Technische Universität Berlin
Fachgebiet Differentialgleichungen
Prof. Dr. Etienne Emmrich

Seminar Differentialgleichungen

im Sommersemester 2012

Abbildungseigenschaften des Nemytskii-Operators

Mieke Kuschnerus, 342429

Berlin, den 26. September 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Definition

Diese Ausarbeitung zum Thema „Abbildungseigenschaften des Nemytskii-Operators“ entstand im Rahmen des Seminars Differentialgleichungen an der TU Berlin im Sommersemester 2012 und beruht im Wesentlichen auf Kapitel 9.2 des Buches „Elemente der Funktionalanalysis - Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze“ von Jürgen Appell und Martin Väth [1]. Es werden ausgewählte Abbildungseigenschaften des Nemytskii-Operators in Räumen stetiger und stetig differenzierbarer Funktionen bewiesen und an Beispielen erläutert.

Der Nemytskii-Operator ist auch als Superpositions- oder Einsetzungsoperator bekannt. Er wurde nach dem Mathematiker Wiktor Wladimirowitsch Nemytskii (1900-1967) benannt. Nemytskii studierte und forschte an der physikalisch-mathematischen Fakultät der Technischen Universität Moskau vor allem in der Topologie, der nicht-lineare Funktionalanalysis (insbesondere zu nicht-linearen Integralgleichungen) und über die qualitative Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen [6]. Der nach Nemytskii benannte Operator ist „der in der Nichtlinearen Analysis am häufigsten anzutreffende Operator“[1].

Definition 1.1. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,u) \mapsto f(t,u)$ eine gegebenen Funktion. Der durch f erzeugte *Nemytskii-Operator* F, angewandt auf eine Funktion $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, ist dann definiert durch

$$F(x)(t) := f(t, x(t)).$$

Anwendung findet der Nemytskii-Operator zum Beispiel als „rechte Seite“ jeder gewöhnlicher Differentialgleichung der Form:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))(= F(x)(t)).$$

Die hier betrachteten Abbildungseigenschaften werden zum Beispiel für den Nachweis der Stetigkeit des Operators $T(x)(t) := b + \int_a^t f(s, x(s))ds$ im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf (3.1) verwendet. Hier wird die Existenz einer eindeutigen Lösung der obigen Differentialgleichung mit Anfangswert $x(a) = b$ mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen, wofür die Stetigkeit des Operators T benötigt wird.

2 Räume stetiger und stetig differenzierbarer Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Abbildungseigenschaften des Nemytskii-Operators in den Räumen $\mathcal{C}([0,1])$ und $\mathcal{C}^\alpha([0,1])$ für verschiedene $0 \le \alpha < 1$. Die Sätze und Beispiele, die in diesem Kapitel betrachtet werden stammen alle aus [1], Kapitel 9.2. Die Definitionen sind aus anderen Teilen desselben Buches übernommen.

Wir beginnen mit der Betrachtung des Raums $C := \mathcal{C}([0,1])$. Hier ist sofort klar, dass aus der Stetigkeit von f auch die Stetigkeit von $F(x)$ folgt und damit $F(C) \subseteq C$. Es gilt aber auch die Umkehrung dieser Aussage. Dazu formulieren wir den folgenden Satz.

Satz 2.1. *Sei F der von f erzeugte Nemytskii-Operator. Dann gilt*

$$F(C) \subseteq C \Leftrightarrow f \text{ stetig.}$$

In diesem Fall ist der Nemytskii-Operator F beschränkt[1] *und stetig*[2].

Der Nemytskii-Operator bildet also genau dann den Raum C in sich ab, wenn die erzeugende Funktion f stetig ist.

Beweis. Zunächst folgt aus der Stetigkeit von f sofort die Stetigkeit von $F(x) = f(\cdot, x(\cdot))$ für $x \in C$ und damit $F(C) \subseteq C$.
Sei nun umgekehrt $F : C \to C$ und $(t_0, u_0) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten eine Folge $(t_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1] \times \mathbb{R}$ mit $t_n \to t_0$ und $u_n \to u_0$ für $n \to \infty$. Da die Menge $A := \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ dann abgeschlossen ist, gibt es nach dem Satz von Tietze-Uryson (siehe Anhang 3.2) eine stetige Funktion $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x(t_j) = u_j$ für $j = 0, 1, 2, \dots$. Hierbei können wir x so wählen, dass $x([0,1]) \subseteq \operatorname{conv}\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$. Aus der Stetigkeit von x folgt nun auch die Stetigkeit von $F(x)$ und es gilt

$$f(t_n, u_n) = F(x)(t_n) \to F(x)(t_0) = f(t_0, u_0) \text{ für } n \to \infty.$$

Also ist auch f stetig in (t_0, u_0) und da (t_0, u_0) beliebig gewählt war auch stetig auf ganz $[0,1]$.
Sei nun $x \in C$ mit $\|x\|_C \le r$ für ein $r > 0$. Dann folgt

$$\|F(x)\|_C = \sup_{0\le t\le 1} |f(t, x(t))| \le \sup_{(s,y)\in[0,1]\times[-r,r]} |f(s,y)| =: c < \infty,$$

da f stetig und $[0,1] \times [-r, r]$ kompakt ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass F beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet, und somit beschränkt ist.

[1] Ein Operator $F : X \to Y$ heißt *beschränkt*, wenn er beschränkte Teilmengen von X in beschränkte Teilmengen von Y überführt.[1]

[2] Ein Operator $F : X \to Y$ heißt *stetig* in $x \in X$, wenn aus $x_n \to x$ für $n \to \infty$ stets $F(x_n) \to F(x)$ für $n \to \infty$ folgt, und *stetig* auf X, wenn er in jedem $x \in X$ stetig ist.[1]

Es verbleibt die Stetigkeit von F zu zeigen. Da f auf $[0,1]\times\mathbb{R}$ stetig ist, ist f auf beschränkten Teilmengen von $[0,1]\times\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und für alle $\varepsilon>0$ existiert ein $\delta>0$, sodass

$$|f(t,x)-f(s,y)|\leq\varepsilon \text{ für alle } |(t,x)-(s,y)|<\delta.$$

Sei nun $(x_n)_n\subseteq C$ eine Folge mit Grenzwert $x\in C$. Dann existiert ein $N\in\mathbb{N}$, sodass $|x_n(t)-x(t)|\leq\delta$ für alle $n\geq N$ und für alle $t\in[0,1]$ und damit

$$|F(x_n)(t)-F(x)(t)|=|f(t,x_n(t))-f(t,x(t))|\leq\varepsilon$$

gilt. Dies zeigt gerade

$$\|F(x_n)(t)-F(x)(t)\|_C\longrightarrow 0 \text{ für alle } t\in[0,1].$$

Daraus folgt die Stetigkeit von F auf C. □

Nun betrachten wir $C^1:=\mathcal{C}^1([0,1])$. Für $x\in C^1$ ist dann die Norm $\|\cdot\|_{C^1}$ definiert durch

$$\|x\|_{C^1}=\|x\|_C+\|x'\|_C=\sup_{0\leq t\leq 1}|x(t)|+\sup_{0\leq t\leq 1}|x'(t)|.$$

In Satz (2.1) kann nun nicht einfach C durch C^1 ersetzt werden. Hier reicht die Implikation $F(C^1)\subseteq C^1$ nicht für die Stetigkeit von f aus. Um dies zu verdeutlichen betrachten wir das folgende Beispiel nach Janusz Matkowski [1]:

Beispiel 2.2. Wir definieren:

$$f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(t,u):=\begin{cases}0 & \text{falls } u\leq 0,\\ 3\frac{u^2}{t}-2\frac{u^3}{t\sqrt{t}} & \text{falls } 0<u<\sqrt{t},\\ 1 & \text{falls } \sqrt{t}\leq u.\end{cases}$$

Zunächst wollen wir zeigen, dass für den durch f erzeugten Nemytskii-Operator $F(C^1)\subseteq C^1$ gilt. Dazu sei $x\in C^1$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $x(0)=0$ (sonst wähle $y(t):=y(t)-y(0)$). Für den Fall, dass $x(t)\leq 0$ oder $x(t)\geq\sqrt{t}$ ist, ist $F(x)$ konstant und somit stetig differenzierbar. Auch für $0<x(t)<\sqrt{t}$ folgt die stetige Differenzierbarkeit von $F(x)$ direkt aus der Definition von f und der stetigen Differenzierbarkeit von x. Wir müssen also lediglich die Stellen $t=0$ und $t_0>0$ mit $x(t_0)=\sqrt{t_0}$ genauer untersuchen.
Wir betrachten zunächst die Stelle $t=0$. Sei dazu $\delta>0$ so, dass $x(t)<\sqrt{t}$ für $0<t<\delta$ gilt. Somit erhalten wir entweder $x(t)<0$ und damit $F(x)(t)=0$ oder $0<x(t)<\sqrt{t}$ und damit

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x)(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(3\frac{x(t)^2}{t^2}-2\frac{x(t)^3}{t^2\sqrt{t}}\right)=3x'(0)^2.$$

Somit ist $F(x)$ differenzierbar in 0 mit $(F(x))'(0)=3x'(0)^2$. Für $0<x(t)<\sqrt{t}$ folgt weiter

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}(F(x))'(t) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,x(t))+\frac{\partial}{\partial u}f(t,x(t))x'(t)\right)\\ &= 3\lim_{t\to 0}\left(\frac{x(t)^3}{t^2\sqrt{t}}-\frac{x(t)^2}{t^2}-2\frac{x(t)^2}{t\sqrt{t}}x'(t)+2\frac{x(t)}{t}x'(t)\right)\\ &= 3x'(0)^2.\end{aligned}$$

Somit ist $(F(x))'$ auch stetig in 0.
Wir betrachten nun $(F(x))'$ in t_0 mit $\sqrt{t_0} = x(t_0)$, also insbesondere

$$t_0 = (x(t_0))^2 \text{ und } t_0\sqrt{t_0} = (x(t_0))^3.$$

Gilt für $h > 0$, $x(t_0 + h) > x(t_0) = \sqrt{t_0}$ so ist $F(x)(t_0 + h) = 1 = F(x)(t_0)$ und somit $F(x)$ in t_0 stetig differenzierbar mit $(F(x))'(t_0) = 0$. Ist aber $x(t_0 + h) < x(t_0) = \sqrt{t_0}$ so erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x)(t_0 + h) - F(x)(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\frac{(x(t_0+h))^2}{t_0+h} - 2\frac{(x(t_0+h))^3}{(t_0+h)\sqrt{t_0+h}} - 1}{h}.$$

Da

$$\frac{d}{dh}h = 1 \neq 0 \text{ und } \lim_{h\to 0} 3\frac{(x(t_0 + h))^2}{t_0 + h} - 2\frac{(x(t_0 + h))^3}{(t_0 + h)\sqrt{t_0 + h}} - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$$

können wir den Satz von l'Hospital anwenden und es folgt

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{F(x)(t_0 + h) - F(x)(t_0)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{1}{(t_0 + h)^2} \Bigg(6(t_0 + h)x(t_0 + h)x'(t_0 + h) - 3\left(x(t_0 + h)\right)^2 (t_0 + 1) \\
& -6\left(x(t_0 + h)\right)^2 x'(t_0 + h)\sqrt{t_0 + h} + 3\left(x(t_0 + h)\right)^3 \frac{t_0 + 1}{\sqrt{t_0 + h}} \Bigg) \\
= & 6\frac{x(t_0)x'(t_0)}{t_0} - 3\frac{(x(t_0))^2(t_0 + 1)}{t_0^2} - 6\frac{(x(t_0))^2 x'(t_0)}{t_0\sqrt{t_0}} + 3\frac{(x(t_0))^3(t_0 + 1)}{t_0^2\sqrt{t_0}} \\
= & 6\frac{x'(t_0)}{\sqrt{t_0}} - 3\frac{t_0 + 1}{t_0} - 6\frac{x'(t_0)}{\sqrt{t_0}} + 3\frac{t_0 + 1}{t_0} \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Damit ist auch in diesem Fall $F(x)$ in t_0 stetig differenzierbar mit $(F(x))'(t_0) = 0$. Insgesamt folgt somit $F(C^1) \subseteq C^1$.
Andererseits gilt hier $F(C) \nsubseteq C$. Betrachten wir nämlich f für $t = 0$, so folgt aus

$$\lim_{u\uparrow 0} f(0, u) = 0 \neq 1 = \lim_{u\downarrow 0} f(0, u),$$

die Unstetigkeit von f in $(0, 0)$, mit Satz (2.1) also die Behauptung.

Um ein ähnliches Ergebnis für C^1 wie für C zu erhalten, müssen wir zusätzlich die Stetigkeit des Nemytskii-Operators $F : C^1 \to C^1$ voraussetzen.

Satz 2.3. *Sei F der von f erzeugte Nemytskii-Operator. Es gilt:*

$$F\left(C^1\right) \subseteq C^1 \text{ und } F \text{ stetig} \Leftrightarrow f \text{ stetig differenzierbar.}$$

In diesem Fall ist der Nemytskii-Operator F beschränkt.

Der Nemytskii-Operator bildet also den Raum C^1 in sich ab und ist stetig, genau dann wenn die erzeugende Funktion f stetig differenzierbar ist.

Beweis. Sei f stetig differenzierbar und $x \in C^1$. Dann folgt wegen

$$\frac{d}{dt}F(x)(t) = \frac{d}{dt}f(t,x(t)) = \frac{\partial}{\partial t}f(t,x(t)) + \frac{\partial}{\partial u}f(t,x(t))x'(t)$$

sofort $F(x) \in C^1$. Weiter erhalten wir für eine Folge $(x_n)_n \subseteq C^1$ mit Grenzwert $x \in C^1$ und $\|x_n - x\|_\infty < \delta$ für $n \geq N$ wegen der Stetigkeit von f

$$\|F(x_n) - F(x)\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| < \varepsilon.$$

Also ist der Operator F stetig.

Sei nun umgekehrt $F : C^1 \to C^1$ stetig. Für $u \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir die konstante Funktion $x_u(t) \equiv u$ und $y_u(t) := f(t,u)$. Weiter bezeichnen wir mit g und h die partiellen Ableitungen von f

$$g(t,u) := \frac{\partial f(t,u)}{\partial t} \quad h(t,u) := \frac{\partial f(t,u)}{\partial u},$$

und zeigen deren Wohldefiniertheit und Stetigkeit. Die Funktion g ist wohldefiniert, da $g(t,u) = y_u'(t) = F'(x_u)(t)$ und $F(x_u) \in C^1$. Für den Beweis der Stetigkeit von g seien $t,s \in [0,1]$ mit $|t-s| \leq \delta$ und $u,v \in \mathbb{R}$ mit $|u-v| = \|x_u - x_v\|_\infty \leq \delta$, sodass $|y_u'(t) - y_u'(s)| \leq \varepsilon$ und $|y_u'(s) - y_v'(s)| \leq \varepsilon$. Dies ist möglich, da $F(x_u) \in C^1$ und F stetig auf C^1 ist. Damit folgt

$$|g(t,u) - g(s,v)| = |y_u'(t) - y_v'(s)| \leq |y_u'(t) - y_u'(s)| + |y_u'(s) - y_v'(s)| \leq 2\varepsilon$$

und somit die Stetigkeit von g.
Weiter sei $t \in [0,1]$ und $u \in \mathbb{R}$ und $x_{t,u}(s) := u+s-t$ sowie $y_{t,u}(s) = F(x_{t,u})(s) = f(s, u+s-t)$. Für festes $(t_0,u_0) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(t_0, u_0+v) - f(t_0,u_0) &= f(t_0+v, u_0+v) - f(t_0,u_0) - f(t_0+v, u_0+v) \\
&\quad + f(t_0, u_0+v) \\
&= y_{t_0,u_0}(t_0+v) - y_{t_0,u_0}(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+v} g(s, u_0+s)ds \\
&= y_{t_0,u_0}(t_0+v) - y_{t_0,u_0}(t_0) - g(t_0,u_0)v \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_0+v} \left(g(s,u_0+s) - g(t_0,u_0)\right) ds.
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von g folgt nun

$$\begin{aligned}
h(t_0,u_0) &= \lim_{v\to 0}\frac{f(t_0,u_0+v)-f(t_0,u_0)}{v}\\
&= \lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\Bigg(y_{t_0,u_0}(t_0+v)-y_{t_0,u_0}(t_0)-g(t_0,u_0)v\\
&\quad -\int\limits_{t_0}^{t_0+v}\left(g(s,u_0+s)-g(t_0,u_0)\right)ds\Bigg)\\
&= \lim_{v\to 0}\frac{y_{t_0,u_0}(t_0+v)-y_{t_0,u_0}(t_0)}{v}-g(t_0,u_0)\\
&= y'_{t_0,u_0}(t_0)-g(t_0,u_0)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&|h(t,u)-h(s,v)|\\
=\;&|y'_{t,u}(t)-g(t,u)-y'_{s,v}(s)-g(s,v)|\\
\le\;&|y'_{t,u}(t)-y'_{t,u}(s)|+|y'_{t,u}(s)-y'_{s,v}(s)|+|g(t,u)-g(s,v)|\\
\le\;&3\varepsilon
\end{aligned}$$

für $|t-s|\le\delta$ und $|u-v|\le\delta$, da $\|x_{t,u}-x_{s,v}\|=|u-v+t-s|\le|t-s|+|u-v|$ und F nach Voraussetzung stetig ist. Somit ist auch h auf $[0,1]\times\mathbb{R}$ stetig. □

Nun wollen wir stetige Funktionen betrachten, die außerdem *Hölder-stetig* sind.

Definition 2.4.

(i) Sei $0\le\alpha<1$ und $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Erfüllt x die *Hölderbedingung*

$$|x(s)-x(t)|\le L|s-t|^\alpha \text{ für } 0\le s,t\le 1 \text{ und ein } L>0,$$

so heißt x *Hölder-stetig* mit *Hölder-Exponent* α.

(ii) Für $0\le\alpha<1$ bezeichnet $C^\alpha:=\mathcal{C}^\alpha([0,1])$ den Raum der reellen Hölder-stetigen Funktionen.

(iii) Für $0\le\alpha<1$ definieren wir die Norm $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ durch

$$\|x\|_{C^\alpha}:=\|x\|_C+[x]_\alpha \text{ mit } [x]_\alpha:=\sup_{s\neq t}\frac{|x(s)-x(t)|}{|s-t|^\alpha}\quad x\in C^\alpha.$$

Auch hier müssen wir weitere Bedingungen an f stellen, um ein analoges Ergebnis zu den zuvor betrachteten Sätzen zu erhalten. Dazu verdeutlichen wir an einem kurzen Beispiel, dass die Hölder-Stetigkeit von f allein nicht reicht, um $F(C^\alpha)\subseteq C^\alpha$ zu erhalten.

Beispiel 2.5. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,u) \mapsto |u|^\alpha$. Dann ist f Hölder-stetig, da mit der inversen Dreiecksungleichung

$$|f(t,u) - f(s,v)| = \big||u|^\alpha - |v|^\alpha\big| \leq |u-v|^\alpha \text{ für alle } 0 \leq s,t \leq 1$$

gilt.
Sei nun $x \in C^\alpha$. Für den durch f erzeugten Nemytskii-Operator F folgt dann

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(x)(s)| &= |f(t,x(t)) - f(s,x(s))| = \big||x(t)|^\alpha - |x(s)|^\alpha\big| \\ &\leq |x(t) - x(s)|^\alpha \leq L|t-s|^{\alpha^2} \end{aligned}$$

für ein $L > 0$, wegen der Hölder-Stetigkeit von x. Das heißt $F(C^\alpha) \subseteq C^{\alpha^2}$ und $F(C^\alpha) \nsubseteq C^\alpha$.

Wir kommen aber zu einem ähnlichen Ergebnis, wenn wir zusätzlich fordern, dass f eine Beschränktheitsbedingung erfüllt.

Satz 2.6. *Der Nemytskii-Operator F ist beschränkt und bildet den Raum C^α in sich ab, genau dann, wenn es zu jedem $r > 0$ ein $m(r) > 0$ gibt mit*

$$|f(t,u) - f(s,v)| \leq m(r)\left(|t-s|^\alpha + \frac{|u-v|}{r}\right) \tag{1}$$

für $0 \leq t,s \leq 1$ und $u,v \in \mathbb{R}$ mit $|u|,|v| \leq r$ und $|u-v| \leq r|t-s|^\alpha$.

Beweis. Aus (1) folgt für $x \in C^\alpha$ mit $|x(s) - x(t)| \leq r|t-s|^\alpha$ für ein $r > 0$

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(x)(s)| &= |f(t,x(t)) - f(s,x(s))| \leq m(r)\left(|t-s|^\alpha + \frac{|x(t)-x(s)|}{r}\right) \\ &\leq m(r)\left(|t-s|^\alpha + |t-s|^\alpha\right) = 2m(r)|t-s|^\alpha, \end{aligned}$$

also $F(x) \in C^\alpha$.
Um die Beschränktheit von F zu zeigen, sei $x \in C^\alpha$ mit $\|x\|_{C^\alpha} \leq r$ für $r > 0$. Mit (1) und der Stetigkeit von f und x folgt nun

$$\begin{aligned} \|F(x)\|_{C^\alpha} &= \|F(x)\|_C + [F(x)]_\alpha = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t,x(t))| + \sup_{t \neq s} \frac{|F(x)(t) - F(x)(s)|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t,x(t))| + 2m(r) \\ &\leq \sup_{(s,y) \in [0,1] \times [-r,r]} |f(s,y)| + 2m(r). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Beschränktheit von F in C^α.

Sei nun umgekehrt $F : C^\alpha \to C^\alpha$ beschränkt und sei weiter für $r > 0$

$$\mu(r) := \sup\{\|F(x)\|_{C^\alpha} : \|x\|_{C^\alpha} \leq 3r\}.$$

Für $0 \leq t \leq s \leq 1$ und $u,v \in \mathbb{R}$ mit $|u|,|v| \leq r$ und $|u-v| \leq r|t-s|^\alpha$ definieren wir die Funktionen

$$x_{t,s;u,v}(\tau) := \begin{cases} u & \text{falls } 0 \leq \tau \leq t, \\ u + \frac{u-v}{t-s}(\tau - t) & \text{falls } t < \tau < s, \\ v & \text{falls } s \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Wir zeigen weiter

$$\|x_{t,s;u,v}\|_{C^\alpha} = \|x_{t,s;u,v}\|_C + [x_{t,s;u,v}]_\alpha \leq 3r.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|x_{t,s;u,v}\|_C &= \sup_{0\leq\tau\leq 1} |x_{t,s;u,v}| \\
&= \max_{0\leq\tau\leq 1} \left\{ |u|, |v|, \left| u + \frac{u-v}{t-s}(\tau - t) \right| \right\} \\
&\leq r + |u-v| \\
&\leq r + r|t-s|^\alpha \\
&\leq 2r,
\end{aligned}$$

da $\left|\frac{\tau-t}{t-s}\right| \leq 1$. Zur Abschätzung des zweiten Summanden unterscheiden wir fünf Fälle:

1. Fall: Sei $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq t$. Es folgt

$$\begin{aligned}
[x_{t,s;u,v}]_\alpha &= \sup_{\tau_1\neq\tau_2} \frac{x_{t,s;u,v}(\tau_1) - x_{t,s;u,v}(\tau_2)}{|\tau_2 - \tau_1|^\alpha} \\
&= \sup_{\tau_1\neq\tau_2} \frac{|u-u|}{|\tau_2 - \tau_1|^\alpha} = 0 \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Analaog erhält man

$$[x_{t,s;u,v}]_\alpha = 0 \leq r$$

für $t \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$.

2. Fall: Sei $0 \leq \tau_1 \leq t$ und $s \leq \tau_2 \leq 1$. Aus der Ungleichung

$$|\tau_2 - \tau_1|^\alpha \geq |s-t|^\alpha$$

folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
[x_{t,s;u,v}]_\alpha &= \sup_{\tau_1\neq\tau_2} \frac{|v-u|}{|\tau_2 - \tau_1|^\alpha} \\
&\leq \frac{r|s-t|^\alpha}{|s-t|^\alpha} \\
&= r.
\end{aligned}$$

3. Fall: Sei $t < \tau_1, \tau_2 < s$. Da $1 - \alpha > 0$ und außerdem $|\tau_2 - \tau_1| \leq |s-t|$ gelten,

folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
[x_{t,s;u,v}]_\alpha &= \sup_{\tau_1\neq\tau_2} \frac{\left|u + \frac{u-v}{t-s}(\tau_2 - t) - u - \frac{u-v}{t-s}(\tau_1 - t)\right|}{|\tau_2-\tau_1|^\alpha} \\
&= \left|\frac{u-v}{t-s}\right| |\tau_2-\tau_1|^{1-\alpha} \\
&\leq \left|\frac{u-v}{t-s}\right| |s-t|^{1-\alpha} \\
&= \frac{|u-v|}{|s-t|^\alpha} \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

4. Fall: Seien $0 \leq \tau_1 \leq t$ und $t < \tau_2 < s$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
[x_{t,s;u,v}]_\alpha &= \frac{|\frac{u-v}{t-s}(\tau_2 - t)|}{|\tau_2-\tau_1|^\alpha} \\
&\leq \frac{|\frac{u-v}{t-s}(\tau_2 - t)|}{|\tau_2-t|^\alpha} \\
&= \left|\frac{u-v}{t-s}\right| |\tau_2-t|^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{|u-v|}{|t-s|^\alpha} \\
&\leq r,
\end{aligned}$$

da

$$|\tau_2-\tau_1|^\alpha \geq |\tau_2-t|^\alpha.$$

5. Fall: Seien $s \leq \tau_1 \leq 1$ und $t < \tau_2 < s$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
[x_{t,s;u,v}]_\alpha &= \frac{|u - v + \frac{u-v}{t-s}(\tau_2 - t)|}{|\tau_2-\tau_1|^\alpha} \\
&\leq \frac{|(u-v)(t-s) + (u-v)(\tau_2-t)|}{|s-t||\tau_2-s|^\alpha} \\
&= \frac{|(u-v)(t-s+\tau_2-t)|}{|t-s||\tau_2-s|^\alpha} \\
&= \frac{|u-v|}{|t-s|}|\tau_2-s|^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{|u-v|}{|s-t|^\alpha} \\
&\leq r,
\end{aligned}$$

da

$$|\tau_2-\tau_1|^\alpha \geq |\tau_2-s|^\alpha.$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\begin{aligned}\|x_{t,s;u,v}\|_{C^\alpha} &= \sup_{0\le\tau\le 1}|x_{t,s;u,v}(\tau)| + \sup_{\tau_1\neq\tau_2}\frac{|x_{t,s;u,v}(\tau_1)-x_{t,s;u,v}(\tau_2)|}{|\tau_1-\tau_2|^\alpha}\\ &\le 2r+r=3r.\end{aligned}$$

Nun können wir F auf $x_{t,s;u,v}$ anwenden und erhalten wegen $F(x_{t,s;u,v}) \in C^\alpha$ für die Punkte $\tau = t$ und $\tau = s$

$$|F(x_{t,s;u,v})(t) - F(x_{t,s;u,v})(s)| = |f(t,u) - f(s,v)| \le \mu(r)|t-s|^\alpha.$$

Weiterhin ist

$$\mu(r)\left(\frac{|u-v|}{r}\right) > 0$$

und daher auch

$$|f(t,u)-f(s,v)| \le \mu(r)|t-s|^\alpha + \mu(r)\left(\frac{|u-v|}{r}\right) = \mu(r)\left(|t-s|^\alpha + \frac{|u-v|}{r}\right).$$

□

Aus der Bedingung (1) folgt außerdem die Stetigkeit von f und mit Satz (2.1) auch $F(C) \subseteq C$. Um zu zeigen, dass Satz (2.6) ohne die Beschränktheitsforderung (1) falsch ist, betrachten wir das folgende Beispiel nach Berkolajko und Rutitskij [1]:

Beispiel 2.7. Wir definieren:

$$f : [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(t,u) := \begin{cases} 0 & \text{falls } u \le t^{\alpha/2}, \\ \frac{1}{u^{2/\alpha}} - \frac{t}{u^{4/\alpha}} & \text{falls } u > t^{\alpha/2}. \end{cases}$$

Der durch f erzeugte Nemytskii-Operator F bildet den Raum C^α in sich ab. Um dies zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass jede Funktion $x \in C^\alpha$ auf der Menge $\Delta_x := \{t : 0 \le t \le 1, x(t) > t^{\alpha/2}\}$ von Null weg beschränkt ist. Wäre dies nicht der Fall, würde ein $t \in \Delta_x$ existieren, sodass

$$x(t) < \delta \text{ für alle } \delta > 0$$

gelte. Daraus würde aber $x(t) = 0$ folgen, was im Widerspruch zu $x(t) > t^{\alpha/2}$ für $t \in \Delta_x$ steht. Das heißt, es existiert ein $\delta_x > 0$ mit $x(t) \ge \delta_x$ für $t \in \Delta_x$. Seien nun $x \in C^\alpha$ und $s,t \in [0,1]$ fest. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

1. Fall: Sei $s,t \in \Delta_x$. In diesem Fall folgt wegen $|x(s)^{2/\alpha} - x(t)^{2/\alpha}| \le \|x\|_{C^\alpha}|s-t|^\alpha$

die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& |F(x)(s) - F(x)(t)| \\
= & \left|\frac{1}{x(s)^{2/\alpha}} - \frac{s}{x(s)^{4/\alpha}} - \frac{1}{x(t)^{2/\alpha}} + \frac{t}{x(t)^{4/\alpha}}\right| \\
= & x(s)^{-2/\alpha}x(t)^{-2/\alpha}|x(t)^{2/\alpha} - x(s)^{2/\alpha}| + |tx(t)^{-4/\alpha} - sx(s)^{-4/\alpha}| \\
\leq & x(s)^{-2/\alpha}x(t)^{-2/\alpha}|x(t)^{2/\alpha} - x(s)^{2/\alpha}| + |tx(t)^{-4/\alpha} - tx(s)^{-4/\alpha}| \\
& +|tx(s)^{-4/\alpha} - sx(s)^{-4/\alpha}| \\
\leq & x(s)^{-2/\alpha}x(t)^{-2/\alpha}|x(s)^{2/\alpha} - x(t)^{2/\alpha}| \\
& +t|x(s)^{-2/\alpha} + x(t)^{-2/\alpha}||x(s)^{-2/\alpha} - x(t)^{-2/\alpha}| + x(s)^{-4/\alpha}|s-t| \\
\leq & x(s)^{-2/\alpha}x(t)^{-2/\alpha}|x(s)^{2/\alpha} - x(t)^{2/\alpha}| + tx(s)^{-2/\alpha}x(t)^{-2/\alpha} \\
& \cdot|x(s)^{-2/\alpha} + x(t)^{-2/\alpha}| \cdot |x(t)^{2/\alpha} - x(s)^{2/\alpha}| + x(s)^{-4/\alpha}|s-t| \\
\leq & \delta_x^{-4/\alpha}\|x\|_{C^\alpha}|s-t|^\alpha + 2\delta_x^{-6/\alpha}\|x\|_{C^\alpha}|s-t|^\alpha + \delta_x^{-4/\alpha}|s-t| \\
\leq & L|s-t|^\alpha,
\end{aligned}$$

für

$$L := \delta_x^{-4/\alpha}\|x\|_{C^\alpha} + 2\delta_x^{-6/\alpha}\|x\|_{C^\alpha} + \delta_x^{-4/\alpha}.$$

2. Fall: Sei $s \in \Delta_x$ und $t \notin \Delta_x$. Wir erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& |F(x)(s) - F(x)(t)| \\
= & \left|\frac{1}{x(s)^{2/\alpha}} - \frac{s}{x(s)^{4/\alpha}}\right| \leq x(s)^{-4/\alpha}|x(s)^{2/\alpha} - s| \\
\leq & \delta_x^{-4/\alpha}\|x\|_{C^\alpha}|s-t|^\alpha + \delta_x^{-4/\alpha}|s-t| \\
\leq & \left(\delta_x^{-4/\alpha}\|x\|_{C^\alpha} + \delta_x^{-4/\alpha}\right)|s-t|^\alpha.
\end{aligned}$$

3. Fall: Sei $s, t \notin \Delta_x$. Es folgt $|F(x)(s) - F(x)(t)| = 0$.

Die Hölder-Bedingung ist in allen drei Fällen erfüllt und somit folgt $F(x) \in C^\alpha$. Um zu zeigen, dass der Nemytskii-Operator F jedoch nicht beschränkt ist, betrachten wir nun die Folge der konstanten Funktionen $x_n(t) := n^{-\alpha/2}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Für diese gilt

$$x_n \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty \text{ in } C^\alpha.$$

Allerdings gilt für das Bild von x_n unter F

$$\begin{aligned}
\|F(x_n)\|_{C^\alpha} &= \sup_{0\leq t\leq 1}|F(x_n)(t)| + \sup_{t\neq s}\frac{|F(x_n)(s) - F(x_n)(t)|}{|s-t|^\alpha} \\
&\geq \sup_{0\leq t<\frac{1}{n}}|n - tn^2| \\
&= n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Das heißt F ist in 0 nicht beschränkt. Außerdem folgt wegen

$$\lim_{u\to 0} f(0,u) = \lim_{u\to 0}\frac{1}{u^{2/\alpha}} = \infty$$

die Unstetigkeit von f in $(0,0)$. Somit kann f auch nicht Lipschitz- bzw. Hölder-stetig sein. Mit Satz (2.1) folgt außerdem $F(C) \nsubseteq C$.

Damit die Äquivalenz der Aussage in Satz (2.6) gilt, wird also die Beschränktheit von F in C^α als Voraussetzung benötigt.

3 Anhang

Satz 3.1 (Picard-Lindelöf [5]). *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung bezüglich der zweiten Komponente genügt. Dann existiert zu jedem Punkt $(a, b) \in G$ ein Intervall I mit $a \in I$, sodass das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), y(a) = b,$$

genau eine Lösung auf I besitzt.

Satz 3.2 (Tietze-Uryson [1]). *Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f eine stetige Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(X) \subseteq conv f(A)$.*

Satz 3.3 (Egorov-Riesz [1]). *Seien $x_n, x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ messbar.*

(a) Falls $x_n(s)$ für fast alle s gegen $x(s)$ konvergiert, so gilt $x_n \to x$ im Maß. Es gilt dann sogar für jedes $\varepsilon > 0$: Die Funktionenfolge $(x_n)_n$ konvergiert gleichmäßig außerhalb einer (geeignet gewähten) Menge vom Maß ε.

(b) Falls umgekehrt $x_n \to x$ im Maß gilt, so gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$, sodass $x_{n_k}(s)$ für fast alle s gegen $x(s)$ konvergiert.

Literaturverzeichnis

[1] Appell, Jürgen und Martin Väth: *Elemente der Funktionalanalysis - Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze.* Vieweg, Wiesbaden, 2005.

[2] Browder, Felix E.: *Nonlinear Functional Analysis and Nonlinear Integral Equations of Hammerstein and Urysohn Type.* In: Zarantonello, Eduardo E. (Herausgeber): *Contributions to Nonlinear Functional Analysis.* Academic Press, New York, London, 1971.

[3] Emmrich, Etienne und Jan Witte: *Differentialgleichungen I.* WS 05/06.

[4] Werner, Dirk: *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[5] Werner, Dirk: *Einführung in die höhere Analysis: topologische Räume, Funktionentheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[6] Wikipedia: *Wiktor Wladimirowitsch Nemyzki — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*, 2011. [Online; Stand 30. Juni 2012].

[7] Zeidler, Eberhard: *Vorlesung über nichtlineare Funktionalanalysis II.* Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977.

[8] Zeidler, Eberhard: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B.* Springer-Verlag, New York, 1990.