Die Einzigkeitsaussage von W.F. Osgood

29. Juli 2012

Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik,

Seminar Angewandte Analysis im Sommersemester 2010

bei Professor Dr. Etienne Emmrich,

bearbeitet von Dac Nguyen und Gero Schnücke.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Jahr 1898 hat der amerikanische Mathematiker William Fogg Osgood[1] in dem Aufsatz [4] *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung* eine Möglichkeit vorgestellt, die Einzigkeit einer Lösung für eine gewöhnlichen Differentialgleichung, ohne die Lipschitz-Bedingung zu Hilfe zu nehmen, zu gewährleisten. Der in diesem Aufsatz von Osgood erbrachte Beweis beschränkt sich auf die reellen Zahlen. In dem Buch von Agarwal und Lakshmikantham [1] werden die Resultate von Osgood auf reelle Banach-Räume ausgeweitet.
In dieser Ausarbeitung wird die von Osgood 1898 bewiesene Einzigkeitsaussage vorgestellt. Es werden Osgoods Beweis von 1898 sowie ein Beweis aus dem Buch von Agarwal und Lakshmikantham [1] für reelle Banach-Räume aufgezeigt.
Darüber hinaus werden die wichtigsten Resultate aus dem 2003 in den *Mathematischen Nachrichten* erschienenen Aufsatz [5] *On Osgood theorem in Banach spaces* von Stanislav Shkarin[2] geschildert. In Shkarins Arbeit werden reelle Banach-Räume, die einen Unterbanach-Raum mit einer Schauder-Basis enthalten, betrachtet. Des Weiteren sollte der Unterbanach-Raum komplemtiert sein. Shkarin hat in seiner Arbeit die Voraussetzungen der Einzigkeitsaussage von Osgood soweit abgeschwächt, dass eine gewöhnliche Differentialgleichungen auf diesen Banach-Räumen keine Lösung mehr besitzt. Insbesondere kann es gewöhnliche Differentialgleichungen mit einer hölderstetigen rechten Seite geben, die unlösbar sind.

1.1 Das Anfangswertproblem

Seien $R, T \in [0, +\infty[$, $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum, $y_0 \in X$, $\overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|} \subseteq X$ und $f : [0, T] \times \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|} \to \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$ eine stetige Funktion. In der vorliegenden Arbeit werden wir das folgende Anfangswertproblem (AWP) betrachtet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \text{für alle t} \in [0, \mathrm{T}] \\ y(t_0) = y_0, & \text{für ein } t_0 \in [0, T]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Definition 1.1. Sei $\delta > 0$ und $\mathcal{I} = [0, T] \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ein Intervall. Dann heißt eine stetig differenzierbare Funktion $y : \mathcal{I} \to \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$ ganau dann Lösung des AWPs (1.1), auf den Intervall $\mathcal{I}$, wenn die Gleichungen $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in \mathcal{I}$ und $y(t_0) = 0$ erfüllt sind.

[1] William Fogg Osgood wurde am 10.03.1864 in Boston geboren. Er promovierte 1886 in Harvard, forschte von 1887 bis 1890 an den Universitäten Göttingen und Erlangen und wurde 1903 zum Professor der Mathematik in Harvard ernannt. Harvard blieb er auch nach seiner Emeritierung 1933 verbunden. Von 1903 bis 1904 war Osgood Präsident der amerikanischen mathematischen Gesellschaft. 1904 wurde er in die nationale Akademie der Wissenschaften aufgenommen. Seine Forschungsschwerpunkte waren (in Auswahl): Komplexe Analysis, Variationsrechnung, analytische Funktionen und Osgood-Kurven. Am 22.07.1943 starb Osgood im Alter von 79 Jahren.

[2] Stanislav Shkarin arbeitet (Stand: Mai 2010) an der Queen's University Belfast in den Bereichen Operator Theorie, Spektral Theorie, starke Formen der Zyklizität, unendlich dimensionale Analysis, gewöhnliche Differentialgleichungen in unendlich dimensionalen Räumen, Existenzsätze für glatte und stetige Funktionen, Topologie und Geometrie in unendlich dimensionalen Räumen, dynamische Systeme sowie Spektralanalysis von Frobenius-Perron Operatoren auf chaotischen Mengen.

Gemäß den verallgemeinerten Satz von Peano (vergleiche Zeidler [S.81-82]) besitzt das AWP (1.1) mindestens eine Lösung, wenn die rechte Seite f kompakt und beschränkt ist. Ist X ein endlichdimensionaler Raum besitzt das AWP (1.1) nach den Satz von Peano (vergleiche Werner [7, S.190-191] oder Zeidler [8, S.81-82]) mindestens eine Lösung, wenn die rechte Seite f stetig ist. Der Satz von Picard-Lindelöf (vergleiche Emmrich [3, S.169-171] oder Zeidler [8, S.78-81]) liefert genau eine Lösung für das AWP, wenn die Funktion $f : [0,T] \times \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|} \to \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$ eine Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument erfüllt. Dass heißt, es gibt eine Konstante $L \in [0, +\infty[$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und für alle $x, y \in \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$ die Bedingung

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x-y\|$$

gilt.

In der vorliegenden Arbeit genüge die rechte Seite f anstelle der Lipschitz-Bedingung der folgenden Relation. Es existiert eine stetige Funktion $\omega : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und für alle $x, y \in \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$ gilt

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega(\|x-y\|)\,.$$

Eine rechte Seite, die der obigen Bedingung genügt, bildet das Fundament für die Einzigkeitsaussage von Osgood.

2 Die Einzigkeitsaussage von W.F. Osgood

In diesem Abschnitt werden wir die von Osgood 1898 in [4] bewiesene Einzigkeitsaussage und die Verallgemeinerung der Einzigkeitsaussage für reelle Banach-Räume betrachten.

2.1 Die Einzigkeitsaussage von Osgood von 1898

Theorem 2.1. *Seien* $T, R \in [0,+\infty[$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \times [y_0 - R, y_0 + R] \to [y_0 - R, y_0 + R]$ *eine stetige Funktion. Des Weiteren sei* $\omega : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ *für alle* $t \in]0,+\infty[$ *und*

$$\int_0^{\vartheta} \frac{1}{\omega(t)}\,dt = +\infty, \text{ für alle } \vartheta \in]0,+\infty[\,. \tag{2.1}$$

Ferner gelte für alle $t \in [0,T]$ *und für alle* $x, y \in [y_0 - R, y_0 + R]$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \omega(|x-y|)\,.$$

Es sei $\delta > 0$ *und* $\mathcal{I}_\delta := [0,T] \cap [t_0 + \delta, t_0 - \delta]$ *ein Intervall, so dass das AWP* (1.1) *auf den Intervall* $\mathcal{I}_\delta$ *mindestens eine Lösung besitze. Dann ist die Lösung für das AWP* (1.1) *auf den Intervall* $\mathcal{I}_\delta$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $y_1, y_2 : \mathcal{I}_\delta \to [y_0 - R, y_0 + R]$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, die den AWP (1.1) genügen. Angenommen, es gibt ein $\bar{t} \in \mathcal{I}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $y_1(t) \neq y_2(t)$ für jedes $t \in \left[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon\right] \cap \mathcal{I}_\delta$ ist.

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{array}{rcl} u : \mathcal{I}_\delta & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & u(t) = |y_1(t) - y_2(t)|\,. \end{array}$$

Für die Hilfsfunktion u und für alle $t \in \mathcal{I}_\delta$ gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left|\frac{u(t)-u(t-h)}{h}-|y_1'(t)-y_2'(t)|\right| \\
=\;&\lim_{h\to 0}\left|\frac{|y_1(t)-y_2(t)|-|y_1(t-h)-y_2(t-h)|}{h}-|y_1'(t)-y_2'(t)|\right| \\
\le\;&\lim_{h\to 0}\left|\left|\frac{y_1(t)-y_1(t-h)}{h}-\left(\frac{y_2(t)-y_2(t-h)}{h}\right)\right|-|y_1'(t)-y_2'(t)|\right|=0.
\end{aligned}$$

Folglich gilt für alle $t \in \mathcal{I}_\delta$

$$u'(t)=|y_1'(t)-y_2'(t)|\,. \tag{2.2}$$

Fall 1.) Es ist $\bar{t} \in \mathcal{I}_\delta$ mit $0 \le t_0 \le \bar{t}$.
Dann gibt es ein $\widehat{t} := \sup\left\{t \in \left[t_0, \bar{t}\right[\mid u(t)=0\right\}$. Also ist $u(t)>0$ für jedes $t \in \left]\widehat{t},\bar{t}\right]$ und $u(t)=0$ für alle $t \in \left[t_0,\hat{t}\right]$. Nun erhalten wir mit der Relation (2.2) für alle $t \in \left]\widehat{t},\bar{t}\right]$ die Abschätzung

$$|u'(t)|=|y_1'(t)-y_2'(t)|=|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|\le\omega(|y_1(t)-y_2(t)|)=\omega(u(t))\,.$$

Umformen liefert für alle $t \in \left]\widehat{t},\bar{t}\right]$ die Ungleichung

$$\frac{|u'(t)|}{\omega(u(t))}\le 1. \tag{2.3}$$

Sei $\alpha>0$ beliebig, so dass $\left(\widehat{t}+\alpha\right) \in \left]\widehat{t},\bar{t}\right]$ ist. Dann liefert eine Integration der Ungleichung (2.3) über $\left(\widehat{t}+\alpha\right)$ sowie $\bar{t}$ und die Substitution $x=u(t)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\int_{u(\widehat{t}+\alpha)}^{u(\bar{t})}\frac{1}{\omega(x)}dx\right| &= \left|\int_{(\widehat{t}+\alpha)}^{\bar{t}}\frac{u'(t)}{\omega(u(t))}dt\right|\le\int_{(\widehat{t}+\alpha)}^{\bar{t}}\frac{|u'(t)|}{\omega(u(t))}dt \\
&\le \int_{(\widehat{t}+\alpha)}^{\bar{t}}1dt=\left(\bar{t}-\widehat{t}-\alpha\right)\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow}\left(\bar{t}-\widehat{t}\right)<+\infty.
\end{aligned}$$

Mit der Gleichung (2.1) erhalten wir den Widerspruch

$$\left|\int_{u(\widehat{t}+\alpha)}^{u(\bar{t})}\frac{1}{\omega(x)}dx\right|\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow}\left|\int_{u(\widehat{t})}^{u(\bar{t})}\frac{1}{\omega(x)}dx\right|=\left|\int_0^{u(\bar{t})}\frac{1}{\omega(x)}dx\right|=+\infty.$$

Fall 2.) Es ist $\bar{t} \in \mathcal{I}_\delta$ mit $0 \le \bar{t} \le t_0$.
Dann gibt es ein $\widehat{t} := \inf\left\{t \in \left]\bar{t}, t_0\right] \mid u(t)=0\right\}$. Also ist $u(t)>0$ für jedes $t \in \left[\bar{t},\widehat{t}\right[$ und $u(t)=0$, für alle $t \in \left[\widehat{t},t_0\right]$. Nun erhalten wir mit der Relation (2.2) für alle $t \in \left[\bar{t},\widehat{t}\right[$ die Abschätzung

$$|u'(t)|=|y_1'(t)-y_2'(t)|=|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|\le\omega(|y_1(t)-y_2(t)|)=\omega(u(t))\,.$$

Umformen liefert für alle $t \in \left[\bar{t},\widehat{t}\right[$ die Ungleichung

$$\frac{|u'(t)|}{\omega(u(t))}\le 1. \tag{2.4}$$

Sei $\alpha>0$ beliebig, so dass $\left(\widehat{t}-\alpha\right) \in \left[\bar{t},\widehat{t}\right[$ ist. Dann liefert eine Integration der Ungleichung (2.4) über $\bar{t}$ sowie $\left(\widehat{t}-\alpha\right)$ und die Substitution $x=u(t)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\int_{u(\widehat{t}-\alpha)}^{u(\bar{t})}\frac{1}{\omega(x)}dx\right| &= \left|\int_{(\widehat{t}-\alpha)}^{\bar{t}}\frac{u'(t)}{\omega(u(t))}dt\right|\le\int_{\bar{t}}^{(\widehat{t}-\alpha)}\frac{|u'(t)|}{\omega(u(t))}dt \\
&\le \int_{\bar{t}}^{(\widehat{t}-\alpha)}1dt=\left(\widehat{t}-\alpha-\bar{t}\right)\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow}\left(\widehat{t}-\bar{t}\right)<+\infty.
\end{aligned}$$

Mit der Gleichung (2.1) erhalten wir den Widerspruch

$$\left|\int_{u(\hat{t}-\alpha)}^{u(\bar{t})} \frac{1}{\omega(x)} dx\right| \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \left|\int_{u(\hat{t})}^{u(\bar{t})} \frac{1}{\omega(x)} dx\right| = \left|\int_{0}^{u(\bar{t})} \frac{1}{\omega(x)} dx\right| = +\infty.$$

Beide Fälle haben zum Widerspruch geführt. Folglich gibt es für kein $\bar{t} \in \mathcal{I}$ und kein $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\left[\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon\right]$, so dass für alle $t \in \left[\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon\right] \cap \mathcal{I}$ gilt $y_1(t) \neq y_2(t)$. $\square$

2.2 Die Einzigkeitsaussage von Osgood für Banach-Räume

Wenn wir verlangen, dass die stetige Funktion $\omega : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ aus der Einzigkeitsaussage von Osgood (Theorem 2.1) monoton wächst, überträgt sich die Gültigkeit der Einzigkeitsaussage von Osgood von den reellen Zahlen auf reelle Banach-Räume.

Theorem 2.2. *Seien* $R, T \in [0, +\infty[$, $(X, \|\cdot\|)$ *ein reeller Banach-Raum,* $y_0 \in X$, $\overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|} \subseteq X$, $f : [0,T] \times \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|} \to \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$ *eine stetige Funktion. Des Weiteren sei* $\omega : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *eine monoton wachsende, stetige Funktion mit* $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ *für alle* $t \in]0, +\infty[$ *und*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\vartheta} \frac{1}{\omega(t)} dt = +\infty, \text{ für alle } \varepsilon, \vartheta \in]0, +\infty[\,. \tag{2.5}$$

Ferner gelte für alle $t \in [0,T]$ *und für alle* $x, y \in \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega(\|x-y\|)\,.$$

Es sei $\delta > 0$ *und* $\mathcal{I}_\delta := [0,T] \cap [t_0+\delta, t_0-\delta]$ *ein Intervall, so dass das AWP* (1.1) *auf den Intervall* $\mathcal{I}_\delta$ *mindestens eine Lösung besitze. Dann ist die Lösung für das AWP* (1.1) *auf dem Intervall* $\mathcal{I}_\delta$ *eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 2.1. Funktionen, die den Bedingungen aus Theorem 2.1 und Theorem 2.2 genügen sind unter andrem

$$[0, +\infty[\ni t \mapsto Lt,$$

wobei $L > 0$ eine Konstante ist, oder

$$[0, +\infty[\ni t \mapsto \omega(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t = 0 \text{ ist,} \\ -t\ln(t)\,, & \text{falls } 0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ ist,} \\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & \text{falls } t > \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ ist.} \end{cases}$$

An dieser Stelle werden wir nicht nachrechnen, dass die Funktion ω den Bedingungen aus Theorem 2.2 genügt. Allerdings ist ein Beweis dieser Aussagen den Anhang (Lemma A.1) beigefügt.

Das nachfolgende Beispiel veranschaulicht, dass mit der Einzigkeitsaussage von Osgood noch Aussagen über die eindeutige Lösbarkeit des AWPs (1.1) getroffen werden können, wenn die rechte Seite f keine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Beispiel 2.1. [3] Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = \begin{cases} -y(t)\ln(y(t))\,, & \text{für } 0 < y(t) \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0, & \text{falls } y(t) = 0 \end{cases} \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

[3] An dieser Stelle werden wir nicht nachrechnen, dass die Funktionen ω und f aus den Beispiel 2.1 den Bedingungen aus Satz 2.2 genügen und die Funktion f in einer Umgebung von 0 keine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Allerdings ist ein Beweis dieser Aussagen den Anhang (Lemmata A.1 und A.2) beigefügt.

Die Funktionen

$$\left[0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right] \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x\ln(x), & \text{für } 0 < x \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und

$$[0,+\infty[\ \ni t \mapsto \omega(t) = \begin{cases} 0, & \text{für}\, t = 0 \\ -t\ln(t), & \text{für}\, 0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & \text{für}\, t > \frac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$$

genügen den Bedingungen aus Theorem 2.2. Also besitzt das AWP (2.6) gemäß den Satz von Peano (vergleiche Werner [7, S.190-191] oder Zeidler [8, S.81-82]) mindestens eine Lösung und die Einzigkeitsaussage von Osgood (Theorem 2.1 oder 2.2) liefert die Einzigkeit einer Lösung des AWPs (2.6). Allerdings erfüllt die Funktion f keine Lipschitz-Bedingung in einer Umgebung von 0.

Bevor wir uns dem Beweis von Theorem 2.2 widmen, gilt es ein Lemma zu beweisen.

Lemma 2.1. *Sei $T > 0$ und $u : [0,T] \to [0,+\infty[$ eine stetige Funktion mit $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,T]$. Die Funktion $\omega : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ habe die gleichen Eigenschaften wie in der Einzigkeitsaussage von Osgood (Theorem 2.2). Ferner gelte*

$$u(t) \leq \int_0^t \omega(u(x))\,dx \tag{2.7}$$

für $0 < t \leq T$. Dann ist $u(t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$.

Beweis. Ist $t = 0$ gilt

$$0 \leq u(0) \leq \int_0^0 \omega(u(x))\,dx = 0.$$

Damit ist $u(0) = 0$. Nun werden wir zeigen, dass $u(t) = 0$ für jedes $t \in]0,T]$ ist.
Angenommen, dass $u(t) > 0$ für alle $t \in]0,T]$ ist. Wir definieren eine Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} \varphi : [0,T] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \max_{0 \leq x \leq t} u(x). \end{aligned}$$

Dann existiert zu jedem $t \in [0,T]$ ein $\bar{t}$ mit $0 \leq \bar{t} \leq t$, so dass

$$\varphi(t) = u(\bar{t}). \tag{2.8}$$

Da $u(t) > 0$ für alle $t \in]0,T]$ ist, ist

$$\varphi(t) > 0, \text{ für alle } t \in]0,T]. \tag{2.9}$$

Aus der Definition der Hilfsfunktion φ geht hervor, dass für alle $t \in]0,T]$ gilt

$$u(t) \leq \varphi(t). \tag{2.10}$$

Aufgrund der Eigenschaft (2.9) von φ und der Bedingung $u(0) = 0$, ist $\omega(\varphi(t)) \geq 0$ für alle $t \in [0,T]$. Ferner ist das Integral ein positiver Operator. Folglich gilt für jedes $t, \bar{t} \in [0,T]$ mit $0 \leq \bar{t} \leq t$ die Ungleichung

$$\int_{\bar{t}}^t \omega(\varphi(x))\,dx \geq 0. \tag{2.11}$$

Da ω eine monoton wachsende Funktion ist, erhalten wir aus den Ungleichungen (2.7) sowie (2.11) und den Eigenschaften (2.8), (2.9) sowie (2.10) der Hilfsfunktion φ für jedes $t \in]0, T]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= u(\bar{t}) \leq \int_0^{\bar{t}} \omega(u(x))\,dx \leq \int_0^{\bar{t}} \omega(u(x))\,dx + \int_{\bar{t}}^t \omega(u(x))\,dx \\ &= \int_0^t \omega(u(x))\,dx \leq \int_0^t \omega(\varphi(x))\,dx.\end{aligned}$$

Eine Umformung liefert für jedes $t \in]0, T]$ die Abschätzung

$$\varphi(t) \leq \int_0^t \omega(\varphi(x))\,dx. \tag{2.12}$$

Nun definieren wir die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}\psi : [0, T] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^t \omega(\varphi(x))\,dx.\end{aligned}$$

Aus (2.10) und (2.12) folgt für alle $t \in]0, T]$

$$u(t) \leq \varphi(t) \leq \psi(t). \tag{2.13}$$

Des Weiteren gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\psi'(t) = \omega(\varphi(t)) \text{ und } \psi(0) = 0. \tag{2.14}$$

Da ω eine monoton wachsende Funktion ist, folgt aus der Abschätzung (2.13) und der Gleichung (2.14) für alle $t \in]0, T]$

$$\psi'(x) = \omega(\varphi(t)) \leq \omega(\psi(t)).$$

Nach einer Umformung folgt

$$\frac{\psi'(t)}{\omega(\psi(t))} \leq 1. \tag{2.15}$$

Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und ein beliebiges $\vartheta \in]0, T]$ erhalten wir mit der Ungleichung (2.15) und der Substitution $\psi(t) = x$ die Abschätzung

$$\int_{\psi(\varepsilon)}^{\psi(\vartheta)} \frac{1}{\omega(x)} dx = \int_\varepsilon^\vartheta \frac{\psi'(t)}{\omega(\psi(t))} dt \leq \int_\varepsilon^\vartheta 1dt = (\vartheta - \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \vartheta < +\infty.$$

Aber aus den Gleichungen (2.5) und (2.14) folgt

$$\int_\varepsilon^\vartheta \frac{\psi'(t)}{\omega(\psi(t))} dt = \int_{\psi(\varepsilon)}^{\psi(\vartheta)} \frac{1}{\omega(x)} dx \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also ist $u(t) \leq 0$ für alle $t \in]0, T]$. Da aber nach Voraussetzung $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$ ist, muss $u(t) = 0$ für alle $t \in]0, T]$ sein. Ferner ist $u(0) = 0$. Folglich ist $u(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$. □

Nun zum Beweis der Einzigkeitsaussage von Osgood für Banach-Räume.

Beweis. (Theorem 2.2): Seien $y_1, y_2 : \mathcal{I}_\delta \to \overline{\mathcal{B}_R(y_0)}^{\|\cdot\|}$ zwei Lösungen für das AWP (1.1). Dann gilt für alle $t \in \mathcal{I}_\delta$

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s))\,ds$$

und

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))\, ds.$$

Fall 1.) Wir betrachten das Intervall $[t_0, t_0 + \delta]$.
Dann können wir eine Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} u : [0,\delta] \cap [0,T] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|y_1(t+t_0) - y_2(t+t_0)\| \end{aligned}$$

definieren.
Für diese Hilfsfunktion gilt

$$u(0) = \|y_1(0+t_0) - y_2(0+t_0)\| = \|y_0 - y_0\| = 0$$

und

$$u(t) = \|y_1(t+t_0) - y_2(t+t_0)\| \geq 0, \text{ für alle } t \in [0,\delta] \cap [0,T].$$

Ferner erhalten wir mit der Substitution $s = x + t_0$ für alle $t \in [0,\delta] \cap [0,T]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} u(t) &= \|y_1(t+t_0) - y_2(t+t_0)\| = \left\| y_0 + \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, y_1(s))\, ds - y_0 - \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, y_2(s))\, ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\, ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t+t_0} \| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t+t_0} \omega(\|y_1(s) - y_2(s)\|)\, ds = \int_0^t \omega(\|y_1(x+t_0) - y_2(x+t_0)\|)\, dx = \int_0^t \omega(u(x))\, dx. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $t \in [0,\delta] \cap [0,T]$ nach Lemma 2.1

$$u(t) = \|y_1(t+t_0) - y_2(t+t_0)\| = 0$$

und damit ist $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in [t_0, t_0+\delta] \cap [0,T]$.
Fall 2.) Wir betrachten das Intervall $[t_0 - \delta, t_0]$.
Dann können wir eine Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} u : [0,\delta] \cap [0,T] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|y_1(t_0 - t) - y_2(t_0 - t)\| \end{aligned}$$

definieren.
Dann gilt

$$u(0) = \|y_1(t_0 - 0) - y_2(t_0 - 0)\| = \|y_0 - y_0\| = 0$$

und

$$u(t) = \|y_1(t_0 - t) - y_2(t_0 - t)\| \geq 0, \text{ für alle } t \in [0,\delta] \cap [0,T].$$

Ferner erhalten wir mit der Substitution $s = t_0 - x$ für alle $t \in [0,\delta] \cap [0,T]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} u(t) &= \|y_1(t_0 - t) - y_2(t_0 - t)\| = \left\| y_0 + \int_{t_0}^{t_0 - t} f(s, y_1(s))\, ds - y_0 - \int_{t_0}^{t_0 - t} f(s, y_2(s))\, ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t_0 - t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\, ds \right\| \leq \int_{t_0 - t}^{t_0} \| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \|\, ds \\ &\leq \int_{t_0 - t}^{t_0} \omega(\|y_1(s) - y_2(s)\|)\, ds = -\int_{t_0}^{t_0 - t} \omega(\|y_1(s) - y_2(s)\|)\, ds \\ &= \int_0^t \omega(\|y_1(t_0 - x) - y_2(t_0 - x)\|)\, ds = \int_0^t \omega(u(x))\, dx. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $t \in [0, \delta] \cap [0, T]$ nach Lemma 2.1

$$u(t) = \|y_1(t_0 - t) - y_2(t_0 - t)\| = 0$$

und damit ist $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0] \cap [0, T]$.
Beide Fälle liefern $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Folglich ist $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in \mathcal{I}$. $\square$

3 Zu Shkarins Aufsatz: *On Osgood theorem in Banach spaces*

Im vorherigen Abschnitt wurde die Einzigkeitsaussage von Osgood studiert. Damit diese Aussage auf das AWP (1.1) angewendet werden kann, benötigen wir eine rechte Seite $f : [0, T] \times \overline{\mathcal{B}_R(0)}^{\|\cdot\|} \to \overline{\mathcal{B}_R(0)}^{\|\cdot\|}$ und eine monoton wachsende, stetige Funktion $\omega : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, die den Bedingungen aus Theorem 2.2 genügen. Es ergibt sich die Frage, ob die Voraussetzungen an die rechte Seite f und die Funktion ω das Lösungsverhalten des AWPs (1.1) beeinflussen. Dieser Frage ist Stanislav Shkarin in seiner Arbeit [5] *On Osgood theorem in Banach spaces* nachgegangen. In diesem Abschnitt werden wir einen kleinen Einblick in die Arbeit von Shkarin geben und einige Aussagen von ihm vorstellen. Dafür gilt es zunächst, einige Begriffe aus der Banach-Raum-Theorie einzuführen.

3.1 Begriffe aus der Banach-Raum-Theorie

Definition 3.1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum. Eine Teilmenge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ heißt:

(i) Schauder-Basis von X, wenn für jedes $x \in X$ genau eine Folge $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e_n \right\| = 0.$$

(ii) Unbedingte Schauder-Basis, wenn für jedes $x \in X$ genau eine Folge $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ existiert und für jedes $\sigma \in \mathcal{S}_n := \{\tau \mid \tau : \{0, ..., n\} \to \{0, ..., n\} \text{ ist bijektiv}\}$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \alpha_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} \right\| = 0.$$

Bemerkung 3.1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum und $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Schauder-Basis. Dann liegt die Menge $\operatorname{span}\left(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ dicht in X. Folglich ist jeder reelle Banach-Raum, der eine Schauder-Basis besitzt, separabel (vergleiche Werner [7, S.28]).

Eine Projektion auf einen Vektorraum ist eine Abbildung P mit $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

Definition 3.2. Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum und $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Dann heißt U zu X komplementiert, wenn eine lineare, beschränkte Projektion von X auf U existiert.

Beispiel 3.1. Für alle $1 \leq p < +\infty$ besitzt der Raum ℓ^p eine unbedingte Schauder-Basie. Diese Schauder-Basis ist die Menge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^p$ mit $e_n := \left(0, ..., 0, \underbrace{1}_{\text{n−te Stelle}}, 0, ...\right)$. Des Weiteren kann ℓ^p für alle $p \in [1, +\infty[$ als Unterraum von $\mathrm{L}^p(0,1)$ aufgefasst werden. Insofern ist ℓ^p zu $\mathrm{L}^p(0,1)$ komplementiert. Ebenso ist c_0 zu $\mathcal{C}([0,1])$ komplementiert (vergleiche Werner [7, S.190]). Allerdings ist der Raum c_0 nicht zu ℓ^∞ komplementiert (vergleiche Werner [7, S.163]).

3.2 Einige Resultate aus Shkarins Aufsatz: *On Osgood theorem in Banach spaces*

Im Folgenden sei Ω die Menge aller monoton wachsenden, stetigen Funktionen $\omega : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega(0) = 0$ und $\omega(s+t) \leq \omega(s) + \omega(t)$ für alle $s, t \in [0, +\infty[$. Die Menge aller auf den Intervall $]0, +\infty[$ differenzierbarer Funktionen $\omega : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega \in \Omega$ und $\sup_{t\in]0,T]} (t\omega'(t)) < \infty$ für jedes $T > 0$ sei $\widetilde{\Omega}$.
Es bezeichne $\mathcal{U}$ die Menge aller reellen Banach-Räume $(X, \|\cdot\|)$ mit einer unbedingten Schauder-Basis. Ebenso bezeichne $\mathcal{W}$ die Menge aller reellen Banach-Räume $(X, \|\cdot\|)$, die einen reellen Unterbanach-Raum besitzen, der in $\mathcal{U}$ enthalten und zu X komplementiert ist. Es sei Λ die Menge aller Tupel (ω_1, ω_2), wobei $\omega_1, \omega_2 : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton wachsende und stetige Funktionen seien, so dass zu jeden $\varepsilon > 0$ und jeden Banach-Raum $X \in \mathcal{U}$ eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ mit den folgenden Eigenschaften existiere.

(a.1) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ ist $\|f(t,x)\| \leq 1$.

(a.2) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in X$ gilt $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega_1(\varepsilon \|x - y\|)$.

(a.3) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ gilt $\|f(s,x) - f(t,x)\| \leq \omega_2(|s - t|)$.

(a.4) Für jeden Anfangswert $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| < 1$ besitzt das AWP

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

auf keinen Intervall in einer Umgebung von Null eine Lösung.

Bemerkung 3.2. Die aufgeführten Mengen $\Omega, \widetilde{\Omega}, \mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ sind nicht leer. Ein Vertreter der Menge $\widetilde{\Omega}$ ist gemäß Lemma A.4 die Funktion $\omega(t) := \varepsilon t^\alpha$ für alle $t \in [0, +\infty[$, wobei $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in]0, 1[$ sind. In Beispiel 3.1 haben wir gesehen, dass es Banach-Räume mit unbedingter Schauder-Basis gibt. Folglich ist die Menge $\mathcal{U}$ nicht leer. Ebenso haben wir in Beispiel 3.1 gesehen, dass der Raum $\mathrm{L}^p(0,1)$ für $1 \leq p < \infty$ ein Vertreter der Menge $\mathcal{W}$ ist.

Die Frage, ob es Vertreter der Menge Λ gibt, ist nicht trivial. Das nachfolgende Lemma ist in Shkarins Arbeit [5] zu finden. Dieses Lemma charakterisiert Vertreter der Menge Λ. Auf den Beweis dieses Lemmas werden wir in dieser Arbeit nicht weiter eingehen. Dieser ist in der Arbeit von Shkarin [5, S.91-97] zu finden.

Lemma 3.1. *Der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ sei in $\mathcal{U}$ enthalten. Dann gilt:*

(i) *Sei $\omega_1 \in \Omega$ mit*

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_1(t)} dt < +\infty$$

und es sei $\omega_2(t) = 2$ für jedes $t \in [0, +\infty[$. Dann ist $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$.

(ii) *Sei $\omega_2 \in \widetilde{\Omega}$ mit*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega_2(t)}} dt < +\infty$$

und es sei $\omega_1(t) := \sqrt{t\omega_2(t)}$ für alle $t \in [0, +\infty[$. Dann ist $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$.

Bemerkung 3.3. Das Lemma 3.1 bleibt gültig, wenn die obere Integralgrenze durch ein $\vartheta \in]0, +\infty[$ ersetzt wird.

Das folgende Lemma ist eines der bedeutendsten Resultate aus der Arbeit von Shkarin [5] und die Grundlage der nachfolgenden Theoreme.

Lemma 3.2. *Der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ sei in $\mathcal{W}$ enthalten und $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times X \to X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ gilt $\|f(t, x)\| \leq 1$.*

(ii) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in X$ gilt $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \omega_1(\|x - y\|)$.*

(iii) *Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ gilt $\|f(s, x) - f(t, x)\| \leq \omega_2(|s - t|)$.*

(iv) *Es existiert kein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, so dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ auf $\mathcal{I}$ eine Lösung besitzt.*

Bevor wir uns den Beweis von Lemma 3.2 widmen, ist es nützlich auf den folgenden Zusammenhang hinzuweisen.

Bemerkung 3.4. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei reelle Banach-Räume und $\mathrm{A} : X \to Y$ ein linearer, beschränkter Operator. Ferner sei $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $y : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathcal{I}$ stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $t \in \mathcal{I}$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{A}(y(t)) = \mathrm{A}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) = \mathrm{A}(y'(t)). \tag{3.1}$$

Beweis. (Lemma 3.2): Da der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ in der Menge $\mathcal{W}$ enthalten ist, gibt es einen Unterbanach-Raum $(Y, \|\cdot\|)$ von X. Der Unterbanach-Raum Y ist in $\mathcal{U}$ enthalten und ist zu X komplementiert. Da $Y \in \mathcal{U}$ ist, besitzt Y eine unbedingte Schauder-Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$.
Es sei $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen der natürlichen Zahlen, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{A}_k = \emptyset$.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$Y_k := \overline{\operatorname{span}\{e_j \mid j \in \mathcal{A}_k\}} \text{ und } Z_k := \overline{\operatorname{span}\{e_j \mid j \notin \mathcal{A}_k\}}.$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$Y = \overline{\operatorname{span}\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}} = Y_k \oplus Z_k.$$

Des Weiteren definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_k : Y &\to Y_k \\ x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n &\mapsto \sum_{n\in\mathcal{A}_k} \lambda_n e_n, \end{aligned}$$

wobei die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ den Element $x \in Y$ eindeutig zugeordnet ist. Insbesondere gilt

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n e_n \right\|.$$

Offensichtlich ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung P_k linear und für alle $x \in X$ mit $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$ gilt

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathrm{P}_k x\| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n\in\mathcal{A}_k} \lambda_n e_n \right\| \\ &\le \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n\in\mathcal{A}_k} \lambda_n e_n + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{A}_k} \lambda_n e_n \right\| = \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \right\| = \|x\| \end{aligned} \tag{3.2}$$

und

$$\mathrm{P}_k^2 x = \mathrm{P}_k \left(\sum_{n\in\mathcal{A}_k} \lambda_n e_n \right) = \sum_{n\in\mathcal{A}_k} \lambda_n e_n = \mathrm{P}_k x.$$

Folglich ist P_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine lineare, beschränkte Projektion.
Da der Unterbanach-Raum Y zu den Banch-Raum X komplementiert ist, existiert eine lineare, beschränkte Projektion $P : X \to Y$. Aus der Relation (3.2) und den Satz von Banach-Steinhaus (vergleiche Brézis [2, S.16-18] oder Werner [7, S.141]) folgt

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|P_k\| < +\infty.$$

Daher gibt es ein $\widehat{\varepsilon} > 0$ mit

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|P_k\| \, \|P\| \le \frac{1}{\widehat{\varepsilon}}. \tag{3.3}$$

Es wurde vorausgesetzt, dass $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$ ist. Da zudem $Y_k \in \mathcal{U}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist, existiert für $\widehat{\varepsilon} > 0$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $g_k : \mathbb{R} \times Y_k \to Y_k$, welche die Eigenschaften (a.1) bis (a.4) besitzt.
Im Folgenden sei $\{q_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge der reellen Zahlen. Wir definieren

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R} \times X) &\to X \\ (t, x) &\mapsto f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k g_k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t - q_k), (P_k P)(x) \right). \end{aligned}$$

Da die Funktionen g_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ stetig sind und die Eigenschaft (a.1) besitzen, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(t, x) \in (\mathbb{R} \times Y_k)$

$$\|g_k(t, x)\| \le 1. \tag{3.4}$$

Daher folgt aus der Abschätzung (3.4) und der Konvergenz der geometrischen Reihe für alle $(t, x) \in (\mathbb{R} \times X)$

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k g_k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t - q_k), (P_k P)(x) \right) \right\| \\ &\le \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left\| g_k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t - q_k), (P_k P)(x) \right) \right\| \right) \\ &\le \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Folglich konvergiert für alle $(t,x) \in (\mathbb{R} \times X)$ die Reihe

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(x)\right)$$

und die Funktion f ist wohldefiniert. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ besitzen die Funktionen g_k die Eigenschaft (a.2). Folglich gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(t,x), (t,y) \in (\mathbb{R} \times Y_k)$

$$\|g_k(t,x) - g_k(t,y)\| \leq \omega_1(\widehat{\varepsilon}\|x-y\|). \tag{3.6}$$

Dementsprechend folgt aus den Abschätzungen (3.3) und (3.6) für alle $(t,x), (t,y) \in (\mathbb{R} \times X)$

$$\begin{aligned}
& \|f(t,x) - f(t,y)\| \\
= & \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(x)\right) - g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(y)\right)\right)\right\| \\
\leq & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left\|g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(x)\right) - g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(y)\right)\right\| \\
\leq & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \omega_1(\widehat{\varepsilon}\|(P_k P)(x) - (P_k P)(y)\|) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \omega_1(\widehat{\varepsilon}\|P_k\|\,\|P\|\,\|x-y\|) \\
\leq & \omega_1(\|x-y\|)\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \omega_1(\|x-y\|).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ebenso besitzen die Funktionen g_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft (a.3). Daher folgt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(s,x), (t,x) \in (\mathbb{R} \times Y_k)$

$$\|g_k(s,x) - g_k(t,x)\| \leq \omega_2(|s-t|). \tag{3.8}$$

Also ergibt sich aus (3.8) für alle $(s,x), (t,x) \in (\mathbb{R} \times X)$

$$\begin{aligned}
& \|f(s,x) - f(t,x)\| \\
= & \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (s-q_k), (P_k P)(x)\right) - g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(x)\right)\right)\right\| \\
\leq & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left\|\left(g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (s-q_k), (P_k P)(x)\right) - g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(y)\right)\right)\right\| \\
\leq & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \omega_2\left(\left|\left(\frac{1}{2}\right)^k (s-q_k) - \left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k)\right|\right) \\
= & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \omega_2\left(\left|\left(\frac{1}{2}\right)^k (s-t)\right|\right) \leq \omega_2(|s-t|)\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \omega_2(|s-t|).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Funktionen ω_1 und ω_2 sind stetig. Demgemäß folgt aus den Abschätzungen (3.7) und (3.9) die Stetigkeit der Funktion f und aus (3.5), (3.7), (3.9) folgt, dass f die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus Lemma 3.2 besitzt. Also bleibt zu zeigen, dass kein Intervall aus den reellen Zahlen existiert auf den die gewöhnliche Differentialgleichung $x'(t) = f(t,x(t))$ eine Lösung besitzt. Dieser Nachweis erfolgt mittels eines Widerspruchsbeweises.

Angenommen, es existiert ein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ auf den die gewöhnliche Differentialgleichung $x'(t) = f(t,x(t))$ eine Lösung besitzt. Dann existieren reelle Zahlen $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so dass $[a,b] \subseteq \mathcal{I}$ ist. Des Weiteren existiert eine stetig differenzierbare Funktion $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $x'(t) = f(t,x(t))$ für alle

$t \in [a,b]$. Daher folgt aus der Identität (3.1) für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P_k P)(x(t)) &= (P_k P)(x'(t)) = (P_k P)(f(t,x(t))) \\ &= (P_k P)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(x(t))\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (t-q_k), (P_k P)(x(t))\right). \end{aligned}$$

Eine Integration über $t, t_0 \in [a,b]$ liefert

$$(P_k P)(x(t)) = (P_k P)(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{2}\right)^k g_k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (\tau-q_k), (P_k P)(x(\tau))\right) d\tau.$$

Mit der Substitution $\sigma = \left(\frac{1}{2}\right)^k (\tau - q_k)$ ergibt sich

$$(P_k P)\left(x\left(2^k t + q_k\right)\right) = (P_k P)\left(x\left(2^k t_0 + q_k\right)\right) = \int_{2^k t_0 + q_k}^{2^k t + q_k} g_k\left(\sigma, (P_k P)\left(x\left(2^k \sigma + q_k\right)\right)\right) d\sigma. \tag{3.10}$$

Die Menge $\{q_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine dichte Teilmenge der reellen Zahlen. Dementsprechend enthält die Menge

$$\Gamma := \{k \in \mathbb{N} \mid q_k \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{N}$$

unendlich viele Elemente. Für alle $k \in \Gamma \subseteq \mathbb{N}$ und $t \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k (a-q_k), \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-q_k)\right]$ defenieren wir die Funktion

$$y_k(t) := (P_k P)\left(x\left(2^k t + q_k\right)\right).$$

Dann folgt aus der Identität (3.10) für alle $t \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k (a-q_k), \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-q_k)\right]$

$$y_k'(s) = \frac{d}{ds}(P_k P)\left(x\left(2^k s + q_k\right)\right) = g_k\left(s, (P_k P)\left(x\left(2^k s + q_k\right)\right)\right) = g_k(s, y_k(s)). \tag{3.11}$$

Die Abbildung $P : X \to Y$ ist eine lineare, beschränkte Projektion und $x : [a,b] \to X$ ist eine stetig differenzierbare Funktion. Also ist die Komposition $(P \circ x) : [a,b] \to Y$ eine stetige Abbildung. Da $[a,b]$ ein kompaktes Intervall ist und stetige Abbildungen kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbilden, ist auch die Menge $\{P(x(t)) \mid t \in [a,b]\} \subseteq Y$ kompakt. Ferner ist für $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung $P_k : Y \to Y_k$ stetig. Folglich gibt es nach Weierstraß' Satz vom Minimum und Maximum für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $s_k := \sup_{t \in [a,b]} \|(P_k P)(x(t))\|$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt $\lim_{k \to \infty} \mathcal{A}_k = \emptyset$. Demgemäß bildet die Projektion P_k auf $\{0\}$ ab, wenn k gegen unendlich läuft. Infolgedessen konvergiert die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen Null für $k \to \infty$. Da die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist, existiert ein $k_0 \in \Gamma \subseteq \mathbb{N}$ mit $\|s_{k_0}\| < 1$. Für diesen Index $k_0 \in \Gamma$ ist $q_{k_0} \in [a,b]$ und es gilt

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} (a - q_{k_0}) \leq 0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} (b - q_{k_0}).$$

Also liegt das Intervall $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} (a-q_{k_0}), \left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} (b-q_{k_0})\right]$ in einer Umgebung von Null. Ferner gilt die Abschätzung

$$\|y_{k_0}(0)\| = \|(P_{k_0} P)(x(q_{k_0}))\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|(P_{k_0} P)(x(t))\| = \|s_{k_0}\| < 1$$

und gemäß (3.11) ist die Funktion y_{k_0} auf den Intervall $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} (a-q_{k_0}), \left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} (b-q_{k_0})\right]$ eine Lösung für das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = & g_{k_0}(s, y_{k_0}(t)), \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ y(0) = & (P_{k_0} P)(x(q_{k_0})). \end{cases}$$

Allerdings besitzen die Funktionen g_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft (a.4). Folglich besitzt das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = g_k(t, y(t)), & \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für jeden Anfangswert $y_0 \in Y_k$ mit $\|y_0\| < 1$ auf keinen Intervall in einer Umgebung von 0 eine Lösung.
Damit haben wir einen Widerspruch erhalten. Folglich besitzt die Funktion f die Eigenschaft (iv) aus Lemma 3.2. $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts widmen wir uns der Frage, ob Aussagen über die Lösbarkeit einer gewöhnlichen Differentialgleichung getroffen werden können, wenn die Eigenschaften der Funktion ω aus der Einzigkeitsaussage von Osgood verändert werden. Dazu stellen wir zwei Theoreme aus der Arbeit von Shkarin vor.

Theorem 3.1. *Der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ sei in $\mathcal{W}$ enthalten und $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ sei eine Funktion aus Ω mit*

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega(t)} dt < +\infty.$$

Dann gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times X \to X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in X$ gilt $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \omega(\|x - y\|)$.*

(ii) *Es existiert kein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, so dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ auf $\mathcal{I}$ eine Lösung besitzt.*

Beweis. Da der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ in der Menge $\mathcal{W}$ enthalten ist, gibt es einen Unterbanach-Raum $(Y, \|\cdot\|)$ von X. Der Unterbanach-Raum Y ist in $\mathcal{U}$ enthalten und ist zu X komplementiert.
Wir definieren eine Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} \widehat{\omega} : [0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \widehat{\omega}(t) = 2. \end{aligned}$$

Es wurde vorausgesetzt, dass die Funktion $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ in Ω enthalten ist und

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega(t)} dt < +\infty$$

gilt. Daher ist gemäß Lemma 3.1 (i) das Tupel $(\omega, \widehat{\omega})$ in Λ enthalten.
Dementsprechend existiert gemäß Lemma 3.2 eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times X \to X$ mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

Theorem 3.2. *Der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ sei in der Menge $\mathcal{W}$ enthalten und $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ sei eine Funktion aus $\widetilde{\Omega}$ mit*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega(t)}} dt < +\infty.$$

Ferner existiere eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $t \in [0, +\infty[$

$$\sqrt{tc \min\{\omega(t), 1\}} + c \min\{\omega(t), 1\} \leq \omega(t) \tag{3.12}$$

gelte. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) *Für alle $x, y \in X$ gilt $\|f(x) - f(y)\| \leq \omega(\|x - y\|)$.*

(ii) *Es existiert kein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, so dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = f(y(t))$ auf $\mathcal{I}$ eine Lösung besitzt.*

Beweis. Da der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ in $\mathcal{W}$ enthalten ist, gibt es einen Unterbanach-Raum $(Y, \|\cdot\|)$ von X aus $\mathcal{U}$. Auf den Quotienten-Raum

$$X/Y := \{[x] = x + Y \mid x \in X\}$$

ist durch

$$\|[x]\|_{X/Y} := \inf_{y \in Y} \|x - y\|\,, \text{ für alle } [x] \in X/Y,$$

eine Norm[4] gegeben (vergleiche Werner [7, S.34-35]). Da $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banach-Raum ist und $(Y, \|\cdot\|)$ ein Unterbanach-Raum von X ist, ist $\left(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y}\right)$ ebenfalls ein reeller Banach-Raum (vergleiche Werner [7, S.34-35]).
Sei $e \in X$ mit $e \notin Y$ und $\|e\| = 1$. Dann existiert gemäß einer Folgerung aus den Satz von Hahn-Banach (vergleiche Werner [7, S.98]) ein Funktional $\psi \in X/Y^*$ mit

$$\langle \psi, [e] \rangle_{X/Y^* \times X/Y} = \|[e]\|_{X/Y} \text{ und } \|\psi\|_{X/Y^*} = 1. \tag{3.13}$$

Sei $\varpi : X \to X/Y$ die kanonische Abbildung, die X in den Quotienten-Raum X/Y überführt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) = \psi(\varpi(x)) = \psi([x]) \end{aligned}$$

linear und es gilt gemäß (3.13)

$$Y \subseteq \mathrm{Kern}\varphi, \tag{3.14}$$

$$\langle \varphi, e \rangle = \langle \psi, [e] \rangle_{X/Y^* \times X/Y} = \|[e]\|_{X/Y} \leq \|e\| = 1 \tag{3.15}$$

sowie

$$\|\varphi\|_* = \sup_{x \in X} \frac{|\langle \varphi, x \rangle|}{\|x\|} \leq \|\psi\|_{X/Y^*} \sup_{x \in X} \frac{\|[x]\|_{X/Y}}{\|x\|} \leq 1. \tag{3.16}$$

Des Weiteren ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Also ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein Unterbanach-Raum von X. Da Y zu X komplementiert ist, existiert eine lineare, beschränkte Projektion $P : X \to Y$. Diese Projektion kann auf $\mathrm{Kern}(\varphi)$ eingeschränkt werden. Also folgt aus der Relation (3.14), dass Y zu $\mathrm{Kern}(\varphi)$ komplementiert ist. Folglich ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ in der Menge $\mathcal{W}$ enthalten, weil $Y \in \mathcal{U}$ ist.
Im Folgenden sei

$$\widetilde{c} := \left(\frac{\|e\|_{X/Y}}{\|e\| + \|e\|_{X/Y}} \right)^2 c,$$

wobei $c > 0$ die Konstante aus der Abschätzung (3.12) ist. Da $\|e\| = 1$ ist, gilt

$$\widetilde{c} \leq \left(\frac{1}{\|e\| + \|e\|_{X/Y}} \right)^2 c \leq c. \tag{3.17}$$

[4] Insbesondere gilt gemäß Werner [7, S.34-35] für alle $x \in X$

$$\|[x]\|_{X/Y} \leq \|x\|\,.$$

Wir definieren die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} \omega_1 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \omega_1(t) := \sqrt{t\widetilde{c}\min\{\omega(t),1\}} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \omega_2 : [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \omega_2(t) := \widetilde{c}\min\{\omega(t),1\}. \end{array}$$

Da die Konstante $\widetilde{c} > 0$ ist, ist gemäß Lemma A.3 die Funktion ω_2 in der Menge $\widetilde{\Omega}$ enthalten. Ferner ist Y ein Unterbanach-Raum von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und in der Menge $\mathcal{U}$ enthalten. Also ist gemäß Lemma 3.1 (ii) das Tupel (ω_1, ω_2) in der Menge Λ enthalten. Folglich existiert gemäß Lemma 3.2 eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathrm{Kern}(\varphi) \to \mathrm{Kern}(\varphi)$, so dass für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in X$ gilt

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \leq \omega_1(\|x-y\|) \tag{3.18}$$

und

$$\|g(s,x) - g(t,x)\| \leq \omega_2(|s-t|). \tag{3.19}$$

Ferner existiert kein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ auf den die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = g(t, y(t))$ eine Lösung besitzt.
Nun definieren wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & X \\ x & \mapsto & f(x) := \dfrac{e}{\|e\|_{X/Y}} + g\left(\langle\varphi, x\rangle, x - \langle\varphi, x\rangle \dfrac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right). \end{array}$$

Dann folgt aus den Abschätzungen (3.16), (3.18) und (3.19) für alle $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \left\|g\left(\langle\varphi, x\rangle, x - \langle\varphi, x\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right) - g\left(\langle\varphi, x\rangle, y - \langle\varphi, y\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right)\right\| \\ &\quad + \left\|g\left(\langle\varphi, x\rangle, y - \langle\varphi, y\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right) - g\left(\langle\varphi, y\rangle, y - \langle\varphi, y\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right)\right\| \\ &\leq \omega_1\left(\left\|x - y - \langle\varphi, x-y\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right\|\right) + \omega_2(|\langle\varphi, x-y\rangle|) \\ &\leq \omega_1\left(\frac{\left(\|e\|_{X/Y} + \|\varphi\|_* \|e\|\right)}{\|e\|_{X/Y}} \|x-y\|\right) + \omega_2(\|\varphi\|_* \|x-y\|) \\ &\leq \frac{\left(\|e\| + \|e\|_{X/Y}\right)}{\|e\|_{X/Y}} \sqrt{t\widetilde{c}\min\{\omega(\|x-y\|),1\}} + \widetilde{c}\min\{\omega(\|x-y\|),1\}. \end{aligned}$$

Also folgt aus den Abschätzungen (3.12), (3.17) und der obigen Abschätzung für alle $x, y \in X$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sqrt{tc\min\{\omega(\|x-y\|),1\}} + c\min\{\omega(\|x-y\|),1\} \leq \omega(\|x-y\|). \tag{3.20}$$

Da die Funktion ω stetig ist, folgt aus der Abschätzung (3.20), dass die Funktion f stetig ist. Ferner impliziert die Abschätzung (3.20), dass f die Eigenschaft (i) aus Theorem 3.2 besitzt. Es bleibt zu zeigen, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = f(y(t))$ auf keinen Intervall aus den reellen Zahlen eine Lösung besitzt. Dieser Nachweis erfolgt mittels eines Widerspruchsbeweises.
Angenommen, es existiert ein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ auf den die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = f(y(t))$ eine Lösung besitzt. Dann existieren reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so dass $[a,b] \subseteq \mathcal{I}$. Des

Weiteren existiert eine stetig differenzierbare Funktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass $y'(t) = f(y(t))$ für alle $t \in [a,b]$ gilt. Da φ ein stetiges, lineares Funktional ist, folgt aus der Identität (3.1) für alle $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \varphi, y(t)\rangle &= \left\langle \varphi, \frac{d}{dt} y(t)\right\rangle = \langle \varphi, y'(t)\rangle = \langle \varphi, f(y(t))\rangle \\ &= \left\langle \varphi, \frac{e}{\|e\|_{X/Y}} + g\left(\langle \varphi, y(t)\rangle, x - \langle \varphi, y(t)\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Das Bild der Funktion g ist in $\operatorname{Kern}(\varphi)$ enthalten. Also folgt für alle $t \in [a,b]$

$$\left\langle \varphi, g\left(\langle \varphi, y(t)\rangle, x - \langle \varphi, y(t)\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right)\right\rangle = 0. \tag{3.22}$$

Daher ergibt sich aus (3.15), (3.21) und (3.22) für alle $t \in [a,b]$ die Identität

$$\frac{d}{dt}\langle \varphi, y(t)\rangle = \frac{1}{\|e\|_{X/Y}}\langle \varphi, e\rangle = 1. \tag{3.23}$$

Folglich gilt für alle $t \in [a,b]$

$$\langle \varphi, y(t)\rangle = t + c_1, \tag{3.24}$$

wobei $c_1 \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
Nun definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} z : [a + c_1, b + c_1] &\to X \\ t &\mapsto z(t) = y(t - c_1) - \langle \varphi, y(t - c_1)\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}. \end{aligned}$$

Die Funktion z ist auf den Intervall $[a + c_1, b + c_1]$ stetig differenzierbar, weil y und $\langle \varphi, y(\cdot)\rangle$ auf den Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbar sind. Demgemäß folgt aus (3.23) und (3.24) für alle $t \in [a + c_1, b + c_1]$

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t - c_1) - \frac{d}{dt}\langle \varphi, y(t - c_1)\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}} = f(y(t - c_1)) - \frac{e}{\|e\|_{X/Y}} \\ &= g\left(\langle \varphi, y(t - c_1)\rangle, y(t - c_1) - \langle \varphi, y(t - c_1)\rangle \frac{e}{\|e\|_{X/Y}}\right) = g(t, z(t)). \end{aligned}$$

Damit ist z auf den Intervall $[a + c_1, b + c_1]$ eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung $z'(t) = g(t, z(t))$.
Dieses Resultat widerspricht der Tatsache, dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = g(t, y(t))$ auf keinen Intervall aus den reellen Zahlen eine Lösung besitzt. Folglich besitzt die stetige Funktion f die Eigenschaft (ii) aus Theorem 3.2. $\square$

Eine Folgerung aus Theorem 3.2 ist, dass zu einen reellen Banach-Raum, der in der Menge $\mathcal{W}$ enthalten ist, eine Hölder-stetige Funktionen $f : X \to X$ existiert, so dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = f(y(t))$ auf keinen Intervall aus den reellen Zahlen eine Lösung besitzt. Es sollte erwähnt werden, dass der Hölder-Exponenten dieser Funktion f nicht eins sein kann. Denn wäre der Exponent eins, wäre f Lipschitz-stetig und für eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer Lipschitz-stetigen rechten Seite existiert gemäß den Satz von Picard-Lindelöf (vergleiche Emmrich [3, S.169-171] oder Zeidler [8, S.78-81]) ein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, auf den die gewöhnliche Differentialgleichung genau eine Lösung besitzt.

Korollar 3.1. *Der reelle Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ sei in der Menge $\mathcal{W}$ enthalten und es seien $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Des Weiteren existiere eine Konstante $c > 0$ mit*

$$\max\left(\sqrt{c}, c\right) \leq \min\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}(1-\alpha)} + \sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}} + 1}\right). \tag{3.25}$$

Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) *Für alle $x, y \in X$ gilt $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \|x-y\|^{\alpha}$.*

(ii) *Es existiert kein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, so dass die gewöhnliche Differentialgleichung $y'(t) = f(y(t))$ auf $\mathcal{I}$ eine Lösung besitzt.*

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{array}{rcl} \omega : [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ t & \mapsto & \omega(t) = \varepsilon t^{\alpha}. \end{array}$$

Dann ist gemäß Lemma A.4 die Funktion ω ein Element der Menge $\widetilde{\Omega}$ und es gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega(t)}} dt < +\infty.$$

Im Folgenden sei $t \in [0,+\infty[$.
Fall 1.) Es sei $0 \leq t < \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}$. Dann ergibt sich die Abschätzung

$$t^{\frac{1}{2}(1-\alpha)} < \varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}(1-\alpha)}. \tag{3.26}$$

Des Weiteren ist $\min(\omega(t), 1) = \omega(t)$ und es folgt aus der Relation (3.25) sowie der Abschätzung (3.26)

$$\begin{aligned} \sqrt{tc\min(\omega(t),1)} + c\min(\omega(t),1) &\leq \max\left(\sqrt{c}, c\right)\left(\sqrt{t\omega(t)} + \omega(t)\right) \\ &= \max\left(\sqrt{c}, c\right)\left(t^{\frac{1}{2}(1-\alpha)} + \sqrt{\varepsilon}\right)\sqrt{\varepsilon}t^{\alpha} \\ &< \max\left(\sqrt{c}, c\right)\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}(1-\alpha)} + \sqrt{\varepsilon}\right)\sqrt{\varepsilon}t^{\alpha} \leq \omega(t). \end{aligned}$$

Fall 2.) Es sei $\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \leq t < +\infty$. Dann sind die Abschätzungen $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ sowie $0 < t^{-1} \leq \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ erfüllt und es folgt

$$t^{-\alpha} \leq \varepsilon \text{ und } t^{-\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} \leq \varepsilon^{1-\frac{1}{2\alpha}}. \tag{3.27}$$

Ferner ist $\min(\omega(t), 1) = 1$ und es folgt aus der Relation (3.25) und der Abschätzung (3.27)

$$\begin{aligned} \sqrt{tc\min(\omega(t),1)} + c\min(\omega(t),1) &\leq \max\left(\sqrt{c}, c\right)\left(\sqrt{t} + 1\right) \\ &= \max\left(\sqrt{c}, c\right)\left(t^{\frac{1}{2}-\alpha} + t^{-\alpha}\right)t^{\alpha} \\ &\leq \max\left(\sqrt{c}, c\right)\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}} + 1\right)\varepsilon t^{\alpha} \leq \omega(t). \end{aligned}$$

Daher gilt für alle $t \in [0,+\infty[$ die Abschätzung

$$\sqrt{tc\min(\omega(t),1)} + c\min(\omega(t),1) \leq \omega(t).$$

Dementsprechend sind alle Voraussetzungen aus Theorem 3.2 erfüllt. Also existiert eine stetige Funktion $f : X \to X$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung 3.5. Ist der Exponent α in den Intervall $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ enthalten ist die Ungleichung (3.12) aus Theorem 3.2 nicht für alle $t \in \left[\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right[$ erfüllt. Denn unter der Annahme, dass eine Konstante $c > 0$ existierte, so dass die Funktion $\omega(t) = \varepsilon t^{\alpha}$ für alle $t \in \left[\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right[$ der Abschätzung (3.12) genüge, ergibt sich aus den Regeln von Bernoulli und de l'Hospital der Widerspruch

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{tc\min(\omega(t),1)} + c\min(\omega(t),1)}{\omega(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{ct} + c}{\varepsilon t^{\alpha}} = +\infty.$$

A Rechnungen

A.1 Zu Bemerkung 2.1 und Beispiel 2.1

Wir betrachten die Funktionen

$$[0,+\infty[\ \ni t \mapsto \omega(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \text{ ist,} \\ -t\ln(t) & \text{falls } 0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ ist,} \\ \frac{1}{e} & \text{falls } t > \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ ist} \end{cases} \tag{A.1}$$

und

$$\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \ni y \mapsto f(y) := \begin{cases} -y\ln(y) & , \ y \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \\ 0 & , \ y = 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

aus Bemerkung 2.1 und Beispiel 2.1 und zeigen, dass die Funktionen ω und f den Voraussetzungen von Theorem 2.2 genügen.

Lemma A.1. *Die Funktion* $\omega : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ *sei durch* (A.1) *gegeben. Dann hat* ω *die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Die Funktion* ω *ist stetig auf* $[0,+\infty[$.

(ii) *Für alle* $t \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ *ist* $\omega(0) = 0$ *und* $\omega(t) > 0$.

(iii) *Die Funktion* ω *ist auf* $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ *monoton wachsend.*

(iv) *Für beliebige, fest gewählte* $\varepsilon, \vartheta \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ *gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\vartheta} \frac{1}{\omega(t)}dt = +\infty.$$

Beweis. Zu (i): Aus den Regeln von Bernoulli und de l'Hospital folgt

$$\lim_{t\to 0}\omega(t) = \lim_{t\to 0} -t\ln(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{t}} = \lim_{x\to 0} t = 0 = \omega(0).$$

Ferner ist $\omega(\frac{1}{\mathrm{e}}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Demzufolge ist ω in den Punkten $t = 0$ und $t = \frac{1}{\mathrm{e}}$ stetig fortsetzbar. Folglich ist ω stetig.

Zu (ii): Für alle $t \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ gilt $1 < \frac{1}{t}$. Daher ist $\omega(t) = -t\ln(t) = t\ln\left(\frac{1}{t}\right) > 0$. Des Weiteren ist $\omega(0) = 0$ und $\omega(t) = \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$ für alle $t > \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Zu (iii): Für alle $t \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ gilt $\mathrm{e} \leq \frac{1}{t}$. Eine Anwenden des natürlichen Logarithmus liefert $1 \leq \ln\left(\frac{1}{t}\right)$. Damit erhalten wir die Ungleichung

$$\omega'(t) = 1\ln\left(\frac{1}{t}\right) + t\left(-\frac{1}{t^2}\right)t = \ln\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \geq 0.$$

Ferner ist $\omega(0) = 0 < \omega(t)$ für alle $t \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$. Infolgedessen ist ω auf $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ monoton wachsend.

Zu (iv): Seien $\varepsilon, \vartheta \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$. Dann erhalten wir mit der Substitution $x = \ln(t)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\vartheta}\frac{1}{\omega(t)}dt &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\vartheta}\frac{1}{-t\ln(t)}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\ln\varepsilon}^{\ln\vartheta} -\frac{1}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\ln(|\ln(\vartheta)|) + \ln(|\ln(\varepsilon)|) = +\infty. \end{aligned}$$

□

Lemma A.2. *Die Funktionen* $\omega : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *und* $f : \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \to \mathbb{R}$ *seien durch* (A.1) *und* (A.2) *gegeben. Dann haben* ω *und* f *die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Die Funktionen* ω *und* f *genügen für alle* $x, y \in \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ *der Abschätzung*

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

(ii) *Auf den Intervall* $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ *genügt die Funktion* f *keiner Lipschitz-Bedingung.*

Beweis. Zu (i): Es gilt für alle $y \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^2 f(y) = \left(\frac{d}{dy}\right)^2 - y\ln(y) = \frac{d}{dy}(-1 - \ln(y)) = -\frac{1}{y} < 0.$$

Folglich ist f konkav[5] auf dem Intervall $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
Im Folgenden seien $x, y \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$.
Fall 1.) Sei $x = 0$ und $y \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| \quad = \quad |y\ln(y)| = \omega(|y|) = \omega(|x - y|).$$

Analog kann der Fall $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$ und $y = 0$ betrachtet werden.
Fall 2.) Seien $x, y \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$ beliebig mit $0 < x \leq y$ und $0 \leq y - x < x$. Da f konkav ist, folgt

$$\frac{f(y-x) - f(0)}{y - x} \geq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \frac{f(x) - f(y-x)}{x - y + x}. \tag{A.3}$$

Außerdem gilt für $y - x < x \leq y$

$$\frac{f(x) - f(y-x)}{x - y + x} \geq \frac{f(y) - f(y-x)}{y - y + x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \tag{A.4}$$

Aus (A.3) und (A.4) folgt

$$\frac{-(y-x)\ln(y-x) - 0}{y - x} = \frac{f(y-x) - f(0)}{y - x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{-y\ln(y) + x\ln(x)}{y - x}.$$

Eine Umformung liefert

$$-(y-x)\ln(y-x) \geq -y\ln(y) + x\ln(x).$$

Entsprechend gilt

$$|f(y) - f(x)| = |-y\ln(y) + x\ln(x)| \leq |-(y-x)\ln(y-x)| = \omega(|y - x|) = \omega(|x - y|).$$

Demzufolge gilt für alle $x, y \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \omega(|x - y|).$$

Zu (ii): Angenommen, f erfüllt eine Lipschitz-Bedingung in einer Umgebung von 0. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein Intervall $\mathcal{I}_\varepsilon := \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\cap \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, so dass für alle $x, y \in \mathcal{I}_\varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

[5] Ist eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konkav, gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ die Abschätzung

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

wobei $x \in [x_1, x_2]$ ist.

gilt, wobei $L > 0$ eine Konstante ist. Insbesondere gilt für alle $x \in \mathcal{I}_\varepsilon \setminus \{0\}$
$$|-x \ln x| = |f(x) - f(0)| \leq L\,|x|\,.$$
Nach einer Umformung gilt für alle $x \in \mathcal{I}_\varepsilon \setminus \{0\}$
$$|\ln x| \leq L.$$
Demzufolge ist der natürlicher Logarithmus auf dem Intervall $\mathcal{I}_\varepsilon$ beschränkt. Dies widerspricht dem Verhalten der natürlichen Logarithmusfunktion in einer Umgebung von 0. Folglich erfüllt f keine Lipschitz-Bedingung in einer Umgebung von 0. □

Bemerkung A.1. Sind die Funktionen $\omega : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ und $f : \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \to \mathbb{R}$ durch (A.1) und (A.2) gegeben, folgt aus Lemma A.1 (i) und Lemma A.2 (i), dass die Funktion f auf den Intervall $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ stetig ist. Insofern genügen die Funktionen ω und f den Voraussetzungen von Theorem 2.2.

A.2 Zu Theorem 3.2 und Korollar 3.1

Es sei $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ eine stetige Funktion aus $\widetilde{\Omega}$. Wir betrachten die Funktionen
$$[0, +\infty[\ni t \mapsto \omega_1(t) := c \min\{\omega(t), 1\}\,, \tag{A.5}$$
wobei $c > 0$ eine Konstante ist, und
$$[0, +\infty[\ni t \mapsto \omega_2(t) := \varepsilon t^\alpha \tag{A.6}$$
für ein $\varepsilon > 0$ sowie ein $\alpha \in]0, 1[$ aus Theorem 3.2 und Korollar 3.1 und zeigen, dass die Funktionen ω_1 und ω_2 in der Menge $\widetilde{\Omega}$ enthalten sind.

Lemma A.3. *Sei $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ eine stetige Funktion aus $\widetilde{\Omega}$ und es sei für ein $\varepsilon > 0$ die Funktion $\omega_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ durch* (A.5) *gegeben. Dann hat ω_1 die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Die Funktion ω_1 ist monoton wachsend, stetig und auf den Intervall $]0, +\infty[$ differenzierbar.*

(ii) *Für alle $t \in]0, +\infty[$ gilt $\omega_1(0) = 0$ und $\omega_1(t) \geq 0$.*

(iii) *Für alle $s, t \in [0, +\infty[$ gilt $\omega_1(s + t) \leq \omega_1(s) + \omega_1(t)$.*

(iv) *Für jedes $T > 0$ gilt $\sup\limits_{t \in]0,T]} (t\omega_1'(t)) < \infty$.*

(v) *Es gilt*
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega_1(t)}} dt < +\infty.$$

Beweis. Zu (i): Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, ist $\omega(0) = 0$. Also gilt $\omega_1(0) = c \min\{\omega(0), 1\} = c \min\{0, 1\} = 0$. Sei $t \in]0, +\infty[$ ein beliebiges, fest gewähltes Element. Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, ist ω auf den Intervall $]0, +\infty[$ differenzierbar und es gilt
$$\omega_1'(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = 1 \text{ ist} \\ c\omega'(t)\,, & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = \omega(\mathrm{t}) \text{ ist.} \end{cases}$$
Insofern ist ω_1 auf den Intervall $]0, +\infty[$ stetig und differenzierbar.
Sei $x_n \subseteq [0, +\infty[$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, gilt $\omega(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega(0) = 0$.

Infolgedessen ist $\omega(x_n) \geq 1$ für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und $\omega(x_n) < 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dementsprechend gilt $\omega_1(x_n) = c\min\{\omega(x_n), 1\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\omega(0) = 0$. Also ist ω_1 auf den Intervall $[0, +\infty[$ stetig und auf den Intervall $]0, +\infty[$ differenzierbar.
Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, ist ω auf $]0, +\infty[$ monoton wachsend und differenzierbar. Daher ist $\omega'(t) \geq 0$ für alle $t \in]0, +\infty[$. Entsprechend ist $\omega_1'(t) \geq 0$ für alle $t \in]0, +\infty[$. Also ist ω_1 auf $]0, +\infty[$ monoton wachsend. Ferner gilt für alle $t \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \omega_1(0) &= 0 = \omega(0) \\ &\leq \left.\begin{cases} c, & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = 1 \text{ ist} \\ c\omega(t), & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = \omega(\mathrm{t}) \text{ ist} \end{cases}\right\} = c\min\{\omega(t), 1\} = \omega_1(t). \end{aligned}$$

Folglich ist ω_1 auf den Intervall $[0, +\infty[$ monoton wachsend.
Zu (ii): Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, ist $\omega(0) = 0$. Also gilt $\omega_1(0) = c\min\{\omega(0), 1\} = c\min\{0, 1\} = 0$. Sei $t \in]0, +\infty[$ ein beliebiges, fest gewähltes Element. Dann gilt

$$\omega_1(t) = \left.\begin{cases} c, & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = 1 \text{ ist} \\ c\omega(t), & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = \omega(\mathrm{t}) \text{ ist} \end{cases}\right\} \geq 0,$$

weil $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist.
Zu (iii): Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, gilt für alle $s, t \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \omega_1(s+t) &= c\min\{\omega(s+t), 1\} \leq c\min\{\omega(s) + \omega(t), 1\} \\ &\leq c\min\{\omega(s), 1\} + c\min\{\omega(t), 1\} = \omega_1(s) + \omega_1(t). \end{aligned}$$

Zu (iv): Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, folgt für jedes $T \in]0, +\infty[$, dass $\sup\limits_{t\in]0,T]} (t\omega'(t)) < +\infty$ ist. Daher ergibt sich für jedes $T \in]0, +\infty[$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in]0,T]} (t\omega_1'(t)) \\ = &\left.\begin{cases} \sup\limits_{t\in]0,T]} (t0) = 0, & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = 1 \text{ ist} \\ \sup\limits_{t\in]0,T]} (tc\omega'(t)) = c\sup\limits_{t\in]0,T]} (t\omega'(t)), & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = \omega(\mathrm{t}) \text{ ist} \end{cases}\right\} < +\infty. \end{aligned}$$

Zu (v): Da $\omega \in \widetilde{\Omega}$ ist, gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega(t)}} dt < +\infty.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega_1(t)}} dt \\ = &\left.\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ct}} dt = \frac{2}{\sqrt{c}}, & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = 1 \text{ ist} \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega_2(t)}} dt = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega(t)}} dt, & \text{falls } \min\{\omega(\mathrm{t}), 1\} = \omega(\mathrm{t}) \text{ ist} \end{cases}\right\} < +\infty. \end{aligned}$$

□

Lemma A.4. *Für ein $\varepsilon > 0$ und ein $\alpha \in]0, 1[$ sei die Funktion $\omega_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ durch* (A.6) *gegeben. Dann hat ω_2 die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Die Funktion ω_2 ist monoton wachsend, stetig und auf $]0, +\infty[$ stetig differenzierbar.*

(ii) *Für alle $t \in]0, +\infty[$ gilt $\omega_2(0) = 0$ und $\omega_2(t) > 0$.*

(iii) *Für alle $s, t \in [0, +\infty[$ gilt $\omega_2(s + t) \leq \omega_2(s) + \omega_2(t)$.*

(iv) *Für jedes $T > 0$ gilt $\sup_{t \in]0,T]} (t\omega_2'(t)) < \infty$.*

(v) *Es gilt*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega_2(t)}} dt < +\infty.$$

Beweis. Zu (i): Für alle $t \in]0, +\infty[$ gilt $\omega_2'(t) = \varepsilon\alpha t^{\alpha-1}$. Da $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in]0, 1[$ sind, sind die Funktionen $\omega_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ und $\omega_2' :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ stetig. Des Weiteren ist $\omega_2'(t) = \varepsilon\alpha t^{\alpha-1} > 0$ für alle $t \in]0, +\infty[$, weil $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in]0, 1[$ sind. Folglich ist ω_2 auf $]0, +\infty[$ monoton wachsend. Ferner gilt für alle $t \in]0, +\infty[$

$$\omega_2(0) = \varepsilon 0^\alpha = 0 < \varepsilon t^\alpha = \omega(t),$$

weil $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in]0, 1[$ sind. Damit ist ω_2 monoton wachsend auf $[0, +\infty[$.
Zu (ii): Da $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in]0, 1[$ sind gilt

$$\omega_2(0) = \varepsilon 0^\alpha = 0$$

und für alle $t \in]0, +\infty[$

$$0 < \varepsilon t^\alpha = \omega_2(t).$$

Zu (iii): Seien $s, t \in [0, +\infty[$. Da $0 < \alpha < 1$ ist, folgt aus der Jensen-Ungleichung[6]

$$s + t \leq (s^\alpha + t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Aus dieser Abschätzung ergibt sich

$$\omega_2(s + t) = \varepsilon (s + t)^\alpha < \varepsilon (s^\alpha + t^\alpha) = \omega_2(s) + \omega_2(t),$$

weil $\varepsilon > 0$ ist.
Zu (iv): Sei $T > 0$. Gemäß Teil (i) dieses Lemmas ist ω eine monoton wachsende Funktion. Daher folgt für alle $t \in]0, T]$

$$t\omega_2'(t) = t\varepsilon\alpha t^{\alpha-1} = \varepsilon\alpha t^\alpha = \alpha\omega_2(t) \leq \alpha\omega_2(T).$$

Aus dieser Abschätzung ergibt sich

$$\sup_{t \in]0,T]} (t\omega_2'(t)) = \alpha\omega_2(T) < \infty.$$

Zu (v): Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\omega_2(t)}} dt &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\varepsilon t^\alpha}} dt = \int_0^1 \frac{1}{(\varepsilon t^{\alpha+1})^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^1 (t)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{2}{(1 + \alpha)} t^{\frac{1}{2}(1+\alpha)} \right]_{t=0}^1 = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}(1 + \alpha)} < +\infty.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung A.2. Sei $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ eine stetige Funktion aus $\widetilde{\Omega}$. Dann ergibt sich aus den Lemmata A.3 und A.4, dass die durch (A.5) und (A.6) gegebenen Funktionen $\omega_1, \omega_2 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ in der Menge $\widetilde{\Omega}$ enthalten sind.

[6] Jensen-Ungleichung: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $0 < q \leq p < +\infty$ und $(x_k)_{k=1}^n \subseteq [0, +\infty[$. Dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Literatur

[1] Agarwal, Ravi P. und V.Lakshmikantham: Uniqueness and Criteria for Ordinary Differential Equations, Singapur u.a.: World Scientific 1993 (Series in Real Analysis 6), S.12-14.

[2] Brézis, Haim: Analyse Fonctionnelle Théorie et applications, Paris: Dunod 1999, S.1-4, S.16-18.

[3] Emmrich, Etienne: Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen. Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende, Wiesbaden: Vieweg & Sohn 2004, S.169-171.

[4] Osgood, William F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzchen Bedingung, in: Monatsheft Mathematik 9 (1898), S.331–345.

[5] Shkarin, Stanislav: On Osgood theorem in Banach spaces, in: Mathematische Nachrichten 257 (2003), S.87-98.

[6] Werner, Dirk: Funktionalanalysis, 6., korrigierte Aufl., Berlin u.a.: Springer 2007, S.94-98; S.141; S.161-164; S.188-191.

[7] Werner, Dirk: Unzerlegbare Banach-Räume. Über die Arbeiten von W. T. Gowers, Online-Ressource: http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/preprints/gowers2. pdf, S.1-12 (zuletzt aufgerufen am 22.06.2010).

[8] Zeidler, Eberhard: Nonlinear Functional Analysis and its Applications I. Fixed-Point Theorems, 2. korrigierte Aufl., Berlin u.a.: Springer 1992, S. 58; S.78-82.