleme in den Kapiteln 2 und 3 möglich. Schließlich werden in Kapitel 9 weitere Resultate vorgestellt, die man versuchen kann nach diesem Prinzip zu verallgemeinern.

4.1 Problemstellung

Für $T > 0$ sei in einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ mit $\alpha_j \simeq [a_j, b_j]$ auf $(0, T)$ und auf dem Inneren jeder Kante $\alpha_j \in J$ eine nichtlineare Diffusionsgleichung der Art (4.1) mit einem Anfangswert $u_j(x, 0) = (u_0)_j(x)$ gegeben. Weiterhin werden auf Γ_D homogene Dirichlet- und auf Γ_N Neumann-Randbedingungen sowie Stetigkeits- und Kirchhoff-Bedingungen auf Γ_I gefordert. Dabei müssen die Kirchhoff- und Neumann-Bedingungen an die quasilinearen Gleichungen angepasst werden.

Für $1 < p < \infty$ und zulässige (Def. 4.1) c_j und e_j ergibt sich das folgende Problem

$$(P3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_j(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) + e_j(x, t, u_j(x, t)) = f_j(x, t) \\ u_j(x, 0) = (u_0)_j(x) \\ \Phi_{\Gamma_D}^+(u_j(b_j, t))_{j=1}^m + \Phi_{\Gamma_D}^-(u_j(b_j, t))_{j=1}^m = 0 \\ \Phi_{\Gamma_N}^+ \left(c_j(b_j, t, \frac{\partial u_j}{\partial x}(b_j, t)) \right)_{j=1}^m - \Phi_{\Gamma_N}^- \left(c_j(a_j, t, \frac{\partial u_j}{\partial x}(a_j, t)) \right)_{j=1}^m = h_N(t) \\ u_i(b_i, t) = u_k(a_k, t) = P_v(u(t)) \\ \Phi_{\Gamma_I}^+ \left(c_j(b_j, t, \frac{\partial u_j}{\partial x}(b_j, t)) \right)_{j=1}^m - \Phi_{\Gamma_I}^- \left(c_j(a_j, t, \frac{\partial u_j}{\partial x}(a_j, t)) \right)_{j=1}^m = h_K(t) . \end{array} \right.$$

Je nach Kante sei

$$W_j := \{ f \in W^{1,p}(a_j, b_j) \mid f(v) = 0 \text{ falls } \alpha_j \in \delta(v) \text{ und } v \in \Gamma_D \} .$$

Definition 4.1

Funktionen $c_j : [a_j, b_j] \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $e_j : [a_j, b_j] \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißen **zulässig** für (P3), falls für jede Kante $\alpha_j = (a_j, b_j)$ und $u_j, w_j \in W_j$ ein Operator $A_j(t)$

$$\langle A_j(t)u_j, w_j \rangle_{W_j} := \int_{a_j}^{b_j} c_j(t, x, \frac{du_j}{dx}(x)) \frac{dw_j}{dx}(x) + e_j(x, t, u_j(x))w_j(x) dx$$

induziert wird, welcher die Eigenschaften (N1), (N2), (N3) und (N4) aus Satz 4.2 mit dem Gelfand-Tripel $W_j \xrightarrow{c} L^2(a_j, b_j) \hookrightarrow (W_j)^*$ für $1 < p < \infty$ erfüllt.

Beispiel 2

Hinreichende Bedingungen sind zum Beispiel mit $\lambda_j, \xi_j, \gamma_j, \beta_j \in \mathbb{R}_{>0}$ für $j = 1, \dots, m$

$$\begin{array}{ll} c_j(x, t, z)z \geq \mu_j|z|^p - \lambda_j, & (c_j(x, t, y) - c_j(x, t, z))(y - z) \geq 0, \\ e_j(x, t, z)z \geq \eta_j|z|^p - \xi_j, & (e_j(x, t, y) - e_j(x, t, z))(y - z) \geq 0, \\ c_j(x, t, z) \leq (|z|^{p-1} + 1)\gamma_j, & e_j(x, t, z) \leq (|z|^{p-1} + 1)\beta_j. \end{array}$$

Die Funktionen

$$c_j(x, t, z) = |z|^{p-2}z \quad \text{und} \quad e_j(x, t, z) = |z|^{p-2}z$$

besitzen für $1 < p < \infty$ die gewünschten Eigenschaften. \diamond

Für die schwache Formulierung wird das Gelfand-Tripel

$$V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N}) \xrightarrow{c} \bigtimes_{j=1}^m L^2(a_j, b_j) \hookrightarrow (V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N}))^*$$

verwendet. Die Differentialgleichungen aus (P3) werden mit $w \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$ und $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ getestet. Dann wird einmal in den Ortsableitungen partiell integriert. Analog zu (2.5) - (2.7) aus Abschnitt 2.1 folgt mit den Knotenbedingungen

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) w_j(x) \varphi(t) + c_j \left(x, t, \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right) \frac{dw_j}{dx}(x) \varphi(t) \\ & + e_j(x, t, u_j(x, t)) w_j(x) \varphi(t) dx dt \\ & = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} f_j(x, t) w_j(x) dx + (h_K(t), w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} \right. \\ & \left. + (h_N(t), w_{\Gamma_N})_{\mathbb{R}^{n_N}} \right) \varphi(t) dt . \end{aligned}$$

Aufgrund der Nichtlinearität ergibt sich hier keine Bilinearform, sondern ein Operator

$$A_0(t) : V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N}) \rightarrow (V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N}))^*$$

mit

$$\begin{aligned} \langle A_0(t)u, w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} &:= \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} c_j \left(x, t, \frac{du_j}{dx}(x) \right) \frac{dw_j}{dx}(x) + e_j(x, t, u_j(x)) w_j(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^m \langle A_j(t)u_j, w_j \rangle_{W_j} \end{aligned}$$

und die rechte Seite

$$\langle F_3(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} := \sum_{j=1}^m \langle f_j(t)w_j \rangle_{W_j} + (h_K(t), w_{\Gamma_I})_{\mathbb{R}^{n_I}} + (h_N(t), w_{\Gamma_N})_{\mathbb{R}^{n_N}} .$$

Dies ergibt insgesamt das folgende Problem.

Problem In einem Netzwerk \mathfrak{N} mit $\alpha_j \simeq [a_j, b_j]$ wird für gegebene $f_j \in L^{p^*}(0, T; (W_j)^*)$, c_j, e_j zulässig im Sinne von Definition 4.1, $(h_K)_v, (h_N)_v \in C[0, T]$ und $u_0 \in \times_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ eine Lösung $u \in \mathcal{W}_{\Gamma_D}^p(0, T)$ gesucht, sodass

$$(SP3) \begin{cases} \int_0^T \varphi(t) \langle u'(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} + \varphi(t) \langle A_0(t)u(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} dt = \int_0^T \varphi(t) \langle F_3(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} dt \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ und für alle $w \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$ gilt.

Bemerkung:

- In diesem Kapitel ist $p^* \in (1, \infty)$ stets der zu $p \in (1, \infty)$ konjugierte Exponent, welcher charakterisiert wird durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.
- Die Ableitung u' ist wieder eine verallgemeinerte Ableitung.
- Aufgrund der gutartigen Knotenbedingungen ergibt sich diese einfache Struktur von $A_0(t)$, sodass die folgenden Beweise leicht werden, da A_0 die relevanten Eigenschaften von den A_j erbt. Andere Knotenbedingungen können zu Störungen in A_0 führen.

4.2 Existenz- und Eindeigkeitssatz

In diesem Abschnitt wird das Problem (SP3) mit Hilfe des Satzes 4.2 gelöst.

Satz 4.2 [Zei90b]

Seien V, H und V^* ein Gelfand-Tripel. Zu jedem $F \in L^{p^*}(0, T; V^*)$ und $u_0 \in H$ gibt es genau ein $u \in \mathcal{W}^p(0, T)$ mit $u(0) = u_0$ in H und

$$\int_0^T \varphi(t) \langle u'(t), w \rangle_V + \varphi(t) \langle A(t)u(t), w \rangle_V dt = \int_0^T \varphi(t) \langle F(t), w \rangle_V dt$$

für alle $w \in V$ und für alle $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$, falls der Operator $A(t)$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

(N1) Die Abbildung $t \mapsto A(t)$ ist schwach messbar, das heißt für alle $u, w \in V$ ist die Abbildung

$$t \mapsto \langle A(t)u, w \rangle_V$$

messbar auf $(0, T)$.

(N2) Für alle $t \in (0, T)$ ist $A(t)$ gleichmäßig koerzitiv, das heißt, es gibt ein $\mu > 0$ und ein $\lambda \geq 0$, sodass

$$\langle A(t)u, u \rangle_V \geq \mu \|u\|_V^p - \lambda$$

für alle $u \in V$ und für alle $t \in (0, T)$ gilt.

(N3) Es gilt folgende Wachstumsbeschränkung. Es existieren $k > 0$ und $\gamma > 0$ mit

$$\|A(t)u\|_{V^*} \leq k \|u\|_V^{p-1} + \gamma \quad \text{für alle } u \in V, t \in (0, T).$$

(N4) Für alle $t \in (0, T)$ ist $A(t) : V \rightarrow V^*$ monoton und hemistetig (Def. A.15).

Weiterhin konvergiert die im Beweis konstruierte Folge von Galerkin-Approximationen im folgenden Sinne

$$u^n \rightharpoonup u \text{ in } L^p(0, T; V), \quad \max_{0 \leq t \leq T} |u^n(t) - u(t)|_H \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Beweis. Dieser Satz wird in [Zei90b, Kap.30] bewiesen. □

Bemerkung:

- Die Existenz einer geeigneten Galerkin-Basis und einer Approximationsfolge für den Anfangswert folgen wie in Kapitel 2 aus den Eigenschaften des Gelfand-Tripels.

Lemma 4.3

Der Operator $A_0(t)$ erfüllt (N1).

Beweis. Da die $A_j(t)$ schwach messbar bezüglich der W_j sind, ist für $u, w \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$ die Abbildung

$$t \mapsto \langle A_0(t)u, w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} = \sum_{j=1}^N \langle A_j(t)u, w \rangle_{W_j}$$

Lebesgue-messbar. □

Lemma 4.4

Für alle $t \in (0, T)$ erfüllt $A_0(t)$ die Bedingung (N2).

Beweis. Nach Voraussetzung sind die induzierten Operatoren $A_j(t)$ auf W_j koerzitiv, somit folgt für $u \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$

$$\begin{aligned} \langle A_0(t)u, u \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} &= \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} c_j \left(x, t, \frac{du_j}{dx}(x) \right) \frac{du_j}{dx}(x) + e_j(x, t, u_j(x)) u_j(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^m \langle A_j(t)u_j, u_j \rangle_{W_j} \\ &\geq \sum_{j=1}^m \mu_j \|u_j\|_{W_j}^p - \lambda_j \\ &\geq \mu \|u\|_{V_{\Gamma_D}^{1,p}}^p - \lambda. \end{aligned}$$

Die Konstanten μ und λ ergeben sich aus den Koerzitivitätskonstanten μ_j und λ_j von $A_j(t)$ durch

$$\mu := \min_{j=1,\dots,m} \mu_j \quad \text{und} \quad \lambda := \max_{j=1,\dots,m} \lambda_j .$$

□

Lemma 4.5

Die Wachstumsbedingung (N3) wird von $A_0(t)$ erfüllt.

Beweis. Zunächst gilt mit den Voraussetzungen an c_j und e_j , der dualen Paarung und der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\langle A_0(t)u, w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}}| &= \sum_{j=1}^m |\langle A_j(t)u_j, w_j \rangle_{W_j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|A_j(t)u_j\|_{(W_j)^*} \|w_j\|_{W^{1,p}} \\ &\leq \sum_{j=1}^m (k_j \|u_j\|_{W^{1,p}}^{p-1} + \gamma_j) \|w\|_{V^{1,p}} \\ &\leq \left(km^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^m \|u_j\|_{W^{1,p}}^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + \gamma \right) \|w\|_{V^{1,p}} \end{aligned}$$

für alle $u, w \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$. Hierbei ergeben sich die Konstanten

$$k = \max_{j=1,\dots,m} k_j \quad \text{und} \quad \gamma = \sum_{j=1}^m \gamma_j$$

aus den entsprechenden Konstanten γ_j und k_j von $A_j(t)$. Insgesamt folgt

$$\|A_0(t)u\|_{(V_{\Gamma_D}^{1,p})^*} \leq C \|u\|_{V^{1,p}}^{p-1} + \gamma .$$

□

Lemma 4.6

Der Operator $A_0(t)$ erfüllt (N4).

Beweis. Mit $u, w \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} &\langle A_0(t)u - A_0(t)w, u - w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} \left(c_j(x, t, \frac{du_j}{dx}(x)) - c_j(x, t, \frac{dw_j}{dx}(x)) \right) \left(\frac{du_j}{dx}(x) - \frac{dw_j}{dx}(x) \right) \\ &\quad + (e_j(x, t, u_j(x)) - e_j(x, t, w_j(x))) ((u_j(x) - w_j(x)) dx \\ &\geq \sum_{j=1}^m \langle A_j(t)u_j - A_j(t)w_j, u_j - w_j \rangle_{W_j} \\ &\geq 0 . \end{aligned}$$

Dies folgt aus den Voraussetzungen an c_j und e_j .

Sei nun $s \in (0, 1)$ und $u, v, w \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$. Dann gilt

$$\langle A_0(t)(u + sv), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}} = \sum_{j=1}^m \langle A_j(t)(u_j + sv_j), w_j \rangle_{W_j}$$

Da alle $A_j(t)$ hemistetig sind, ist auch $A_0(t)$ hemistetig. □

Lemma 4.7

Es gilt $F_3 \in L^{p^*}(0, T; (V^{1,p}(\mathfrak{N}))^*)$.

Beweis. Mit der dualen Paarung, der Hölderschen Ungleichung und Lemma 1.16 folgt für $w \in V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N})$

$$\begin{aligned} |\langle F_3(t), w \rangle_{V_{\Gamma_D}^{1,p}}| &\leq \sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} \|w_j\|_{W^{1,p}} + |h_K(t)|_{p^*} |w_{\Gamma_I}|_p + |h_N(t)|_{p^*} |w_{\Gamma_N}|_p \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} \|w\|_{V^{1,p}} + (n_I)^{\frac{1}{p^*}} \|h_K\|_{\infty} |w_{\Gamma_I}|_p + (n_N)^{\frac{1}{p^*}} \|h_N\|_{\infty} |w_{\Gamma_N}|_p \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} + M \right) \|w\|_{V^{1,p}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|F_3(t)\|_{(V_{\Gamma_D}^{1,p})^*} \leq \sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} + M.$$

Die Bochner-Messbarkeit von F_3 ergibt sich analog zu Lemma 2.5. Abschließend folgt mit der Abschätzung

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \text{für } a, b \geq 0, 1 < p < \infty$$

und der Hölderschen Ungleichung in \mathbb{R}^m

$$\begin{aligned} \|F_3(t)\|_{L^{p^*}(0,T;(V_{\Gamma_D}^{1,p})^*)}^{p^*} &= \int_0^T \|F_3(t)\|_{(V_{\Gamma_D}^{1,p})^*}^{p^*} dt \\ &\leq \int_0^T \left(\sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{(W_j)^*} + M \right)^{p^*} dt \\ &\leq K \sum_{j=1}^m \|f_j(t)\|_{L^{p^*}(0,T;(W_j)^*)} + C. \end{aligned}$$

□

Satz 4.8

Für das Problem (SP3) gibt es genau eine Lösung $u \in \mathcal{W}_{\Gamma_D}^p(0, T)$. Weiterhin folgt die Konvergenz von Diskretisierungsverfahren im Sinne von (4.2).

Beweis. Der Operator $A_0(t)$ erfüllt nach Lemma 4.3-4.6 die geforderten Eigenschaften (N1)-(N4) und F_3 ist eine zulässige rechte Seite. Die Behauptung folgt nun mit Satz 4.2 für das Gelfand-Tripel $V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N}), \times_{j=1}^m L^2(a_j, b_j)$ und $(V^{1,p}(\mathfrak{N}))^*$. □

Bemerkung:

- Mit der Halbgruppe aus Satz 2.9 und deren Eigenschaften folgt mit Resultaten aus der Halbgruppentheorie ([Paz83, Kap. 6]) auch die Existenz einer eindeutigen milden Lösung für bestimmte nichtlineare Diffusionsprobleme.

4.3 Offene Probleme

Im Folgenden werden einige naheliegende Verallgemeinerungen präsentiert, welche weiterführend untersucht werden können. Weitere offene Probleme werden in Kapitel 9 vorgestellt.

Im Vergleich zu Kapitel 2 fällt auf, dass in dieser Arbeit als auch in der Literatur für nichtlineare Probleme Robin-Randbedingungen und verallgemeinerte Kirchhoff-Bedingungen noch nicht untersucht wurden. Für $0 \leq r_v, k_v \in C[0, T]$ können die Eigenschaften (N1), (N2) und (N4) analog bewiesen werden. Allerdings müssten für (N3) Abschätzungen der Art

$$\sum_{v \in \Gamma} |r_v(t)| |P_v(u)| |P_v(w)| \leq C \|u\|_{V^{1,p}}^{p-1} \|w\|_{V^{1,p}}$$

gezeigt werden. Dies ist schon in dem einfachen Fall, dass $u = \bar{u} \in \mathbb{R}$ und $w = \bar{w} \in \mathbb{R}$ konstante Funktionen sind und das Netzwerk aus einer Kante $[0, 1]$ mit einem Robin-Knoten v mit $r_v(t) = 1$ besteht, nicht möglich, denn es gilt

$$\forall C > 0 \exists \bar{u} \in \mathbb{R} : |r_v(t)| |\bar{u}| |\bar{w}| > C |\bar{u}|^{p-1} |\bar{w}| = \|u\|_{V^{1,p}}^{p-1} \|w\|_{V^{1,p}}$$

für $1 \leq p < 2$ und \bar{u} hinreichend groß. Dies kann zum Beispiel mit nichtlinearen Funktionen

$$\begin{aligned} r_v : [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{mit} & \quad r_v(t, z)z \geq 0 \text{ und } r_v(t, z) \leq C_v |z|^{p-1} \quad C_v \in \mathbb{R}, \\ k_v : [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{mit} & \quad k_v(t, z)z \geq 0 \text{ und } k_v(t, z) \leq C_v |z|^{p-1} \quad C_v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kompensiert werden, sodass die Eigenschaften (N1) - (N4) für diese nichtlineare Robin-Bedingungen

$$\Phi_{\Gamma_R}^+ \left(c_j(b_j, t, \frac{\partial u}{\partial x}(b_j, t)) \right)_{j=1}^m - \Phi_{\Gamma_R}^- \left(c_j(a_j, t, \frac{\partial u}{\partial x}(a_j, t)) \right)_{j=1}^m + (r_v(t, P_v(u(t)))_{v \in \Gamma_R} = h_R(t)$$

und analoge nichtlineare verallgemeinerte Kirchhoff-Bedingungen wie in Lemma 4.3 - 4.6 bewiesen werden können. Es ist noch nicht klar wie Anti-Stetigkeits- und Anti-Kirchhoff-Bedingungen für nichtlineare Probleme behandelt werden können.

Der Operator $A_0(t)$ benutzt noch nicht die besondere Netzwerkstruktur. Insbesondere ist $A_0(t)$ auch auf $\times_{j=1}^m W_j$ wohldefiniert. Verallgemeinerte Kirchhoff-Bedingungen würden dies ändern. Die rechte Seite F_3 verwendet die Netzwerkstruktur in Form der inhomogenen Kirchhoff-Bedingung h_K .

Wie in Kapitel 1 erwähnt, könnte es nützlich sein, verschiedene Integrationsordnungen p_j pro Kante zu betrachten. Dabei ist insbesondere interessant, inwiefern die Theorie zu gebrochenen Sobolew-Räumen für solche Netzwerkprobleme genutzt werden kann.

Nachdem nun quasilineare Diffusionsprobleme mit einem monotonen Operator betrachtet wurden, liegt es nahe nach demselben Konzept die Erweiterung für eine verstärkt stetige Störung [Emm04, Satz 8.4.2] und doppelt nichtlineare Probleme zweiter Ordnung aus [ET10] auf Netzwerke zu übertragen.

5 Umparametrisierungen und allgemeinere Netzwerke

In diesem Kapitel werden die Vereinfachungen aus den Kapiteln 2 und 3 gerechtfertigt. Dazu wird gezeigt, dass Satz 2.6 auch ein analoges Problem mit beliebigen Kanten $\alpha_j \simeq [a_j, b_j]$ lösen kann. Weiterhin wird gezeigt, dass, wie zu erwarten, die Lösbarkeit der Probleme (P1) und (P2) nicht von der gewählten Orientierung der Kanten abhängt, da Schwingungen und Diffusion keine ausgezeichneten Richtungen kennen. In dem Abschnitt 5.2 wird der Begriff des C^k -Netzwerks erklärt und eingeordnet.

Bemerkung:

- Es wird beispielhaft nur das Problem (P1) betrachtet. Die Aussagen für das Problem (P2) ergeben sich analog.
- Die Umformungen werden an klassischen Lösungen und glatten Daten durchgeführt, da dies übersichtlicher ist. Diese Rechnungen können auch in der schwachen Formulierung durchgeführt werden, dann wird jedoch zusätzlich eine kanonische Bijektion zwischen den Testräumen und die Substitutionsregel auf jeder Kante benötigt.
- Wie in Kapitel 2.3 erwähnt, beeinflusst die Länge der Kanten das Spektrum des Operators und ist somit wichtig für die Stabilitäts- und Kontroll-Theorie.
- Bei Transportproblemen (Kap. 6) gibt es mehrere Ansätze für richtige Orientierungen. Dort spielt diese eine größere Rolle.

Die folgenden Argumente werden in der Literatur stets stillschweigend vorausgesetzt, aber nie explizit ausgeführt, da sie schnell einsehbar sind.

5.1 Normierung und Orientierung

Sei ein Problem (P1+) der Art (P1) mit hinreichend glatten Daten $c_j, e_j, f_j, (u_0)_j$ in einem Netzwerk $\mathfrak{N}_+ = (\Gamma, J)$ mit Kanten $\alpha_j \simeq [a_j, b_j]$ gegeben. Dann existieren die affin linearen bijektiven Transformationen

$$\begin{aligned} \pi_j : [0, 1] &\rightarrow [a_j, b_j], & \pi_j(x) &:= a_j + x(b_j - a_j), \\ \eta_j : [a_j, b_j] &\rightarrow [0, 1], & \eta_j(x) &:= \frac{x - a_j}{b_j - a_j}. \end{aligned}$$

Mit den Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j(x, t) &:= (b_j - a_j)^{-1} c_j(\pi_j(x), t), & \tilde{f}_j(x, t) &:= f_j(\pi_j(x), t), \\ \tilde{e}_j(x, t) &:= e_j(\pi_j(x), t), & (\tilde{u}_0)_j(x) &:= (u_0)_j(\pi(x)) \end{aligned}$$

erhält man ein Problem (P1) in einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$. Beide Netzwerke besitzen identische Inzidenz-Matrizen. Sei \tilde{u} eine klassische Lösung von (P1). Diese ist eindeutig nach Satz 2.6, da jede klassische Lösung eine schwache Lösung ist.

Lemma 5.1

Die Funktion

$$\hat{u}_j(x, t) := \tilde{u}_j(\eta_j(x), t)$$

ist die eindeutige klassische Lösung des ursprünglichen Problems (P1+).

Dies wird im Folgenden durch gerechnet. Für die Auswertung in Randpunkten werden Abkürzungen wie $u(a) := (u_1(a_1), \dots, u_m(a_m))^T$ analog zu $\tilde{u}(1)$ verwendet.

Beweis. Zunächst gilt für den Anfangswert auf jeder Kante α_j

$$\hat{u}_j(x, 0) = \tilde{u}_j(\eta_j(x), 0) = (\tilde{u}_0)_j(\eta_j(x)) = (u_0)_j(x).$$

Die Stetigkeitsbedingungen für alle $v \in \Gamma$ folgen aus

$$P_v(\hat{u}(t)) = \hat{u}_i(b_i, t) = \tilde{u}_i(\eta_i(b_i), t) = \tilde{u}_i(1, t) = P_v(\tilde{u}(t)) = \tilde{u}_k(0, t) = \hat{u}_k(a_k, t)$$

für alle $\alpha_i \in \delta^-(v)$ und $\alpha_k \in \delta^+(v)$. Die Dirichlet-Bedingungen verhalten sich wie die Stetigkeitsbedingungen. Für die Neumann-, Robin- und Kirchhoff-Bedingungen wird benötigt, dass

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}_j(\eta_j(x), t)) = (b_j - a_j)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}(\eta_j(x), t)$$

gilt. Nun folgt zunächst für die Neumann-Bedingung in einem Knoten $v \in \Gamma_N$

$$\nu_v^j c_j(v, t) \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}(v, t) = \nu_v^j c_j(v, t) (b_j - a_j)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}(v, t) = \nu_v^j \tilde{c}_j(v, t) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}(v, t) = h_v(t).$$

Für die verallgemeinerten Kirchhoff-Bedingungen folgt mit den bisherigen Erkenntnissen

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} c_j(b_j, t) \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}(b_j, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} c_j(a_j, t) \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}(a_j, t) + k_v(t) P_v(\hat{u}(t)) \\ &= \sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} \tilde{c}_j(1, t) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}(1, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} \tilde{c}_j(0, t) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}(0, t) + k_v(t) P_v(\tilde{u}(t)) \\ &= (h_K(t))_v \end{aligned}$$

für alle $v \in \Gamma_I$. Die Robin-Bedingungen verlaufen analog. Schließlich gilt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}(\eta_j(x), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{c}_j(\eta_j(x), t) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x}(\eta_j(x), t) \right) - \tilde{e}_j(\eta_j(x), t) \tilde{u}_j(\eta_j(x), t) + \tilde{f}_j(\eta_j(x), t) \\ &= -e_j(x, t) \hat{u}_j(x, t) + f_j(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left((b_j - a_j)^{-1} c_j(x, t) (b_j - a_j) \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}(x, t) \right) \end{aligned}$$

für alle $\alpha_j \in J$.

Angenommen (P1+) besitzt noch eine weitere Lösung \bar{u} . Dann löst $(\bar{u}_j(\pi_j(x), t))_{j=1}^m$ ebenfalls (P1) und es gilt $\bar{u} = \hat{u}$. Dies folgt analog zu den obigen Rechnungen. \square

Um die Argumentation für die schwache Formulierung zu führen, wird die Bijektion

$$T : V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N}) \rightarrow V_{\Gamma_D}^{1,p}(\mathfrak{N}+)$$

$$T \begin{pmatrix} w_1(\cdot) \\ \vdots \\ w_m(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_1(\eta_1(\cdot)) \\ \vdots \\ w_m(\eta_m(\cdot)) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} \begin{pmatrix} w_1(\cdot) \\ \vdots \\ w_m(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_1(\pi_1(\cdot)) \\ \vdots \\ w_m(\pi_m(\cdot)) \end{pmatrix}$$

für die Testfunktionen w und die Substitutionsregel auf jeder Kante benötigt.

In Kapitel 1 wurde eine Orientierung des zugrundeliegenden Graphen gewählt. Nun wird gezeigt, dass diese für die Wohlgestelltheit von (P1) keine Rolle spielt. Sei (P1) in einem Netzwerk \mathfrak{N} mit den Inzidenz-Matrizen Φ^+ und Φ^- gegeben. Nach Umkehrung der Orientierung der Kante $\alpha_1 = (v_1, v_2) \simeq [0, 1]$ ergibt sich die Kante $-\alpha_1 = (v_2, v_1) \simeq [0, 1]$. Mit der bijektiven affin linearen Transformation $\pi_1(x) = 1 - x$ werden die Daten

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(x, t) &:= c_1(\pi_1(x), t), & \hat{e}_1(x, t) &:= e_1(\pi_1(x), t), \\ \hat{f}_1(x, t) &:= f_1(\pi_1(x), t), & (\hat{u}_0)_1(x) &:= (u_0)_1(\pi_1(x)) \end{aligned}$$

auf der Kante $-\alpha_1$ definiert. Alle anderen Daten bleiben unverändert. Dies führt auf ein Problem (P1-) in dem neuen Netzwerk $\hat{\mathfrak{N}} = (\Gamma, \hat{J})$ mit $\hat{J} = \{-\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. Die Inzidenz-Matrizen $\hat{\Phi}^+$ und $\hat{\Phi}^-$ ergeben sich aus Φ^+ und Φ^- , indem die jeweils ersten Spalten getauscht werden.

Lemma 5.2

Sei für hinreichend glatte Daten u die eindeutige klassische Lösung zu (P1). Dann ist

$$\hat{u}_1(x, t) := u_1(\pi_1(x), t), \quad \hat{u}_j(x, t) = u_j(x, t) \quad \text{für alle } j = 2, \dots, m$$

die eindeutige klassische Lösung des neuen Problems (P1-).

Beweis. Es müssen nur die relevante Kante $-\alpha_1$ und der Knoten v_1 betrachtet werden. Der andere Knoten verläuft analog. Die Anfangsbedingung ist trivialerweise erfüllt. Mit

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x}(x, t) = -1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(\pi_1(x), t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\pi_1(x), t)$$

ergibt sich für die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(\pi_1(x), t) \\ &= \frac{\partial c_1}{\partial x}(\pi_1(x), t) \frac{\partial u_1}{\partial x}(\pi_1(x), t) + c_1(\pi_1(x), t) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(\pi_1(x), t) \\ &\quad - e_1(\pi_1(x), t) u_1(\pi_1(x), t) + f_1(\pi_1(x), t) \\ &= \hat{f}_1(x, t) - \hat{e}_1(x, t) \hat{u}_1(x, t) \\ &\quad \left(- \frac{\partial \hat{c}_1}{\partial x}(x, t) \right) \left(- \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x}(x, t) \right) + \hat{c}_1(x, t) \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial x^2}(x, t) \\ &= \hat{f}_1(x, t) - \hat{e}_1(x, t) \hat{u}_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{c}_1(x, t) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x}(x, t) \right). \end{aligned}$$

Für die Stetigkeitsbedingung in v_1 folgt

$$\hat{u}_1(1, t) = u_1(0, t) = \hat{u}_k(v_1, t) = P_{v_1}(\hat{u}(t)) \quad \text{für alle } \alpha_k \in \delta(v_1) \setminus \{-\alpha_1\}.$$

Für den Fall $v_1 \in \Gamma_D$ sind die Dirichlet-Bedingungen offensichtlich erfüllt. Sei nun $v_1 \in \Gamma_N$, dann folgt

$$\nu_{v_1}^{(-\alpha_1)} \hat{c}_1(v_1, t) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x}(v_1, t) = -\nu_{v_1}^{(-\alpha_1)} c_1(v_1, t) \frac{\partial u_1}{\partial x}(v_1, t) = \nu_{v_1}^{\alpha_1} c_1(v_1, t) \frac{\partial u_1}{\partial x}(v_1, t) = h_{v_1}(t),$$

da $\alpha_1 \in \delta^+(v_1)$ und $-\alpha_1 \in \delta^-(v_1)$ gilt. Die Robin- und verallgemeinerten Kirchhoff-Bedingungen folgen analog. Die Eindeutigkeit folgt wie in Lemma 5.1. \square

Man kann nun die Rollen von \mathfrak{N} und $\hat{\mathfrak{N}}$ sowie nacheinander die Orientierung von allen Kanten tauschen. Somit spielt die Orientierung der Kanten für die linearen Probleme (P1) und (P2) keine Rolle.

Für nichtlineare Problem der Art (P3) ergibt sich für $j = 1, \dots, m$ mit den Transformationen $\pi_j(x) = b_j - (x - a_j)$ und den Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{c}_j(x, t, z) &:= (-1)c_j(\pi_j(x), t, -z), & \hat{e}_j(x, t, z) &:= \hat{e}_j(\pi_j(x), t, z), \\ (\hat{u}_0)_j(x) &:= (u_0)_j(\pi_j(x)), & \hat{f}_j(x, t) &:= f_j(\pi_j(x), t) \end{aligned}$$

ein Problem (P3-). Für eine Lösung u des Problems (P3) löst $\hat{u}_j(x, t) := u_j(\pi_j(x), t)$, $j = 1, \dots, m$ die Differentialgleichungen, die inhomogenen Neumann- und die inhomogenen Kirchhoff-Bedingungen von (P3-), da eine zusätzliche (-1) zur Verfügung steht, um den Normalenvektor $\nu_{v_i}^{-\alpha_j}$ in $\nu_{v_i}^{\alpha_j}$ zu transformieren. Der Anfangswert, die Stetigkeitsbedingungen und die homogenen Dirichlet-Randbedingungen bereiten ebenfalls keine Schwierigkeiten. Diese Rechnungen verlaufen analog zu Lemma 5.2. Allerdings stellt sich selbst in diesem Fall die Frage, ob die neuen Funktionen \hat{c}_j, \hat{e}_j auch zulässig für das Problem (P3-) im Sinne der Definition 4.1 sind.

5.2 C^k -Netzwerke

Bisher wurden Netzwerke als abstrakte Objekte, als Verknüpfungen von eindimensionalen Intervallen, betrachtet. Sei nun (Γ, J) ein endlicher zusammenhängender Digraph beziehungsweise eine konkrete Einbettung im \mathbb{R}^d mit Knoten $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ und Kanten $k_j \subset \mathbb{R}^d$. Kanten dürfen sich nur in gemeinsamen Knoten berühren. Dabei sei k_j eine Jordankurve, parametrisiert über ihre Bogenlänge mit einer C^k -Funktion

$$\pi_j : [0, l_j] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \pi_j([0, l_j]) = k_j, \quad \pi_j \in C^k[0, l_j]^d.$$

Weiterhin sei π_j bijektiv auf $(0, l_j)$. Dann ist $G := \cup_{j=1}^m k_j$ mit der induzierten Spurtopologie ein zusammenhängender kompakter topologischer Raum. Für jedes $x \in G$ gibt es entweder genau eine Kante k_j mit $x \in k_j$ oder x ist ein innerer Knoten. Sei nun $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $u \in C(G)$ lässt sich mit den Funktionen

$$u_j(x) := u(\pi_j(x)) \quad \text{für } x \in [0, l_j]$$

der Raum $C(G)$ mit dem Raum $C(\mathfrak{N})$ für das Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ mit $\alpha_j \simeq [0, l_j]$ identifizieren. Der Index beschreibt hierbei eindeutig die möglichen Argumente. Werden nun die Funktionen u_j bezüglich des Bogenlängenparameters differenziert, ergeben sich Differentialgleichungen in der in dieser Arbeit betrachteten Form.

Bemerkung:

- Falls $u \in C(G)$ die Identität auf \mathbb{R}^d ist, bedeutet die Stetigkeitsbedingung (S1), dass das Netzwerk quasi nicht zerreißen darf. Diese Idee wird in [LLS94] für Systeme schwingender Saiten und Balken weiter verfolgt.

6 Lineare Transportprobleme

In diesem Kapitel wird anders als in den Kapiteln 2, 3 und 4 verfahren. Es werden lineare Transportprobleme betrachtet und ein Resultat aus [Kra05] präsentiert, welches ähnlich zu dem Satz 2.9 auf Halbgruppentheorie beruht. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf einer Einführung und einem Überblick für Differentialgleichungen in Netzwerken liegt, werden skalare lineare Transportprobleme als ein Beispiel für allgemeine Systeme von Erhaltungsgleichungen in Netzwerken betrachtet. Für die Behandlung von allgemeineren Erhaltungsproblemen wären teilweise signifikant andere Methoden als die bisher eingeführten nötig, deren Einführung den Rahmen dieser Arbeit übersteigen würde. Deshalb können Systeme von Erhaltungsgleichungen in Netzwerken trotz ihrer Relevanz für Anwendungen nicht genauer besprochen werden.

Bemerkung:

- Eine ausführliche Einführung für Systeme von Erhaltungsgleichungen bieten zum Beispiel [Daf10] und [BC16]. In [BC16] werden auch Netzwerkprobleme betrachtet. Der Schwerpunkt von [BC16] liegt auf der Stabilitäts- und Kontrolltheorie solcher Systeme.
- In [GP06] wird die sogenannte *wave-front tracking* Methode für Systeme von Erhaltungsgleichungen vorgestellt und erfolgreich auf Netzwerkprobleme erweitert. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass nur ein geeignetes Problem in einem sternförmigen Netzwerk (Def. A.11) untersucht werden muss, um Aussagen für beliebige Netzwerke treffen zu können. Dieser Ansatz macht sich zunutze, dass Lösungen von Erhaltungsgleichungen eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen. In [GP06] werden unter anderem verschiedene Modelle für Verkehrsflüsse in Netzwerken und Telekommunikationsnetzwerke untersucht.

In einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten sei pro Kante $\alpha_j \simeq [0, 1]$ für Funktionen $u_j : (0, 1) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ die lineare Transportgleichung

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - c_j \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) = 0$$

mit konstanten Geschwindigkeiten $c_j > 0$ gegeben. Der zugrundeliegende Digraph wird als stark zusammenhängend (Def. A.5) vorausgesetzt, woraus insbesondere $\deg(v) \geq 2$ für alle $v \in \Gamma$ beziehungsweise $\Gamma_E = \emptyset$ folgt. Die Orientierung der Kanten sei dabei entgegen der Flussrichtung gewählt, sodass u_j für die Kante $\alpha_j \simeq [0, 1]$ von 1 zu 0 fließt. In einem Knoten $v_i \in \Gamma_I = \Gamma$ wird nun der Einfluss anhand von Gewichtungen

$$0 \leq \mu_{ij} \leq 1 \text{ mit } \sum_{\alpha_j \in \delta^-(v_i)} \mu_{ij} = 1 \quad (6.1)$$

auf die Kanten $\alpha_j \in \delta^-(v_i)$ verteilt

$$u_j(1, t) = \mu_{ij} \sum_{\alpha_k \in \delta^+(v_i)} u_k(0, t) . \quad (6.2)$$

Mit (6.1) und (6.2) folgt für jeden Knoten $v_i \in \Gamma$

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v_i)} u_j(1, t) = \sum_{\alpha_j \in \delta^-(v_i)} \mu_{ij} \sum_{\alpha_k \in \delta^+(v_i)} u_k(0, t) = \sum_{\alpha_k \in \delta^+(v_i)} u_k(0, t). \quad (6.3)$$

Bemerkung:

- Mit den Konstanten c_j können auch unterschiedliche Längen der Kanten modelliert werden.
- Im Gegensatz zur üblichen Transport-Gleichung wie in Kapitel 1 ergibt sich $-c_j$ aufgrund der Parametrisierung entgegen der Flussrichtung. Hier spielt die gewählte Orientierung der Kanten eine Rolle.
- Die Bedingung (6.3) wird in der Literatur für Erhaltungsgleichungen auch Kirchhoff-Bedingung genannt, obwohl sie eigentlich die Gestalt einer Anti-Stetigkeitsbedingung (AS2) besitzt. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass für eine Massendichte u die Bedingung (6.3) Flusserhaltung in dem Knoten v_i sicherstellt. Somit entspricht (6.3) auch einem Erhaltungsprinzip und zwar der Massenerhaltung anstelle der Energieerhaltung wie in Kapitel 2.

Für Anfangswerte $(u_0)_j$ pro Kante ergibt sich insgesamt das Problem

$$(P4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - c_j \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) = 0 \\ u_j(1, t) = \mu_{ij} \sum_{\alpha_k \in \delta^+(v_i)} u_k(0, t) \\ u_j(x, 0) = (u_0)_j(x) . \end{array} \right.$$

Dieses Problem wird mit dem Operator

$$A := \text{diag} \left(c_j \frac{d}{dx} \right) \text{ mit} \\ D(A) := \left\{ u \in \times_{j=1}^m W^{1,1}(0, 1) \mid u \text{ erfüllt die stationäre Variante von (6.2)} \right\}$$

als ein abstraktes Cauchy-Problem formuliert

$$(ACP3) \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 . \end{array} \right.$$

Nun folgt mit Resultaten zu Halbgruppen der folgende Satz.

Satz 6.1 [Kra05]

Der Operator A generiert auf $\times_{j=1}^m L^1(0, 1)$ eine stark stetige, positive, beschränkte Halbgruppe. Mit $c_j = c > 0$ für $j = 1, \dots, m$ ist diese kontraktiv.

Beweis. Dieser Satz wird in [Kra05, 2.4-2.7] mit einem Satz nach Phillips aus [AGG⁺86, Satz C-II.1.2] bewiesen. □

Bemerkung:

- Mit Resultaten aus [Paz83, Kap. 4] folgt mit den Eigenschaften der Halbgruppe aus Satz 6.1 für jedes $u_0 \in D(A)$ die Existenz einer eindeutigen milden Lösung für das Problem (ACP3).

Weiterführend wird dann in [Kra05] das Spektrum von A untersucht und mit einer zusätzlichen Annahme an die Geschwindigkeiten c_j gezeigt, dass die Halbgruppe asymptotisch periodisch ([Kra05, Satz. 4.5]) ist. Die Periode hängt von den Geschwindigkeiten c_j und der Netzwerkstruktur ab ([Kra05, Kor.4.6]). Insbesondere ist der starke Zusammenhang des Digraphen für diese Folgerung wichtig. In [Dor08] wird diese Herangehensweise auf abzählbar unendliche Netzwerke erweitert. Auch dort wird wieder das asymptotische Verhalten der entsprechenden Halbgruppe untersucht.

7 Anwendungen

Im Folgenden werden einige Anwendungen für Differentialgleichungen in Netzwerken vorgestellt. Dabei werden zwei Anwendungen genauer behandelt. Die Chemotaxis in Netzwerken wird detailliert besprochen, da es eine vielleicht unerwartete und recht neue Anwendung ist. Der Gastransport in Netzwerken wird genauer besprochen, weil diese Anwendung in der aktuellen Literatur und Forschung sehr prominent ist.

Anwendungen

Es gibt viele Anwendungen, welche auf lineare und nichtlineare Systeme von Erhaltungsgleichungen in Netzwerken führen. In [BCG⁺14], [Gar10] und [BC16] werden Zusammenfassungen für Anwendungen von Systemen hyperbolischer Erhaltungsgleichungen in Netzwerken gegeben.

Eine interessante Anwendung ist die Modellierung und Kontrolle von offenen Wasserkanälen mit den Saint-Venant Gleichungen. Eine kurze Einführung bietet [LS02]. Einen Überblick über dieses Gebiet bietet [BC16]. Insbesondere wird in [BC16] auch ausführlich ein konkretes reelles Beispiel behandelt. In diesen Arbeiten werden die Netzwerkprobleme mit Hilfe von Riemann-Koordinaten in quasilineare Probleme überführt und unter anderem auf klassische Lösbarkeit untersucht.

In [Gar10] ist eine kurze Übersicht zu einigen Anwendungen der *wave-front tracking* Methode für Netzwerkprobleme gegeben. Die dort aufgeführten Anwendungen für Verkehrsflüsse und Telekommunikationsnetzwerke werden in dem Buch [GP06] ausführlicher behandelt. Dabei werden das skalare Lighthill-Whitham-Richards Model und das mehrdimensionale Aw-Rascle-Zhang Model betrachtet. Auch Gas-Transport wird in [CG06] und [GHK⁺12] mit Hilfe der *wave-front tracking* Methode untersucht. Insbesondere wird dort die Existenz eines geeigneten Riemann Lösers gezeigt.

Die Konzepte und Resultate aus Kapitel 3 finden Anwendung bei der Stabilisierung und Kontrolle von mechanischen Systemen. Eine umfangreiche Einführung in die Kontroll- und Stabilitätstheorie von Schwingungsproblemen in Netzwerken bietet [LS02]. Eine kurze und gute Zusammenfassung sowie offene Probleme sind in [Zua11] zu finden. Auch neuronale Netzwerke können mit Hilfe von Differentialgleichungen in Netzwerken untersucht werden. In [Mug14] werden einige Modelle zu diesem Thema vorgestellt.

7.1 Chemotaxis

Eine der wenigen Anwendungen für Diffusionsprobleme in Netzwerken, welche momentan in der Literatur untersucht werden, ist das Keller-Segel Modell für Chemotaxis.

Der Schleimpilz *Physarum polycephalum* legt in seinem Inneren ein Röhrennetzwerk an, durch welches er Nährstoffe transportiert und chemische Signale an verschiedene Teile seines Organismus sendet.

Bemerkung:

- Dieser Einzeller ist beliebt für Laborversuche und auch von mathematischem Interesse, da er anscheinend kürzeste Wege Probleme lösen kann. Eine mathematische Modellierung dieses Schleimpilzes und eine Untersuchung seines Verhaltens sind in [BBD⁺13] zu finden.

Eine Anwendung mit vielleicht größerem Nutzen ist die Modellierung einer beschichteten Gaze, einem Zellstoffgitter, welches in Hautwunden platziert wird, um die Wundheilung zu beschleunigen.

In [CC15] werden pro Kante $\alpha_j \simeq [0, 1]$ eines Netzwerks \mathfrak{N} ohne Schleifen ein Spezialfall

$$(KS) \begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_j(x, t) \frac{\partial c_j}{\partial x}(x, t) \right) = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial c_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 c_j}{\partial x^2}(x, t) - u_j(x, t) + \alpha c_j(x, t) = 0 \end{cases}$$

des Keller-Segel Modells betrachtet. Auf jeder Kante $\alpha_j \in J$ beschreibt u_j die Konzentration des Organismus und c_j die Konzentration einer Chemikalie. Der Chemotaxis-Term

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u_j(x, t) \frac{\partial c_j}{\partial x}(x, t) \right)$$

beschreibt die Anziehungskraft der Chemikalie auf den Organismus. Der Term u_j in der zweiten Gleichung modelliert, dass c_j mit konstanter Rate 1 von u_j produziert wird. Die Konstante $\alpha \geq 0$ ist die Zerfallrate der Chemikalie und ε ein Modellparameter, der, falls gewünscht, auf 0 gesetzt wird. Mathematisch ergeben sich dabei für $\varepsilon > 0$ ein parabolisch-parabolisches und für $\varepsilon = 0$ ein parabolisch-elliptisches System, welche unterschiedliche Eigenschaften besitzen. In beiden Fällen werden für u und c (S2) und (K1), also Stetigkeits- und homogene Standard-Kirchhoff-Bedingungen für die inneren Knoten sowie homogene Neumann-Randbedingungen zugelassen. Für beide Systeme wird in [CC15] die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung bewiesen. Dafür werden ein Wärmeleitungskern und eine Fundamentallösung der Wärmeleitgleichung konstruiert und mit Hilfe dieser der Banachsche Fixpunktsatz verwendet. Außerdem werden einige relevante Eigenschaften der Fundamentallösung bewiesen. Leider ist diese überaus interessante Konstruktion recht umfangreich, sodass sie an dieser Stelle nicht präsentiert werden kann.

Neben dem oben betrachteten Keller-Segel Modell für Chemotaxis wird in [GN15] auch ein semilineares hyperbolisch-parabolisches System für Chemotaxis in einem Netzwerk untersucht. Dort wird mit Hilfe von Halbgruppentheorie und dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz einer eindeutigen Lösung für hinreichend kleine Zeiten T ([GN15, S.6-12]) gezeigt. Weiterhin wird für hinreichend kleine Anfangsdaten mit einem Fortsetzungsargument die Existenz einer eindeutigen globalen Lösung bewiesen ([GN15, S.12-18]).

7.2 Isotherme Euler-Gleichungen

Für den Transport von Gas in einem Pipeline-System wird angenommen, dass dieses System aus steifen Rohren besteht, welche signifikant länger als breit sind und eine einheitliche Querschnittsfläche besitzen. Weiterhin kann es Quellen, Senken, Kompressor- und Verteilungsstationen geben. Für die mathematische Modellierung des Transports von Gas in

Pipelines werden die Rohre als eindimensional betrachtet und unter anderem die isothermen Euler-Gleichungen verwendet

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q(x, t)^2}{\rho(x, t)} + a^2 \rho(x, t) \right) = g(x, \rho(x, t), q(x, t)) . \end{array} \right.$$

In diesem Modell bezeichnet ρ die Dichte des Gases, q den Fluss, also Dichte ρ mal Geschwindigkeit u , a die Schallgeschwindigkeit in dem Gas und g Kräfte wie Reibung. Die erste Gleichung beschreibt die Massenerhaltung und die zweite Gleichung die Impulserhaltung. Für eine detaillierte Einführung wird auf [GHK⁺12] verwiesen. Da physikalisch sinnvolle Lösungen gesucht werden, wird vorausgesetzt, dass nirgendwo in dem Rohr Vakuum vorherrscht, $\rho > 0$, und dass die Flussrichtung erhalten bleibt, $u \geq 0$. Dies setzt voraus, dass das Rohr $[0, L]$ in Flussrichtung von 0 zu L parametrisiert ist. Diese Gleichungen und Annahmen werden nun für jede Kante α_j eines Netzwerks übernommen. Insbesondere soll das Netzwerk in einer vorgegebenen Flussrichtung parametrisiert sein. In [BHK06] wird die Kopplung von endlich vielen Kanten an nur einem Knoten v untersucht. Mit pro Kante α_j konstanten Anfangswerten $((p_0)_j, (q_0)_j)$ und ohne Reibung $g_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, wird das Riemann-Problem für den Knoten v betrachtet. An dem Knoten v wird Massenerhaltung gefordert

$$\sum_{\alpha_j \in \delta^-(v)} q_j(v, t) - \sum_{\alpha_j \in \delta^+(v)} q_j(v, t) = 0 . \quad (7.1)$$

Im Zusammenhang mit Erhaltungsproblemen wird diese Bedingung, wie in Kapitel 6 als Kirchhoff- oder auch als Rankine-Hugoniot-Bedingung an dem Knoten v bezeichnet. Damit dieses Problem eine sinnvolle eindeutige Lösung besitzt, sind weitere Bedingungen nötig. Die Stetigkeit der Dichte, die Maximierung des Durchflusses und die Forderung nach Lösungen auf den ausgehenden Kanten, deren Geschwindigkeiten u_j unter Schallgeschwindigkeit bleiben

$$u_j = \frac{q_j}{\rho_j} \leq a \quad \text{für alle } \alpha_j \in \delta^+(v) ,$$

werden in [BHK06] als mögliche sinnvolle Bedingungen untersucht. In [GH11] werden zwei Kanten, die durch einen Kompressor verbunden sind, betrachtet. Der Kompressor wird für die eingehende Kante $\alpha_1 \simeq [0, L_1]$ und die ausgehende Kante $\alpha_2 \simeq [0, L_2]$ beschrieben durch

$$P(t) = q_2(0, t) \left(\left(\frac{\rho_2(0, t)}{\rho_1(L_1, t)} \right)^\kappa - 1 \right) .$$

In dieser Bedingung ist P die Kompressorkraft und $\kappa \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{5}]$ eine vom Gas abhängige Konstante, welche in [GHK⁺12] über die Beziehung $\kappa := \frac{\gamma-1}{\gamma}$ mit dem Isentropenexponent γ des betrachteten Gases näher beschrieben wird. Die Arbeit [GDL11] kombiniert die Probleme und Ansätze aus [BHK06] und [GH11] und betrachtet ein Netzwerk mit Kompressoren und Rohrgabelungen.

Viele weitere interessante Arbeiten sind selbstverständlich in den hier genannten Quellen zu finden. Außerdem bietet der Sonderforschungsbereich Transregio 154 unter [TRR16] eine Datenbank mit den bisher entstandenen Arbeiten an. Einige dieser Arbeit sind dort auch öffentlich verfügbar. Allerdings beschäftigen sich nicht alle Teilprojekte mit Differentialgleichungen in Netzwerken.

8 Numerische Betrachtungen

Die aktuelle Forschung zu Differentialgleichungen in Netzwerken orientiert sich vor allem an konkreten Anwendungsgebieten. Deshalb sind insbesondere numerische Methoden für Netzwerkprobleme interessant. In [GP06, Kap. 10] und [BNP07] werden Verkehrsflüsse in Netzwerken mit Hilfe eines Godunov-Schemas approximiert. Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs Transregio 154 werden ebenfalls numerische Methoden für Differentialgleichungen in Netzwerken entwickelt. Die Arbeiten [EK16] und [Egg16] beschäftigen sich mit konformen gemischten Finite-Elemente-Methoden für 2×2 Systeme von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen. In [EK16] werden gedämpfte Schwingungen und in [Egg16] die isothermen Euler-Gleichungen in Netzwerken betrachtet. Es wird jeweils für eine klassische Lösung mit Hilfe von geschickt gewählten Knotenbedingungen eine geeignete variationelle Formulierung aufgestellt. Diese wird mit Hilfe von Galerkin-Räumen im Ort und danach in der Zeit diskretisiert. Anschließend wird die Wohlgestelltheit der diskreten Probleme und die Massen- und Energieerhaltung für die konformen Galerkin-Approximationen gezeigt. In [EK16, Satz 7.5] werden außerdem Fehler- und A-priori-Abschätzungen bewiesen, auf denen Diskretisierungsbeweise für die variationelle Formulierung aufgebaut werden können. In diesem Kapitel wird ein Konzept entwickelt, wie bekannte Finite-Elemente-Methoden für eindimensionale Probleme kombiniert werden können, um entsprechende Netzwerkprobleme zu behandeln. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zur besseren Visualisierung angenommen, dass das betrachtete Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ ein zusammenhängendes Netzwerk ohne Schleifen, ohne Mehrfachkanten und mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$ ist. Diese Eigenschaften werden für die folgende Argumentation nicht verwendet. Es werden nur die Inzidenzmatrizen Φ^+ und Φ^- sowie im allgemeinen Fall die Kantenintervalle $[a_j, b_j]$ als Informationen über das Netzwerk benötigt. Die Vorgehensweise wird anhand von stetigen stückweise affin linearen Ansatzfunktionen und linearen Diffusionsproblemen demonstriert.

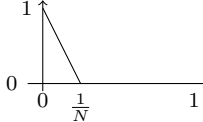
Es sei das eindimensionale stationäre Problem

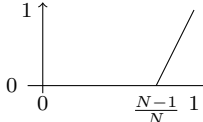
$$\begin{cases} -(cu')'(x) + e(x)u(x) = f(x) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

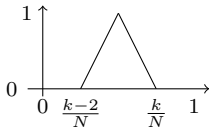
für $0 < c, e \in C[0, 1]$ als Beispiel auf $(0, 1)$ gegeben. Mit der zugehörigen schwachen Formulierung

$$\int_0^1 c(x)u'(x)w'(x) + e(x)u(x)w(x) dx = \int_0^1 f(x)w(x) dx \quad (8.2)$$

für alle $w \in H^1(0, 1)$ wird für $f \in H^{-1}(0, 1)$ eine Lösung $u \in H^1(0, 1)$ gesucht. Mit Hilfe der stetigen, stückweise affin linearen Funktionen mit Feinheit $\frac{1}{N}$ für $N \in \mathbb{N}$

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} 1 - Nx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{N}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$


$$\varphi_{N+1}(x) := \begin{cases} N(x - \frac{N-1}{N}) & \text{für } 1 - \frac{1}{N} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$


$$\varphi_k(x) := \begin{cases} N(x - \frac{k-2}{N}) & \text{für } \frac{k-2}{N} \leq x \leq \frac{k-1}{N}, \\ N(\frac{k}{N} - x) & \text{für } \frac{k-1}{N} < x \leq \frac{k}{N}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$


für $k = 2, \dots, N$ werden die Räume $S_N^1(0, 1) := \text{span}\{\varphi_k \mid k = 1, \dots, N+1\}$ definiert. Für ein festes N wird $S_N^1(0, 1)$ nun als Ansatz- und Testraum verwendet. Mit dem Ansatz

$$u^N(x) := \sum_{k=1}^{N+1} u_k \varphi_k(x)$$

für die Lösung und durch testen mit den Basisfunktionen φ_k ergibt sich aus (8.2) das diskrete Problem als ein lineares Gleichungssystem

$$A\mathbf{u}^N + M\mathbf{u}^N = \mathbf{b} \tag{8.3}$$

für den gesuchten Koeffizientenvektor $\mathbf{u}^N \in \mathbb{R}^{N+1}$. In diesem Beispiel (8.1) sind die Einträge der Steifheitsmatrix $A \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$, der Massematrix $M \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ und des Kraftvektors $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N+1}$ gegeben durch

$$A_{ij} := \int_0^1 c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx, \quad M_{ij} := \int_0^1 e(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad b_j := \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx.$$

Aus der Theorie der finiten Elemente ist bekannt, dass gilt

$$\text{clos}_{\|\cdot\|_{H^1}} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_N^1(0, 1) \right) = H^1(0, 1).$$

Bemerkung:

- Die Bücher [Bra13] und [Hac05] bieten gute und ausführliche Einführungen in die Theorie finiter Elemente für elliptische Probleme.

Sei nun ein entsprechendes Netzwerkproblem gegeben, das heißt, mit den Funktionen $0 < e_j, c_j \in C([0, 1])$ und $f_j \in (H^1(0, 1))^*$ wird

$$\begin{cases} -(c_j u_j')'(x) + e_j(x) u_j(x) = f_j(x) \text{ für alle } \alpha_j \in J \\ \text{(K0) für alle } v \in \Gamma_I \\ u'(v) = 0 \text{ für alle } v \in \Gamma_E = \Gamma_N \\ \text{(S1) für alle } v \in \Gamma \end{cases} \tag{8.4}$$

in einem Netzwerk $\mathfrak{N} = (\Gamma, J)$ mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$ betrachtet. Es werden also homogene Neumann-Randbedingungen, homogene Standard-Kirchhoff-Bedingungen und pro Knoten v die $\text{deg}(v) - 1$ essentiellen Stetigkeitsbedingungen (S1) gefordert. Nach Kapitel 2 ergibt sich als variationelle Formulierung

$$\sum_{j=1}^m \int_0^1 c_j(x) u_j'(x) w_j'(x) + e_j(x) u_j(x) w_j(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_0^1 f_j(x) w_j(x) dx$$

für alle $w \in V^{1,2}(\mathfrak{N})$. Nun kann man jede Kante $\alpha_j \in J$ nach dem obigen Prinzip mit den $N_j \in \mathbb{N}$ Funktionen

$$\varphi_k^j := \begin{cases} \varphi_k & \text{auf } \alpha_j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{für } k = 1, \dots, N_j + 1$$

diskretisieren. Mit den Diskretisierungsparametern N_j der Kanten werden

$$(N_1, \dots, N_m)^T =: \mathbf{N} \in \mathbb{N}^m, \quad L := \sum_{j=1}^m (N_j + 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_j := \left(\int_0^1 f_j(x) \varphi_k(x) dx \right)_{k=1}^{N_j}$$

definiert. Für den Ansatz- und Testraum

$$W_{\mathbf{N}} := \text{span}\{\varphi_k^j \mid j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, N_j + 1\}$$

ergibt sich zunächst ein entkoppeltes Problem für $\hat{\mathbf{u}}^L \in \mathbb{R}^L$

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_m) \hat{\mathbf{u}}^L + \text{diag}(M_1, \dots, M_m) \hat{\mathbf{u}}^L = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

mit den Matrizen

$$A_j := \left(\int_0^1 c_j(x) \varphi'_k(x) \varphi'_l(x) dx \right)_{k,l=1}^{N_j} \quad \text{und} \quad M_j := \left(\int_0^1 e_j(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx \right)_{k,l=1}^{N_j}.$$

Dieses entkoppelte Problem entspricht einem System von m Differentialgleichungen ohne Interaktion an den Knoten. Insbesondere können die Funktionen $\hat{u}^L \in W_{\mathbf{N}}$ die Stetigkeitsbedingungen verletzen, denn es gilt $W_{\mathbf{N}} \not\subset V^{1,2}(\mathfrak{N})$, da zum Beispiel die Funktion φ_1^j für eine Kante $\alpha_j = (v_k, v_l)$ für einen inneren Knoten v_k die Stetigkeitsbedingung in v_k verletzt. Um die Netzwerkstruktur und die $\deg(v) - 1$ essentiellen Stetigkeitsbedingungen pro Knoten v zu berücksichtigen, wird in dieser Arbeit der folgende Ansatz verfolgt.

Regel 1

Für jeden Knoten $v \in \Gamma$ werden die $\deg(v)$ Funktionen $\varphi_{k_i}^{j_i}$, $i = 1, \dots, \deg(v)$, mit der Eigenschaft $\varphi_{k_i}^{j_i}(v) = 1$ durch eine Funktion

$$\phi_v := \sum_{i=1}^{\deg(v)} \varphi_{k_i}^{j_i} \in C(\mathfrak{N})$$

ersetzt.

Die Anzahl der Testfunktionen wird also pro Knoten v um $\deg(v) - 1$ Freiheitsgrade reduziert. Somit erhält man

$$\mathcal{N} := \sum_{j=1}^m (N_j + 1) - \sum_{i=1}^n (\deg(v_i) - 1) = \sum_{j=1}^m (N_j - 1) + n$$

Funktionen, welche nun mit ψ_j bezeichnet werden und in $V^{1,2}(\mathfrak{N})$ liegen.

Lemma 8.1

Es gilt

$$W_{\mathbf{N}} \cap V^{1,2}(\mathfrak{N}) = S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N})$$

mit $S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N}) := \text{span}\{\psi_l \mid l = 1, \dots, \mathcal{N}\}$.

Beweis. Per Definition gilt $S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N}) \subset W_{\mathbf{N}}$ und $S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N}) \subset V^{1,2}(\mathfrak{N})$.

Sei nun $f \in W_{\mathbf{N}} \cap V^{1,2}(\mathfrak{N})$.

1. Fall Es gilt $f \in \text{span}\{\varphi_k^j \mid j = 1, \dots, m; k = 2, \dots, N_j\}$. Das heißt, für alle Knoten v besitzt keine der für Regel 1 relevanten verknüpften Funktionen einen Anteil an f . Daraus folgt $f \in S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N})$, da $\text{span}\{\varphi_k^j \mid j = 1, \dots, m; k = 2, \dots, N_j\} \subset S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N})$ gilt.

2. Fall Es gibt einen Knoten v und ein φ_k^j mit $\varphi_k^j(v) = 1$, sodass in der Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j+1} \lambda_k^j \varphi_k^j$$

$\lambda_k^j \neq 0$ gilt. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die inzidenten Kanten in v , $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \delta(v)$, alle ausgehende Kanten. Mit der Voraussetzung $f \in V^{1,2}(\mathfrak{N})$ ist f auf \mathfrak{N} stetig. Für jede Kante $\alpha_j \in \delta(v)$ gibt es eine Folge $(x_j^n)_n \subset (0, \frac{1}{N_j}) \subset \alpha_j$ mit $x_j^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Mit diesen Folgen gilt zunächst aufgrund der Stetigkeit von f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_j(x_j^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^j \varphi_1(x_j^n) = \lambda_1^j = P_v(f)$$

für alle $j = 1, \dots, l$. Somit folgt $\lambda_1^j = P_v(f)$ für alle φ_1^j und der Anteil

$$\sum_{j=1}^l \lambda_1^j \varphi_1^j = P_v(f) \sum_{j=1}^l \varphi_1^j$$

in der Darstellung von f lässt sich durch $P_v(f)\phi_v$ ersetzen. Dieses Argument gilt für alle Knoten v . Damit folgt die Aussage

$$W_{\mathbf{N}} \cap V^{1,2}(\mathfrak{N}) \subset S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N}).$$

□

Mit Lemma 8.1 folgt, dass die Räume $S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N})$ geeignete Ansatz- und Testräume für Finite-Elemente-Methoden auf dem Netzwerk \mathfrak{N} sind, denn es gilt

$$\begin{aligned} \text{clos}_{\|\cdot\|_{V^{1,2}}} \left(\bigcup_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^m} S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N}) \right) &= \text{clos}_{\|\cdot\|_{V^{1,2}}} \bigcup_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^m} (W_{\mathbf{N}} \cap V^{1,2}(\mathfrak{N})) \\ &= (\text{clos}_{\|\cdot\|_{V^{1,2}}} \bigcup_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^m} W_{\mathbf{N}}) \cap V^{1,2}(\mathfrak{N}) \\ &= \bigtimes_{j=1}^m H^1(0, 1) \cap V^{1,2}(\mathfrak{N}) = V^{1,2}(\mathfrak{N}). \end{aligned}$$

Das gekoppelte diskrete Netzwerkproblem

$$A\mathbf{u}^{\mathcal{N}} + M\mathbf{u}^{\mathcal{N}} = \mathbf{b}, \tag{8.6}$$

entsteht mit dem Ansatz

$$\mathbf{u}^{\mathcal{N}} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} u_j^{\mathcal{N}} \psi_j$$

und durch testen mit den Basisfunktionen $\psi_1, \dots, \psi_{\mathcal{N}}$. Mit Hilfe einer Kopplungsmatrix $K_{\mathbf{N}} \in \{0, 1\}^{\mathcal{N} \times L}$ lässt sich (8.6) aus dem entkoppelten Problem (8.5) gewinnen

$$A = K \text{diag}(A_1, \dots, A_m) K^T, \quad M = K \text{diag}(M_1, \dots, M_m) K^T, \quad \mathbf{b} = K \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Die Kopplungsmatrix hängt nur von Φ^+ , Φ^- und \mathbf{N} ab und es gilt

$$K \begin{pmatrix} \varphi_1^1 \\ \vdots \\ \varphi_{N_1+1}^1 \\ \vdots \\ \varphi_{N_m+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} \quad \text{für eine geeignete Nummerierung der } \psi_j .$$

Bemerkung:

- Je nach Netzwerkstruktur können einzelne Einträge von A relativ groß im Vergleich zu anderen Einträgen werden, sodass eine Gewichtung mit $\deg(v)^{-\frac{1}{2}}$ für die entsprechenden Zeilen der Kopplungsmatrix sinnvoll sein kann.
- Die Matrizen A und M besitzen keine Tridiagonalstruktur mehr, falls \mathfrak{N} innere Knoten besitzt, also eine echte Kopplung stattfindet.

Ein Vorteil der Kopplungsmatrix ist, dass, falls die Matrizen A_j zu den einzelnen Kantenproblemen bekannt sind, der Raum $S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N})$ nicht aufgestellt und die Matrizen A und M nicht neu berechnet werden müssen. Stattdessen genügt es die schwach besetzte Matrix $K_{\mathbf{N}}$ zu berechnen und die Multiplikationen in (8.7) durchzuführen.

Algorithm 1 Konstruktion von $K_{\mathbf{N}}$

```

1: function CONSTRUCTK( $\Phi^+, \Phi^-, (N_1, \dots, N_m)$ )
2:    $L := \sum_{j=1}^m (N_j + 1)$  ,  $\mathcal{N} := \sum_{j=1}^m (N_j - 1) + n$ 
3:    $K := 0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times L}$  ,  $c := 1$ 
4:   for  $j := 1$  to  $m$  do
5:      $i_1 :=$  row index of 1 in column  $\Phi_{\cdot,j}^-$ ,  $i_2 :=$  row index of 1 in column  $\Phi_{\cdot,j}^+$ 
6:      $l := \sum_{i=1}^{j-1} (N_i + 1)$ 
7:     if  $v_{i_1}$  is not yet labeled then
8:        $K(c, l + 1) := 1$ 
9:       label  $v_{i_1}$  with  $c$ ,  $c := c + 1$ 
10:    else
11:       $b :=$  label of  $v_{i_1}$ 
12:       $K(b, l + 1) := 1$ 
13:    for  $k = 2$  to  $N_j$  do
14:       $K(c, l + k) := 1$  ,  $c := c + 1$ 
15:    if  $v_{i_2}$  is not yet labeled then
16:       $K(c, l + N_j + 1) := 1$ 
17:      label  $v_{i_2}$  with  $c$ ,  $c := c + 1$ 
18:    else
19:       $b :=$  label of  $v_{i_2}$ 
20:       $K(b, l + N_j + 1) := 1$ 

```

In dem Algorithmus 1 werden nacheinander die Kanten von α_1 bis α_m durchlaufen. Von a_j zu b_j erhält jede Funktion φ_k^j eine neue Spalte in K . Die Funktionen φ_1^j und $\varphi_{N_j+1}^j$

erhalten nur dann eine neue Zeile, wenn es noch keine Funktion für den entsprechenden Knoten v gibt. Der Knoten v erhält den Zeilenindex als globalen Index, auch *label* genannt. Andernfalls wird die Funktion durch die 1 in der Zeile des globalen Index des Knotens v mit allen bisherigen Funktionen mit $\varphi_k^j(v) = 1$ verknüpft. Dieser Fall tritt $\deg(v) - 1$ mal pro Knoten v auf.

Bemerkung:

- Die Informationen von Φ^+ und Φ^- lassen sich stets aus $K_{\mathbf{N}}$ zurückgewinnen. Dies ist besonders einfach für $\mathbf{N} = (1, \dots, 1)^T$, da Φ^- aus den Spalten mit ungeradem Index und Φ^+ aus den Spalten mit dem geraden Index von $K_{\mathbf{N}}$ besteht.

Beispiele

In diesem Abschnitt werden die Konzepte aus dem vorherigen Abschnitt anhand von einfachen Beispielen veranschaulicht. Dabei seien, falls keine anderen Daten spezifiziert werden, stets die homogene Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, t) = f_j(x, t) = 0$$

pro Kante $\alpha_j \simeq [0, 1]$ mit reinen homogenen Neumann-Randbedingungen, $\Gamma_E = \Gamma_N$, Stetigkeitsbedingungen (S2) und homogenen Standard-Kirchhoff-Bedingungen gegeben. In den einzelnen Beispielen werden konkrete Netzwerke und Anfangswerte definiert. Für die Ortsdiskretisierung werden die Ansätze aus dem vorherigen Kapitel und für die Zeitdiskretisierung ein impliziter Euler-Ansatz mit Schrittweite $\tau > 0$ verwendet. Aus der variationellen Formulierung

$$\langle u'(t), w \rangle_{V^{1,2}} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t), \frac{dw}{dx} \right)_H = \langle F(t), w \rangle_{V^{1,2}} = 0$$

folgt mit der Zeitdiskretisierung das stationäre Problem

$$\left\langle \frac{u((k+1)\tau) - u(k\tau)}{\tau}, w \right\rangle_{V^{1,2}} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}((k+1)\tau), \frac{dw}{dx} \right)_H = \langle F((k+1)\tau), w \rangle_{V^{1,2}} = 0$$

für den k -ten Zeitschritt, $k = 0, \dots, k_{max} \in \mathbb{N}$. Mit $S_{\mathbf{N}}^1(\mathfrak{N})$ für $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^m$ und dem obigen Ansatz für eine Netzwerk Finite-Elemente-Methode ergibt sich für $k \geq 1$ das diskrete Problem

$$M\mathbf{u}_{k+1}^{\mathbf{N}} - M\mathbf{u}_k^{\mathbf{N}} + \tau A\mathbf{u}_{k+1}^{\mathbf{N}} = \tau \mathbf{b}_{k+1} = 0.$$

Die Matrizen A und M sind gegeben durch

$$A = K \text{diag}(A_1, \dots, A_m) K^T, \quad M = K \text{diag}(M_1, \dots, M_m) K^T,$$

mit den bekannten Matrizen

$$A_j = N_j \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_j = \frac{1}{6N_j} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

für $j = 1, \dots, m$. In der Gleichung

$$M\mathbf{u}_1^{\mathbf{N}} - \bar{\mathbf{u}}_0 + \tau A\mathbf{u}_1^{\mathbf{N}} = \tau \mathbf{b}_1 = 0$$

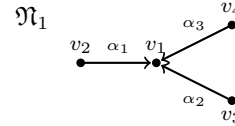
für $k = 0$ wird

$$\bar{\mathbf{u}}_0 = \begin{pmatrix} (u_0, \psi_1)_H \\ \vdots \\ (u_0, \psi_N)_H \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} (u_0, \varphi_1^1)_H \\ \vdots \\ (u_0, \varphi_{N_{m+1}}^m)_H \end{pmatrix}$$

benötigt. Die Ausdrücke $(u_0, \varphi_k^j)_H$ reduzieren sich auf ein Integral über eine Kante. Diese Integrale werden in den folgenden Beispielen mit einer simplen hinreichend feinen Trapezregel bestimmt, sodass diese Integrale in den Beispielen exakt sind.

Beispiel 3

Sei das Netzwerk $\mathfrak{N}_1 = (\Gamma_1, J_1)$ mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$, $\Gamma_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und $J_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ gegeben.



Für die grobe Diskretisierung mit $N_j = 2$, $j = 1, 2, 3$, ergibt sich zunächst entkoppelt pro Kante

$$A_j = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_j = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Kopplungsmatrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

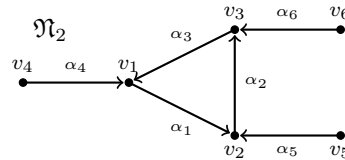
Die gekoppelten Netzwerkmatrizen besitzen keine Tridiagonalstruktur mehr

$$A = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 3 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & -1 & -1 & 2 \\ & & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 6 & 1 & 1 \\ & & & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 & 4 \\ & & & & 2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

◇

Beispiel 4

Sei das Netzwerk \mathfrak{N}_2 mit $\alpha_j \simeq [0, 1]$ und $u_0 := (0, 0, 0, 0, 1, 1)^T$ gegeben. Mit den Diskretisierungsparametern $N_j = 100$, $\tau = 0.005$ und dem obigen Konzept wurden mit MATLAB [MAT10] die folgenden Graphiken 8.1 erstellt.



Für die homogene Wärmeleitgleichung mit homogenen Standard-Kirchhoff-Bedingungen und homogenen Neumann-Randbedingungen in dem Netzwerk \mathfrak{N}_2 lässt sich bis auf zu erwartende Dissipation durch den impliziten Euler-Ansatz Energieerhaltung und das Streben zu einer Gleichverteilung beobachten. ◇

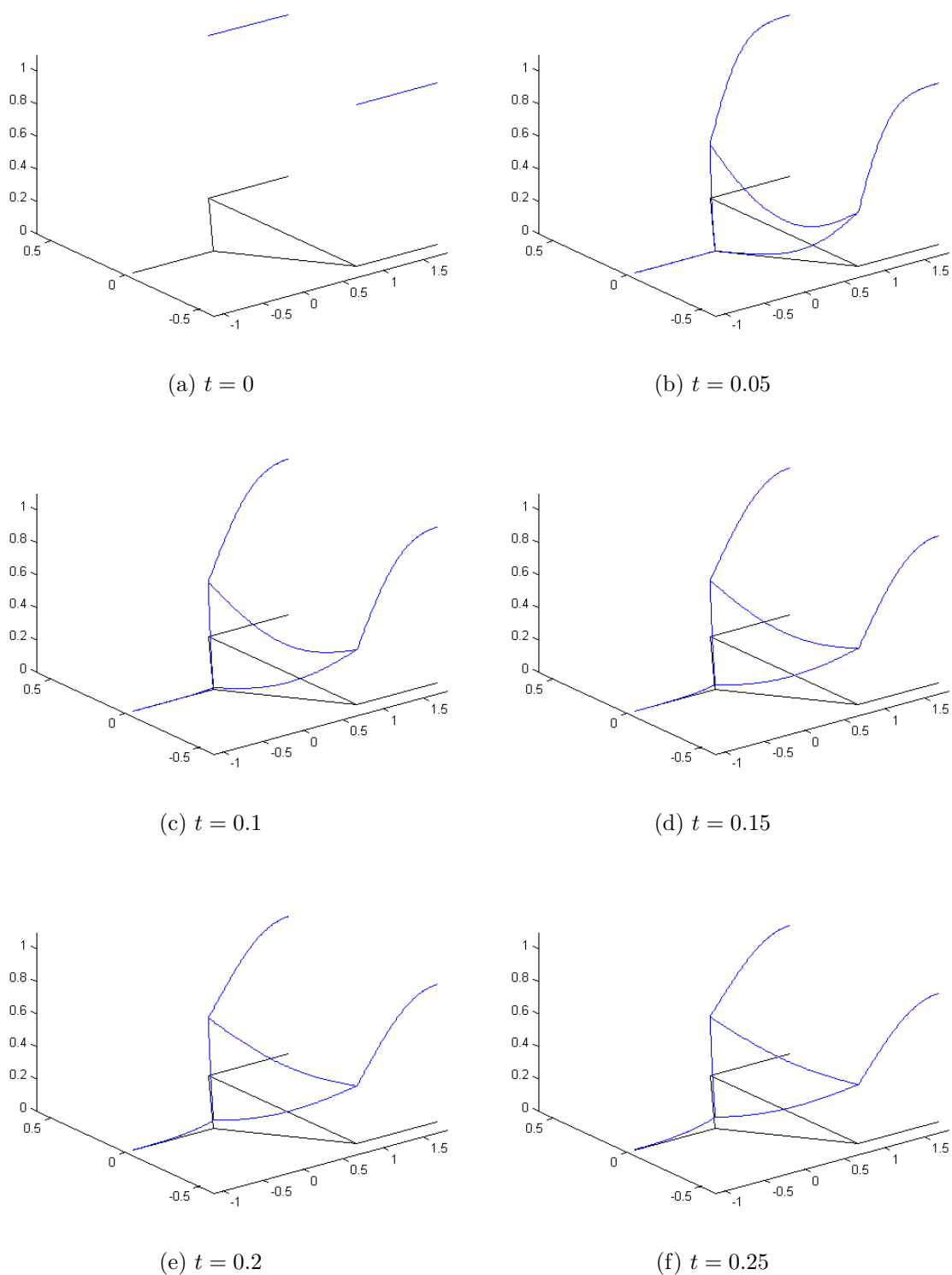


Abbildung 8.1: Näherungslösungen in \mathfrak{R}_2 aus Beispiel 4

Offene Probleme

Nach Algorithmus 1 ist der globale Index, das *label*, jedes Knotens $v \in \Gamma$ bekannt, sodass auch inhomogene Neumann- und inhomogene Kirchhoff-Bedingungen behandelt werden können, denn es gilt für $\psi_j \in S_{\mathcal{N}}^1(\mathfrak{N})$

$$h_v(t)\psi_j(v) = \begin{cases} h_v(t) & \text{falls } \psi_j = \phi_v, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Homogene Dirichlet-Randbedingungen können wie bei allgemeinen Finite-Elemente-Methoden durch die Reduktion der entsprechenden Freiheitsgrade umgesetzt werden. Allerdings ist nicht ohne Weiteres klar, wie die entsprechenden Regeln und Kopplungsmatrizen für Anti-Stetigkeitsbedingungen oder Ansatzfunktionen höherer Ordnung aussehen müssen.

In [EK16, Kap. 8] wird unter anderem ein Ansatz für finite Elemente für $\widehat{V}^{1,2}(\mathfrak{N})$ vorgestellt. Weiterhin werden in [EK16] einige nützliche Fehlerabschätzungen bewiesen, die sich vermutlich auf den hier präsentierten Ansatz übertragen lassen. Im Rahmen einer detaillierten Analyse, wie in [EK16], für den in diesem Kapitel vorgestellten Ansatz wäre es interessant, zu untersuchen, inwiefern die Darstellung mit Hilfe der Kopplungsmatrix auch für die numerische Analysis hilfreich sein kann.

9 Ausblick

In Kapitel 4 wurden auf einem Intervall wohlgestellte Probleme anhand einer Netzwerkstruktur so gekoppelt, dass sich die Eigenschaften der Operatoren $A_j(t)$ auf den Operator $A_0(t)$ übertragen. Dies war möglich, da die Stetigkeitsbedingungen in geeignete Funktionenräume für Netzwerke integriert wurden und die Kirchhoff-Bedingungen keine zusätzlichen Störungen in $A_0(t)$ erzeugt haben. Nun stellt sich die Frage, ob es andere sinnvolle Kopplungsbedingungen gibt, die sich ebenso gut verhalten. Neben den offenen Fragen und Problemen aus den Kapiteln 4 und 8 liegt es nun nahe, zu versuchen, andere Existenzsätze für Evolutionsgleichungen analog zu Kapitel 4 auf Netzwerkprobleme zu verallgemeinern. Es konnte im Rahmen dieser Arbeit keine Literatur zu nicht-lokalen Problemen in Netzwerken gefunden werden. Es wäre also interessant zu untersuchen, ob zum Beispiel einige Resultate aus [AVMRTM10] mit Hilfe der Fundamentallösung der Wärmeleitgleichung in Netzwerken aus [CC15] auf nicht-lokale Diffusionsgleichungen in Netzwerken erweitert werden können. Dabei könnte man zum Beispiel für jede Kante $\alpha_j \simeq [a_j, b_j]$ eines Netzwerks die nicht-lokale Gleichung

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) = \int_{a_j}^{b_j} K_j(x, y, t) u_j(y, t) dy - u_j(x, t)$$

betrachten oder auch Nichtlokalität bezüglich des gesamten Netzwerks. Damit ist gemeint, dass auch Informationen von anderen Kanten oder gar anderen Zusammenhangskomponenten verwendet werden. Dies könnte durch Gleichungen der Art

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, t) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} K_{ij}(x, y, t) u_i(y, t) dy - \lambda_i u_i(x, t)$$

beschrieben werden. Insbesondere kann untersucht werden, ob netzwerkspezifische Bedingungen an die Kerne $K_{ij} : \alpha_j \times \alpha_i \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ gestellt werden müssen. Neben den bereits erwähnten Verallgemeinerungen der Probleme in den Kanten sind auch komplexere Knotenbedingungen interessant. Mit Hinblick auf Anwendungen können Bedingungen von Interesse sein, welche nach Erreichen einer gewünschten Masse, Konzentration oder Energie auf einer Teilmenge der Kanten, einige Kanten aus dem Netzwerk entkoppeln, um zum Beispiel eine Überlastung oder Unterversorgung in diesen Abschnitten zu verhindern. Die Prozesse in den neuen Zusammenhangskomponenten können ungehindert weiterlaufen oder gestoppt werden. Ob und wie solche Bedingungen modelliert werden können, sodass ein wohlgestelltes Problem entsteht, ist noch völlig unklar. Ein erster Ansatz in diese Richtung ist in [BDKF13] zu finden. Für ein lineares Transportproblem, wie in Kapitel 6 betrachtet, wird in [BDKF13] die temporäre Verfügbarkeit von Kanten mit Hilfe der Knotenbedingungen

$$u_j(v_i, t) = \mu_{ij}(t) \sum_{\alpha_k \in \delta^+(v_i)} u_k(v, t) \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^m \mu_{ij}(t) = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \mu_{ij}(t) \leq 1$$

für alle v_i und $t \geq 0$ modelliert. Als eine Anwendung für diese Bedingungen mit periodischen Funktionen μ_{ij} wird in [BDKF13] der Flugverkehr über Städten mit einem Nachtflugverbot genannt.

In dieser Arbeit konnten Erhaltungsprobleme in Netzwerken leider nicht ausführlicher behandelt werden. Dies ist ein großes und aktives Forschungsgebiet. In dem Sonderforschungsbereich Transregio 154 wird unter anderem im Rahmen von Gastransport in Netzwerken auch zu diesem Thema geforscht. Die Theorie und Anwendungen in diesem Gebiet sind so umfangreich, dass sie problemlos mehrere Arbeiten und sogar Bücher füllen könnten. Ein Buch zu Systemen von Erhaltungsgleichungen in Netzwerken am Beispiel von Verkehrsflüssen gibt es bereits ([GP06]). Allerdings wäre auch ein weiteres Buch mit dem Fokus auf Gastransport, welches auch die anderen Ansätze neben der *wave-front tracking* Methode behandelt, von großem Nutzen.

Seit den ersten Arbeiten zu Differentialgleichungen in Netzwerken ist dieses Gebiet sowohl in die Breite als auch in die Tiefe expandiert. Die Forschung war, wie so oft, vor allem durch konkrete Anwendungen motiviert. Dies hat zu einer umfangreichen aber stark heterogenen Literatur geführt, was den Einstieg in dieses Thema erschwert.

Abschließend lässt sich feststellen, dass die erarbeiteten Resultate aus 2.2, 3.2 und 4.2 in ihrem Kern nicht unbedingt neu sind, aber durch ihre allgemeinen aber prägnanten Formulierungen und die Konvergenzaussagen zu Diskretisierungsverfahren zur vorhandenen Theorie beitragen.

A Anhang

A.1 Graphentheorie

In diesem Abschnitt werden elementare Begriffe der Graphentheorie definiert.

Definition A.1

Ein Tupel $(\Gamma, E) =: G$ mit einer Knotenmenge $\Gamma := \{v_1, \dots, v_n\}$, für $n \in \mathbb{N}$, und einer Kantenmenge $E := \{e_1, \dots, e_m \mid e_j = \{j_1, j_2\} \text{ mit } j_1, j_2 \in \Gamma\}$, für $m \in \mathbb{N}$, heißt **endlicher ungerichteter Graph**.

Ein endlicher ungerichteter Graph G kann durch eine **Adjazenz-Matrix** $\Psi_G \in \mathbb{N}^{n \times n}$ beschrieben werden

$$\Psi_G := [(\Psi_G)_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \text{ mit } (\Psi_G)_{ij} := \text{Anzahl der Kanten zwischen } v_i \text{ und } v_j .$$

Die Adjazenz-Matrix eines Graphen ist per Definition stets symmetrisch.

Definition A.2

Für einen Knoten $v \in \Gamma$ eines ungerichteten Graphen $G = (\Gamma, E)$ heißt

$$\delta(v) := \{e \in E \mid v \in e\}$$

die Menge der zu v inzidenten Kanten und $\deg(v) := |\delta(v)|$ der **Grad** von v .

Definition A.3

Ein Tupel $(\Gamma, J) =: D$ mit einer Knotenmenge $\Gamma := \{v_1, \dots, v_n\}$, für $n \in \mathbb{N}$, und einer Menge gerichteter Kanten $J := \{\alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \alpha_j = (j_1, j_2) \text{ mit } j_1, j_2 \in \Gamma\} \subset \Gamma \times \Gamma$, für $m \in \mathbb{N}$, heißt **endlicher gerichteter Graph** oder auch **Digraph**.

Jeder Digraph kann als Graph betrachtet werden, wenn die Orientierung der Kanten irrelevant ist.

Definition A.4

Eine Kante, gerichtet (v, v) oder ungerichtet $\{v, v\}$, mit gleichem Start und Endknoten heißt **Schleife** am Knoten $v \in \Gamma$.

Definition A.5

Ein (Di-)Graph heißt **zusammenhängend**, falls für alle $v, w \in \Gamma$ eine Verbindung aus ungerichteten Kanten existiert. Ein Digraph heißt **stark zusammenhängend**, falls zwischen je zwei Knoten v und w ein gerichteter Weg existiert.

Definition A.6

Für einen Graphen $G := (\Gamma, E)$ heißt ein Teilgraph $T := (\Gamma', F)$ mit $\Gamma' \subset \Gamma$ und $F \subset E$ **Zusammenhangskomponente** von G , falls T zusammenhängend ist und keine Kante aus $E \setminus F$ zu einem Knoten aus Γ' inzident ist.

Bemerkung:

- Jeder nicht zusammenhängende (Di-)Graph zerfällt in seine Zusammenhangskomponenten.

Definition A.7

Ein (Di-)Graph $G = (\Gamma, E)$ heißt **bipartit**, falls eine Partition $\Gamma = R \dot{\cup} B$ der Knoten existiert, sodass jede Kante $e \in E$ zu genau einem Knoten aus R und einem Knoten aus B inzident ist.

Definition A.8

Ein Knoten v heißt lokal endlich, falls $\deg(v) < \infty$ gilt. Ein (Di-)Graph heißt **lokal endlich**, falls alle Knoten v lokal endlich sind. Ein Graph heißt **gleichmäßig lokal endlich**, falls es ein $M > 0$ gibt mit $\deg(v) < M$ für alle $v \in \Gamma$.

Satz A.9

Ein Digraph $D := (\Gamma, J)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn die zugehörige Knoten-Kanten-Inzidenz-Matrix Φ irreduzibel ist.

Beweis. Diese Aussage stammt aus [Dor08]. □

Definition A.10

- (a) Ein Digraph $D := (\Gamma, J)$ mit zwei ausgezeichneten Knoten s und t sowie einer Kapazitätsfunktion $c : J \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Netzwerk** $N(D, c, s, t)$ mit der Quelle s und der Senke t .
- (b) Ein Graph $G := (\Gamma, E)$ mit Kantengewichten $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **metrischer Graph**, falls für alle Knoten $a, b, c \in \Gamma$ und die Funktion

$$d(a, b) := \text{Länge des kürzesten Weges von } a \text{ zu } b \text{ bzgl. der Kantenlängen } w(e)$$

die Abschätzung

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

gilt.

- (c) Ein Graph $G(t) := (\Gamma(t), E(t))$, dessen Struktur wie Knoten und Kanten sowie Eigenschaften wie Gewichte sich mit der Zeit ändern können, heißt **dynamischer Graph**.

Definition A.11

Ein (Di-)Graph $G := (\Gamma, E)$ heißt **sternförmig** oder auch **Sterngraph**, falls es genau einen ausgezeichneten Knoten v mit $\deg(v) = m$ gibt und für alle anderen Knoten w $\deg(w) = 1$ gilt.

A.2 Funktionalanalysis

Definition A.12

Ein normierter Vektorraum X heißt **eingebettet** in den normierten Vektorraum Y , falls es eine injektive Abbildung $j : X \rightarrow Y$ mit $j(x) = x$ gibt. Ist j stetig, so heißt X **stetig eingebettet** in Y (symbolisch $X \hookrightarrow Y$). Ist $j(X)$ dicht in Y , so heißt X **dicht in Y eingebettet** ($X \xrightarrow{d} Y$). Besitzt für jede in X beschränkte Folge $(x^n)_n$ die Folge $(j(x^n))_n$ eine in Y konvergente Teilfolge, dann heißt X **kompakt eingebettet** in Y ($X \xrightarrow{c} Y$).

Satz A.13 Eberlein-Šmulian

In einem reflexiven Banach-Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis. [Wer07, S.107 f.] und [Sch13, S.77]. □

Definition A.14

Sei V ein reeller Banach-Raum. Eine höchstens abzählbare Folge $(w^n)_n \subset V$, von denen je endlich viele w^n linear unabhängig sind, mit der Eigenschaft

$$V^N := \text{span}\{w^1, \dots, w^N\} \quad V = \text{clos}_{\|\cdot\|_V} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} V^N$$

heißt **Galerkin Basis** von V .

Definition A.15

Für einen reellen Banach-Raum V heißt ein Operator $A : V \rightarrow V^*$ **monoton**, falls für alle $u, w \in V$

$$\langle Au - Aw, u - w \rangle_V \geq 0$$

gilt. Weiterhin heißt A **hemistetig**, falls die Abbildung

$$s \mapsto \langle A(u + sv), w \rangle_V$$

für alle $u, v, w \in V$ auf $[0, 1] \ni s$ stetig ist.

Satz A.16

Eine Funktion $f : (a, b) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ sei für jedes feste $t \in (0, T)$ integrierbar auf (a, b) und für jedes feste $x \in (a, b)$ differenzierbar bezüglich t in $(0, T)$. Weiterhin gebe es eine integrierbare Funktion $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq h(x) \text{ für alle } (x, t) \in (a, b) \times (0, T).$$

Dann ist für jedes feste $t \in (0, T)$ die Funktion

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

über (a, b) integrierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Beweis. Dieser Satz folgt aus der allgemeineren Variante in [For11, S. 123]. □

Es sei α ein Multiindex mit folgenden Konventionen

$$\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N, \quad |\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\alpha_N} \text{ für } x \in \mathbb{R}^N, \quad \partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definition A.17 Sobolew-Räume

Für $m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$, $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$ ist der **Sobolew-Raum** $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ definiert als der Raum aller Funktionen $v \in L^p(\Omega; \mathbb{C})$, deren schwache partielle Ableitungen $\partial^\alpha v$ für alle Multiindizes α mit $0 \leq |\alpha| \leq m$ auch in $L^p(\Omega; \mathbb{C})$ liegen. Dieser Raum wird ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Der Fall $|\alpha| = 0$ bezeichnet dabei die Funktion selbst und analog $m = 0$ den entsprechenden L^p -Raum. Weiterhin sind für $1 \leq p < \infty$ die Sobolew-Räume $W_0^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ als den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ definiert.

Satz A.18 Eigenschaften von Sobolew-Räumen

Die Sobolew-Räume $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ sind, versehen mit den entsprechenden Normen

$$\|f\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

separable Banach-Räume. Diese sind für $1 < p < \infty$ reflexiv.

Die Räume $H^m(\Omega; \mathbb{C}) := W^{m,2}(\Omega; \mathbb{C})$ sind Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt:

$$(u, v)_{H^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \cdot \partial^\alpha v \, dx \quad \text{für alle } u, v \in H^m(\Omega; \mathbb{C}).$$

Beweis. [AF03, Kap.3]. □

Satz A.19 Rellich

Die Räume $H^1(a, b)$ und $H_0^1(a, b)$ sind kompakt in $L^2(a, b)$ und $C[a, b]$ eingebettet und liegen dicht in $L^2(0, 1)$.

Beweis. Ein Beweis dieser Aussage steht in [Emm04, S.77-79] oder auch in [AF03]. □

Halbgruppen In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften von Operatoren und Halbgruppen definiert. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum und $A : D(A) \rightarrow X$ ein Operator mit dem Definitionsbereich $D(A) \subset X$. Die folgenden Definitionen sind soweit wie möglich aus [Paz83] oder [Ouh05] übernommen.

Definition A.20

Eine einparametrische Familie $(S(t))_t, 0 \leq t < \infty$, von beschränkten linearen Operatoren $S(t) : X \rightarrow X$ heißt **Halbgruppe** von beschränkten linearen Operatoren auf X falls $S(0) = Id_X$ und $S(s+t) = S(s)S(t)$ für alle $s, t \geq 0$ gilt.

Ein Operator A mit dem Definitionsbereich $D(A)$ heißt **infinitesimaler Generator** der Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$, falls

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existiert} \right\}$$

und

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \text{für alle } x \in D(A)$$

gilt.

Definition A.21

Ein linearer Operator A heißt **dissipativ**, falls es für alle $u \in D(A)$ ein $\phi \in X^*$ gibt mit $\langle \phi, u \rangle_X = \|u\|_X^2 = \|\phi\|_{X^*}^2$ und

$$\operatorname{Re} \langle \phi, Au \rangle_X \leq 0.$$

Definition A.22

Eine Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ heißt **stark stetig** oder auch C^0 Halbgruppe, falls

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x$$

für alle $x \in X$ gilt.

Definition A.23

Eine C^0 Halbgruppe heißt **kontraktiv**, falls $\|S(t)\|_{L(X)} \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Definition A.24

Eine C^0 Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ heißt **kompakt**, falls $S(t)$ für alle $t > 0$ ein kompakter Operator ist.

Definition A.25

Eine Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ heißt **analytisch mit Winkel** $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}]$, falls es eine analytische Erweiterung $(S(z))_{z \in Z(\phi)}$ mit

$$Z(\phi) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(z)| < \phi\}$$

gibt, sodass $(S(z))_{z \in Z(\theta)}$ für alle $\theta \in (0, \phi)$ gleichmäßig beschränkt und stark stetig ist.

Definition A.26

Sei (Ω, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Seien für $L^2(\Omega, \mu; \mathbb{C})$

$$H_{\mathbb{R}} := L^2(\Omega, \mu; \mathbb{R})$$

die Menge der reellwertigen Funktionen und

$$H^+ := \{f \in L^2(\Omega, \mu; \mathbb{C}) \mid f \geq 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}$$

der Kegel der nicht-negativen Funktionen. Eine C^0 -Halbgruppe $S(t)$ heißt **reell**, falls $T(t)$ für alle $t \geq 0$ $H_{\mathbb{R}}$ invariant lässt, das heißt, es gilt $T(t)H_{\mathbb{R}} \subset H_{\mathbb{R}}$ für alle $t \geq 0$. Eine C^0 -Halbgruppe heißt **positiv**, falls $T(t)H^+ \subset H^+$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Literaturverzeichnis

- [ABHN01] ARENDT, W. ; BATTY, C.J.K. ; HIEBER, M. ; NEUBRANDER, F.: *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhäuser, 2001
- [ADKF14] ARENDT, W. ; DIER, D. ; KRAMAR FIJAVŽ, M.: Diffusion in Networks with Time-Dependent Transmission Conditions. In: *Applied Mathematics & Optimization* 69(2) (2014), S. p.315–336
- [ADO13] ARENDT, W. ; DIER, D. ; OUHABAZ, E.: Invariance of Convex Sets for Non-Autonomous Evolution Equations Governed by Forms. (2013)
- [AF03] ADAMS, Robert A. ; FOURNIER, John J.: *Sobolev Spaces*. Second Edition. Elsevier Ltd., 2003
- [AGG⁺86] ARENDT, W. ; GRABOSCH, A. ; GREINER, G. ; MOUSTAKAS, U. ; NAGEL, R. ; SCHLOTTERBECK, U. ; U., Groh ; LOTZ, H. ; NEUBRANDER, F. ; NAGEL, R. (Hrsg.): *One-parameter Semigroups of Positive Operators*. Springer-Verlag, 1986
- [AM86] ALI MEHMETI, F.: A Characterization of a Generalized C^∞ Notion on Nets. In: *Integral Equations and Operator Theory* 9 (1986), S. 753–766
- [AM94] ALI MEHMETI, F.: *Nonlinear Waves*. Bd. 1. Akademie-Verlag, 1994
- [AMN93] ALI MEHMETI, F. ; NICAISE, S.: Nonlinear Interaction Problems. In: *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 20 (1993), S. 27–61
- [AVMRTM10] ANDREU-VAILLO, F. ; MAZÓN, J. ; ROSSI, J. D. ; TOLEDO-MELERO, J.: *Nonlocal Diffusion Problems*. AMS RSME, 2010
- [BBD⁺13] BECCHETTI, L. ; BONIFACI, V. ; DIRNBERGER, M. ; KARRENBAUER, A. ; MEHLHORN, K.: Physarum Can Compute Shortest Paths: Convergence Proofs and Complex Bounds. In: *Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Computer Science* 7966 (2013), S. 472–483
- [BC16] BASTIN, G. ; CORON, J.-M.: *Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems*. Springer-Verlag, 2016
- [BCG⁺14] BRESSAN, A. ; CANIĆ, S. ; GARAVELLO, M. ; HERTY, M. ; PICOLLI, B.: Flows on networks: recent results and perspectives. In: *EMS Surveys in Mathematical Sciences* 1(1) (2014), S. 47–111
- [BDKF13] BAYAZIT, F. ; DORN, B. ; KRAMAR FIJAVZ, M.: Asymptotic Periodicity of Flows in Time-Depending Networks. In: *Networks and Heterogeneous Media* 8 (2013), S. 843–855
- [Bel85] BELOW, J. von: A characteristic equation associated to an Eigenvalue Problem on C^2 -networks. In: *Linear Algebra and its Applications* 71 (1985), S. 309–325
- [Bel88] BELOW, J. von: Classical Solvability of Linear Parabolic Equations on Networks. In: *Journal of Differential Equations* 72 (1988), S. 316–337
- [BHK06] BANDA, M. K. ; HERTY, M. ; KLAR, A.: Coupling Conditions for Gas Networks Governed by the Isothermal Euler Equations. In: *AIMS Journals* 1(2) (2006), S. 295–314
- [BM13] BELOW, J. von ; MUGNOLO, D.: The spectrum of the hilbert space valued second derivative with general self-adjoint boundary conditions. In: *Lin. Alg. Appl.* 439 (2013), S. 1792–1814

- [BNP07] BRETTI, G. ; NATALNI, R. ; PICCOLI, B.: Numerical algorithms for simulation of a traffic model on road networks. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 210 (2007), S. 71–77
- [Bra13] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, 2013
- [Bre71] BREZIS, H.: Monotonicity Methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations. In: *Contributions to Nonlinear Functional Analysis* (1971), S. 101–156
- [Bre11] BREZIS, Haim: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 2011
- [Car08] CARDANOBILO, S.: *Diffusion Systems and Heat Equations on Networks*. arXiv:0807.2362v1, Universität Ulm, Preprint, 2008. arxiv.org/abs/0807.2362
- [CC15] CAMILLI, F. ; CORRIAS, L.: Parabolic Models for Chemotaxis on Weighted Networks. (2015). arxiv.org/abs/1511.07279
- [CF03] CATTANEO, C. ; FONTANA, L.: D'Alembert formula on finite one-dimensional networks. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 284 (2003), S. 403–424
- [CG06] COLOMBO, R. M. ; GARAVELLO, M.: A well posed Riemann problem for the p -system at a junction. In: *Netw. Heterog. Media* 3 (2006), S. 495–511
- [Daf10] DAFERMOS, C.M.: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer-Verlag, 2010
- [Dav89] DAVIES, E.B.: *Heat Kernels and Spectral Theory*. Cambridge University Press, 1989
- [Dor08] DORN, B.: *Flows in infinite networks - a semigroup approach*, Eberhard Karls Universität Tübingen, Diss., 2008. citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?rep=rep1&type=pdf&doi=10.1.1.214.9986
- [EDLL14] ELMOATAZ, A. ; DESQUESNES, X. ; LAHKDARI, Z. ; LEZORAY, O.: Nonlocal infinity Laplacian equation on graphs with applications in image processing and machine learning. In: *Mathematics and Computers* 102 (2014), S. 153–163
- [Egg16] EGGER, H.: A Robust conservative mixed finite element method for compressible flow on pipe networks. (2016). arxiv.org/pdf/1609.04988
- [EK16] EGGER, H. ; KUGLER, T.: Damped Wave Systems on Networks: Exponential Stability and uniform Approximations. (2016). arxiv.org/pdf/1605.03066.pdf
- [Emm04] EMMRICH, Etienne: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. 1. Auflage. Vieweg, 2004
- [ET10] EMMRICH, E. ; THALHAMMER, M.: Convergence of a time discretisation for doubly nonlinear evolution equations of second order. In: *Foundations of Computational Mathematics* 10 (2010)
- [For11] FORSTER, Otto: *Analysis 3*. 6. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, 2011
- [Gar10] GARAVELLO, M.: A Review of Conservation Laws on Networks. In: *AIMS Journals* 5(3) (2010), S. 565–581
- [GDL11] GUGAT, M. ; DICK, M. ; LEUGERING, G.: Gas Flow in Fan-shaped Networks: Classical Solutions and Feedback Stabilization. In: *Siam Journal Control Optim.* 49(5) (2011), S. p.2101–2117
- [GGZ74] GAJEWSKI, Herbert ; GRÖGER, Konrad ; ZACHARIAS, Klaus: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, 1974
- [GH11] GUGAT, M. ; HERTY, M.: Existence of Classical Solutions and Feedback Stabilization for the Flow in Gas Networks. In: *SAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 17 (2011), S. p.28–51

- [GHK⁺12] GUGAT, M. ; HERTY, M ; KLAR, A. ; LEUGERING, G. ; SCHLEPER, V.: Well-Posedness of Networked Hyperbolic Systems of Balance Laws. In: *International Series of Numerical Mathematics* 160 (2012), S. p.123–146
- [GN15] GUARGUAGLINI, F.R. ; NATALNI, R.: Global Smooth Solutions for a Hyperbolic Chemotaxis Model on a Network. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 47(6) (2015), S. 4652–4671
- [GP06] GARAVELLO, M. ; PICCOLI, B.: *Traffic Flows on Networks*. AIMS, 2006
- [Hac05] HACKBUSCH, W.: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, 2005
- [Kat76] KATO, T.: Linear and Quasilinear Equations of Evolution of Hyperbolic Type. In: *C.I.M.E. II ciclo* (1976), S. 125–191
- [KFMS07] KRAMAR FIJAVŽ, M. ; MUNGOLO, D. ; SIKOLYA, E.: Variational and Semigroup Methods for Waves and Diffusion in Networks. In: *Applied Mathematics & Optimization* (55) (2007), S. p.219–240
- [Kra05] KRAMAR, M.: Spectral properties and asymptotic periodicity of flows in networks. In: *Math. Z.* 249 (2005), S. 139–162
- [Kuc08] KUCHMENT, P.: Quantum Graph: An Introduction and Brief Survey. (2008)
- [LLS94] LAGNESE, J.E. ; LEUGERING, G. ; SCHMIDT, E.: *Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures*. Birkhäuser, 1994
- [LS02] LEUGERING, G. ; SCHMIDT, E.: On the model and stabilization of flows in networks of open canals. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 41(1) (2002), S. 164–180
- [LS12] LEUGERING, G. ; SCHMIDT, E.: On Exact Control of Networks of Nonlinear Elastic Strings in 3-Dimensional Space. In: *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 33B (2012), S. p.33–60
- [Lum80] LUMER, G.: Connecting of Local Operators and Evolution Equations on Networks. In: *Potential Theory (Proc. Copenhagen 1979)* (1980), S. 230–243
- [MAT10] MATLAB: *version 7.12.0 (R2010a)*. The MathWorks Inc., 2010 mathworks.com
- [MOS13] MANFREDI, J.J. ; OBERMAN, A.M. ; SVIRIDOV, A.P.: Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and p-Harmonic Functions on Graphs. (2013). arxiv.org/pdf/1212.0834.pdf
- [Mug10] MUGNOLO, D.: *Parabolic systems and evolution equations on networks*, Universität Ulm, Zusammenfassung der Habilitation, 2010
- [Mug14] MUGNOLO, D.: *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks*. Springer-Verlag, 2014
- [Nic87] NICAISE, S.: Spectre des Réseaux Topologiques Finis. In: *Bulletin Science Mathématique* 111 (1987), S. 401–413
- [NV07] NICAISE, S. ; VALEIN, J.: Stabilization of the Wave Equation on 1-d Networks with a Delay Term in the Nodal Feedbacks. In: *Networks and Heterogeneous Media* 2(3) (2007), S. 425–478 (electronic)
- [Ouh05] OUHABAZ, E.: *Analysis of Heat Equations on Domains*. Princeton University Press, 2005
- [Paz83] PAZY, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1983
- [Rot84] ROTH, J.-P.: Le spectre du Laplacien sur un graphe. In: *Theorie du Potentiel (Proc. Orsay 1983), Lect. Notes in Math.* (1984), S. 521–539

- [Sch99] SCHAEFER, H. H.: *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, 1999
- [Sch13] SCHWEIZER, Ben: *Partielle Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, 2013
- [Sol67] SOLONNIKOV, V.A.: On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form. In: *Amer. Math. Soc.* (1967)
- [TRR16] TRR154: Dokumentserver des Sonderforschungsbereichs Transregio 154. (28.11.2016). <http://opus4.kobv.de/opus4-trr154/home>
- [VZ09] VALEIN, J. ; ZUAZUA, E.: Stabilization of the wave equation on 1-d networks. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 44(4) (2009), S. 2771–2797
- [Wer07] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 6. Auflage. Springer-Verlag, 2007
- [Zei90a] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Application IIA*. Springer-Verlag, 1990
- [Zei90b] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications IIB*. Springer-Verlag, 1990
- [Zua11] ZUAZUA, E.: Switching Control. In: *J.Eur.Math.Soc.* 13 (2011), S. 85–117
- [Zua12] ZUAZUA, E.: Control and Stabilization of Waves on 1-d Networks. In: *Modeling and Optimisation of Flows on Networks* 2062 Lecture Notes in Mathematics (2012), S. 463–493