Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
FG Differentialgleichungen

Existenzsätze für spezielle Klassen semilinearer elliptischer Randwertprobleme

Seminararbeit

Seminar Differentialgleichungen
Sommersemester 2012

bei Prof. Dr. Etienne Emmrich

vorgelegt von

Aras Bacho und Mathieu Pascal Rosière

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

In dieser Seminararbeit möchten wir uns eine Klasse von semilinearen Randwertproblemen ansehen, die das Poissonproblem verallgemeinert. Anstatt der Poissongleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x) & \text{auf } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

möchten wir eine Differentialgleichung untersuchen, deren rechte Seite zusätzlich von u abhängt. Wir betrachten dazu eine Gleichung, die von Marino Badiale und Enrico Serra in ihrer Einführung "Semilinear Elliptic Equations for Beginners" behandelt wird, und präsentieren eines der dort vorgestellten Existenzresultate für das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - q(x)u(x) + h(x) & \text{auf } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit gewissen Funktionen, f,q und h und einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

1 Grundlagen aus der Funktionalanalysis und Variationsrechnung

1.1 Ableitungsbegriffe

Bevor wir uns mit der Existenz von Lösungen für Differentialgleichungen befassen, führen wir zunächst einige Begriffe aus der Funktionalanalysis und Variationsrechnung ein und geben die wichtigsten Sätze an, die für die nachfolgenden Existenzbeweise benötigt werden.

Da wir uns im Folgenden mit Minimierungsproblemen in Banachräumen befassen wollen, ist es zunächst sinnvoll, Ableitungsbegriffe für Banachräume einzuführen.

Definition 1.1.1 *Sei X ein Banachraum, $U \subset X$ offen, sowie $x_0 \in U$. Ein Funktional $f : U \to \mathbb{R}$ heißt Fréchet-differenzierbar in x_0, falls es ein lineares stetiges Funktional $\varphi_{x_0} \in X^*$ gibt, sodass*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \varphi_{x_0}, h \rangle}{\|h\|} = 0$$

ist. Falls f in jedem Punkt aus U Fréchet-differenzierbar ist, dann heißt f Fréchet-differenzierbar und die durch

$$f' : X \to X^*, x \mapsto \varphi_x$$

definierte Abbildung heißt Ableitung von f.

Fréchet-Differenzierbarkeit ist damit eine natürliche Erweiterung des Ableitungsbegriffs für endlich-dimensionale Räume. Es ist bekannt, dass in endlich-dimensionalen Räumen aus der Existenz aller Richtungsableitungen noch nicht die Differenzierbarkeit gefolgert werden kann. Sind jedoch alle Richtungsableitungen stetig, so folgt auch die Differenzierbarkeit. Ein analoges Resultat gilt im allgemeinen Banachraum:

Definition 1.1.2 *Unter den Bezeichnungen aus Definition 1.1.1 heißt f Gâteaux-differenzierbar in x_0, falls $\varphi_{x_0} \in X^*$ existiert, sodass*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \langle \varphi_{x_0}, h \rangle$$

für jedes $h \in X$ erfüllt ist. Mit f_G bezeichnen wir die Gâteaux-Ableitung von f.

Bemerkung. Gâteaux-Differenzierbarkeit ist schwächer als Fréchet-Differenzierbarkeit, d.h. erstere wird immer durch letztere impliziert, wie man folgendermaßen sieht: Ist φ_{x_0} die Fréchet-Ableitung von f und $h \in X \setminus \{0\}$ beliebig, so gilt insbesondere

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - \langle \varphi_{x_0}, th \rangle}{t\|h\|} = 0.$$

Durch Ersetzen von h durch $-h$ folgt die gleiche Aussage für den linksseitigen Grenzwert, sodass man nach Multiplikation mit $\|h\|$ und Umstellen auch

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \langle \varphi_{x_0}, h \rangle$$

erhält, also die Gâteaux-Differenzierbarkeit von f.

Zum Beweis der Aussage, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt, verwende man die Beispiele der endlich-dimensionalen Theorie für nicht-differenzierbare Funktionen, deren Richtungsableitungen dennoch null sind.[1] Wenn jedoch die Gâteaux-Ableitung stetig ist, folgt wie im endlich-dimensionalen Fall die Fréchet-Differenzierbarkeit.[2]

Eingeführt haben wir diese Begriffe, um eine Verallgemeinerung des Satzes von Fermat vorzustellen:

Satz 1.1.3 *Es sei X ein Banachraum und $f : U \to \mathbb{R}$ ein auf einer offenen Menge $U \subset X$ definiertes Fréchet-differenzierbares Funktional. Weiterhin sei $\bar{x}$ ein lokaler Minimierer von f. Dann gilt*

$$f'(\bar{x}) = 0.$$

Beweis. Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$. Wir betrachten für $h \in X$ folgende Hilfsfunktion:

$$f_h : D \to \mathbb{R}, t \mapsto f(\bar{x} + th),$$

wobei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von 0 sei, sodass $\bar{x} + th \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ ist für alle $t \in D$. Für jedes h nimmt dann f_h in $t = 0$ ein lokales Minimum an. Da f Fréchet-differenzierbar ist, ist auch f_h differenzierbar, sodass aus dem Satz von Fermat $f_h'(0) = 0$ folgt. Wegen der Fréchet-Differenzierbarkeit existiert insbesondere f_G und $f_G(\bar{x}) = 0$ nach dem eben gezeigten. Andererseits gilt auch $f_G(\bar{x}) = f'(\bar{x})$ und es folgt die Behauptung.

□

Definition 1.1.4 *Sei X ein Banachraum, $U \subset X$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ Fréchet-differenzierbar. Dann heißt die Gleichung*

$$f'(x) = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichung und ihre Lösungen heißen kritische Punkte.

[1] Ein Beispiel für eine solche Funktion findet sich in [3] auf Seite 102.
[2] Vergleiche hierzu [7], Satz III.5.4 (c).

1.2 Existenz von Minimierern

Eben haben wir gezeigt, dass Minimierer von Fréchet-differenzierbaren Funktionalen stets kritische Punkte sind. Somit können wir folgendermaßen vorgehen, um Existenzsätze für gewisse Differentialgleichungen zu beweisen:

1. Zu gegebener Differentialgleichung finde ein Fréchet-differenzierbares Funktional, sodass die Differentialgleichung die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals ist.
2. Zeige die Existenz eines lokalen oder globalen Minimierers dieses Funktionals.
3. Dieser Minimierer ist dann nach dem letzten Satz auch Lösung der Differentialgleichung.

Den dritten Punkt haben wir bereits abgehandelt. Kommen wir also zum zweiten. Wie zeigt man die Existenz lokaler oder globaler Minimierer? Im Allgemeinen können wir dazu nichts sagen, unter gewissen Voraussetzungen an das Funktional f aber schon. Einige dieser Voraussetzungen fassen wir in einer Definition zusammen:

Definition 1.2.1 Es sei X ein Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional.

- f heißt schwach unterhalb folgenstetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen x konvergiert,
$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x)$$
ist.
- Das Funktional f heißt koerzitiv, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$\|x_n\| \to \infty$$
auch
$$f(x_n) \to \infty$$
erfüllt ist.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich für reflexive Banachräume die Existenz eines globalen Minimierers beweisen. Dazu verwenden wir ein bekanntes Resultat aus der Funktionalanalysis: Jede beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge. Diese Aussage lässt sich entweder direkt beweisen[3] oder als Folgerung aus dem Satz von Banach-Alaoglu und dem Satz von Eberlein-Shmulyan[4].

Mithilfe dieser Aussage können wir nun einen Existenzsatz für globale Minimierer beweisen:

Satz 1.2.2 *Es sei X ein reflexiver Banachraum. Dann besitzt jedes schwach unterhalb folgenstetige und koerzitive Funktional einen globalen Minimierer.*

Beweis. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ schwach unterhalb folgenstetig und koerzitiv. Außerdem sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{y\in X} f(y).$$
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn andernfalls gäbe es wegen der Koerzitivität von f eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_{n_k}) \to \infty$.

[3] Beweise finden sich z.B. in [1], Satz 6.9 oder in [7], Satz III.3.7.

[4] Besagte Sätze sind in [7] unter Korollar VIII.3.12 und Theorem VIII.6.1 zu finden.

Wie oben bemerkt, enthält jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge. Konvergiere also $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ schwach gegen x. Dann folgt

$$f(x) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leqslant f(x),$$

da f schwach unterhalb folgenstetig ist. Somit ist x ein globaler Minimierer von f.

□

Um zu zeigen, dass ein Funktional schwach unterhalb folgenstetig ist, möchten wir uns gerne auf Teilfolgen zurückziehen können. Wir formulieren und beweisen daher folgendes Lemma, das sowohl für Stetigkeit als auch für schwache Unterhalbfolgenstetigkeit gilt. Der Einfachheit halber formulieren wir es für Stetigkeit:

Lemma 1.2.3 *Sei X ein Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Dann ist f schon stetig in $x \in X$, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert, eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält mit*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x).$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in X$. Für die Stetigkeit ist zu zeigen, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dann gegen $f(x)$ konvergiert. Wir zeigen

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Es sei $j = \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ der kleinste Häufungswert von $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, der auch $-\infty$ sein könnte. Damit existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = j.$$

Dann konvergiert jede Teilfolge von $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen j. Nach Voraussetzung gibt es aber auch eine Teilfolge von $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, welche gegen $f(x)$ konvergiert. Also folgt $j = f(x)$. Analog zeigt man dies für den Limes superior, sodass die Aussage damit bewiesen ist.

□

Bemerkung. Im Falle schwacher Unterhalbfolgenstetigkeit ersetze man das Gleichheitszeichen durch $\leqslant$ und betrachte nur den Limes inferior. Dieses Lemma wird uns sehr behilflich sein, wenn wir nur Konvergenzaussagen über Teilfolgen treffen können und dennoch Stetigkeit oder schwache Unterhalbfolgenstetigkeit folgern möchten.

1.3 L^p-Räume und Sobolew-Räume

Um die vorgestellten Resultate auf Differentialgleichungen anwenden zu können, benötigen wir spezielle (reflexive) Banachräume oder Hilberträume, in denen wir arbeiten können. Dazu führen wir in aller Kürze L^p- und Sobolew-Räume ein und geben anschließend die wichtigsten Resultate an, die wir im Folgenden benutzen möchten.

Definition 1.3.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Für $1 \leqslant p < \infty$ definieren wir*

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega f(x)^p dx\right)^{1/p}$$

und für $p = \infty$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := ess\ sup|f(x)|.$$

Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega)$ den Raum aller Äquivalenzklassen fast überall gleicher messbarer Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_p < \infty$.

Mit $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnen wir für $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leqslant p \leqslant \infty$ den Raum aller $L^p(\Omega)$-Funktionen f, sodass auch die schwache Ableitung $D^\alpha f$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leqslant k$ existiert und in $L^p(\Omega)$ liegt. Die $W^{k,p}(\Omega)$-Räume heißen Sobolew-Räume. Als Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ definieren wir

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

für $p < \infty$, bzw.

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Für den Raum $W^{k,2}(\Omega)$ schreiben wir auch $H^k(\Omega)$. Den Abschluss der Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnen wir mit $W_0^{k,p}(\Omega)$ bzw. $H_0^k(\Omega)$.

Hierbei sei angemerkt, dass die Norm im Raum $H^1(\Omega)$ durch das folgende Skalarprodukt induziert ist:

$$(f, g)_{H^1} := \int_\Omega f(x)g(x)dx + \int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)dx.$$

Außerdem sind alle Sobolew-Räume vollständig.[5] Demnach ist $H^1(\Omega)$ mit dem eben angegebenen Skalarprodukt sogar ein Hilbertraum. Weiterhin lässt sich daraus schließen, dass $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ reflexiv sind, sodass diese Räume geeignet sind, um den im letzten Abschnitt bewiesenen Existenzsatz für Minimierer zu verwenden.

Bemerkung. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden wir die euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$ mit $|\cdot|$ bezeichnen und Normen in Funktionenräumen mit $\|\cdot\|$ und entsprechenden Indizes.

In den späteren Beweisen werden wir häufig Einbettungen eines Sobolewraumes in einen anderen oder in einen L^p-Raum benötigen. Daher geben wir kurz einige solcher Einbettungssätze an.

Satz 1.3.2 (Sobolew) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist $W_0^{k,p}(\Omega)$ stetig eingebettet in $L^{dp/(d-kp)}(\Omega)$, falls $1 \leqslant kp < d$ gilt.*

Beweis. Der Satz wird in [1] als Satz 8.9 und in [4] als Satz 6.11 bewiesen.

Satz 1.3.3 (Rellich-Kondrachow) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $1 \leqslant p < d$. Dann ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ kompakt eingebettet in $L^q(\Omega)$, falls $1 \leqslant q < \frac{dp}{d-p}$ gilt. Für $q = \frac{dp}{d-p}$ ist die Einbettung immer noch stetig.*

Beweis. Ein Beweis der ersten Aussage findet sich in [4], Satz 6.18. Die zweite folgt sofort aus dem Einbettungssatz von Sobolew mit $k = 1$.

Aus dem letzten Einbettungssatz können wir das folgende nützliche Korollar ableiten:

[5] Vergleiche [4], Satz 5.10.

Korollar 1.3.4 *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *mit* $d > 2$ *ein beschränktes Gebiet. Weiterhin sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine in* $H_0^1(\Omega)$ *schwach konvergente Folge mit Grenzfunktion* f *und* $p < \frac{2d}{d-2}$. *Dann gibt es eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_{n_k} \to f$ *in* $L^p(\Omega)$*, die außerdem fast überall betragsmäßig durch eine Funktion* $g \in L^p(\Omega)$ *beschränkt ist und fast überall gegen* f *konvergiert.*

Beweis. Als schwach konvergente Folge ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Aus dem letzten Einbettungssatz folgt dann die Existenz einer in $L^p(\Omega)$ (stark) konvergenten Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei sich die Grenzfunktion natürlich nicht ändert.

Die anderen beiden Eigenschaften folgen aus der Konvergenz in $L^p(\Omega)$, wobei diese auch nur für Teilfolgen gelten. Es ist also genau genommen aus $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge auszuwählen, die die beiden anderen Eigenschaften besitzt.

□

Bemerkung. Wenn man nur $p = \frac{2d}{d-2}$ voraussetzt, erhält man dasselbe Resultat unter der Voraussetzung, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark konvergiert.

Als letzten wichtigen Satz benötigen wir die Ungleichung von Poincaré-Friedrichs:

Satz 1.3.5 (Poincaré-Friedrichs) Für $f \in H_0^1(\Omega)$ gilt mit einer Konstante $C > 0$

$$\|f\|_2^2 \leqslant C \int_\Omega (\nabla f(x))^2 dx.$$

Beweis. Die Aussage wird in größerer Allgemeinheit in [4] als Satz 6.13 bewiesen.

Da Sobolew-Räume auch stets Banachräume sind, können wir in diesen Räumen im oben beschriebenen Sinne differenzieren. Für die in den nächsten Abschnitten untersuchte Klasse von Differentialgleichungen ist insbesondere die Ableitung eines bestimmten Funktionals von Bedeutung.

Satz 1.3.6 Es sei $d > 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Des Weiteren gebe es $a, b > 0$, sodass

$$|f(t)| \leqslant a + b|t|^{\frac{d+2}{d-2}}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Wir setzen $F(t) := \int_0^t f(s)ds$. Dann ist das folgendermaßen definierte Funktional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ Fréchet-differenzierbar:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u(x)^2 dx - \int_\Omega F(u(x))dx - \int_\Omega h(x)u(x)dx.$$

Seine Ableitung ist gegeben durch

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega q(x)u(x)v(x)dx - \int_\Omega f(u(x))v(x)dx - \int_\Omega h(x)v(x)dx$$

für $v \in H_0^1(\Omega)$.

Beweis. Wir betrachten jeden der vier Summanden einzeln und weisen nach, dass die Fréchet-Ableitung wirklich existiert und durch den entsprechenden Ausdruck gegeben ist.

1. Zunächst stellen wir fest, dass

$$B(u,v) := \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx$$

eine symmetrische Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$ definiert. Aus der Ungleichung von Poincaré-Friedrichs folgt, dass diese sogar stark positiv ist, also insbesondere ein Skalarprodukt, und die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm äquivalent zur oben eingeführten Norm auf $H^1(\Omega)$ ist. Damit ist die Bilinearform automatisch stetig. Sei nun $a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$a(u) := B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Dann ist dies gerade das Quadrat der von obiger Bilinearform induzierten Norm. Wie im Endlichdimensionalen beweist man

$$\langle a'(u), v\rangle = 2 \cdot B(u,v) = 2\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

2. Wenden wir uns nun dem zweiten Term zu: Wieder betrachten wir eine symmetrische Bilinearform:
$$B(u,v) := \int_\Omega q(x)u(x)v(x)dx.$$
Diese Bilinearform ist stetig, denn mit einer Konstante $C > 0$ gilt
$$\begin{aligned} |B(u,v)| &= \left|\int_\Omega q(x)u(x)v(x)dx\right| \\ &\leqslant \|q\|_\infty \cdot \left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \\ &\leqslant \|q\|_\infty \cdot \|u\|_2\|v\|_2 \\ &\leqslant \|q\|_\infty \cdot C\|u\|\|v\|, \end{aligned}$$
wobei letztere Norm die Norm in $H_0^1(\Omega)$ bezeichne. Benutzt haben wir hierbei die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, sowie die stetige Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ nach dem Satz von Rellich-Kondrachow. Wie oben erhalten wir daraus für
$$a(u) := \int_\Omega q(x)u(x)^2 dx$$
als Ableitung
$$\langle a'(u), v\rangle = 2\int_\Omega q(x)u(x)v(x)dx$$
und damit den zweiten Summanden in der Ableitung von J.

3. Zum dritten Summanden bemerken wir zunächst, dass wegen
$$\begin{aligned} |F(u(x))| &= \left|\int_0^{|u(x)|} f(s)ds\right| \\ &\leqslant \int_0^{|u(x)|} \left(a + b \cdot s^{\frac{d+2}{d-2}}\right) ds \\ &= a|u(x)| + b\frac{d-2}{2d}|u(x)|^{\frac{2d}{d-2}} \end{aligned}$$
die durch $x \mapsto F(u(x))$ gegebene Funktion wirklich integrierbar ist, denn sowohl die Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ als auch die Einbettung in $L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$ ist nach dem Satz von Rellich-Kondrachow stetig. Wir zeigen nun, dass das Funktional auch Gâteaux-differenzierbar ist:

Dazu sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Da f die Ableitung von F ist, existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\vartheta \in (0,1)$, sodass

$$\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t} = f(u(x)+\vartheta tv(x))v(x)$$

ist. Um anschließend den Satz von Lebesgue benutzen zu können, schätzen wir weiter ab:

$$\begin{aligned} |f(u(x)+\vartheta tv(x))v(x)| &\leqslant a|v(x)| + b|u(x)+\vartheta tv(x)|^{\frac{d+2}{d-2}} v(x) \\ &\leqslant C(|v(x)| + |u(x)|^{\frac{d+2}{d-2}}|v(x)| + |v(x)|^{\frac{2d}{d-2}}) \end{aligned}$$

mit einer Konstante $C > 0$. Die rechte Seite ist nach dem Satz von Rellich-Kondrachow integrierbar und der Satz von Lebesgue wird anwendbar.

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t} dx = \int_\Omega F'(u(x))v(x)dx = \int_\Omega f(u(x))v(x)dx.$$

Der Satz von Lebesgue ermöglicht es uns also, von der Gâteaux-Ableitung zur Ableitung von F im (dann festen) Punkt $u(x)$ in Richtung $v(x)$ überzugehen. Es bleibt demnach nur zu zeigen, dass

$$\langle G(u), v\rangle := \int_\Omega f(u(x))v(x)dx$$

auch die Fréchet-Ableitung ist. Dazu ist die Stetigkeit von G nachzuweisen. Sei also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $u \in H_0^1(\Omega)$ konvergiert. Nach Korollar 1.3.4 existiert dann eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die in $L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$ und fast überall konvergiert und außerdem durch eine Funktion $w \in L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$ beschränkt ist. Wir haben dann

$$|\langle G(u_{n_k}) - G(u), v\rangle| \leqslant \int_\Omega |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))||v(x)|dx.$$

Um auf die Abhängigkeit von v verzichten zu können, wenden wir die Höldersche Ungleichung an und erhalten

$$\int_\Omega |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))||v(x)|dx \leqslant \left(\int_\Omega |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))|^{\frac{2d}{d+2}} dx\right)^{\frac{d+2}{2d}} \cdot \left(\int_\Omega |v|^{\frac{2d}{d-2}} dx\right)^{\frac{d-2}{2d}}. \quad (*)$$

Es reicht demnach zu zeigen, dass der erste Faktor gegen null strebt. Das machen wir wieder mit dem Satz von Lebesgue. Wir schätzen dazu folgendermaßen ab, wobei wir die nach Voraussetzung geltende Abschätzung

$$|f(t)| \leqslant a + b|t|^{\frac{d+2}{d-2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

sowie die Tatsache, dass $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall durch w beschränkt ist, benutzen.

$$\begin{aligned} |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))|^{\frac{2d}{d+2}} &\leqslant C(1 + |u_{n_k}(x)|^{\frac{d+2}{d-2}} + |u(x)|^{\frac{d+2}{d-2}})^{\frac{2d}{d+2}} \\ &\leqslant C(1 + |w(x)|^{\frac{d+2}{d-2}} + |u(x)|^{\frac{d+2}{d-2}})^{\frac{2d}{d+2}} \\ &\leqslant C(1 + |w(x)|^{\frac{2d}{d-2}} + |u(x)|^{\frac{2d}{d-2}}). \end{aligned}$$

Die Konstante C ist hier als generische Konstante aufzufassen. Da der letzte Ausdruck integrierbar ist, folgt aus dem Satz von Lebesgue zusammen mit obigen Ungleichungen

$$\lim_{k\to\infty} |\langle G(u_{n_k}) - G(u), v\rangle| = 0.$$

Aus $(*)$ ergibt sich, dass ebenfalls die Operatornorm

$$\|G(u_{n_k}) - G(u)\|$$

gegen null strebt. Mit Lemma 1.2.3 folgt daraus die Stetigkeit von G, also die Fréchet-Differenzierbarkeit.

4. Für den Term $\int_\Omega h(x)u(x)dx$ bemerken wir, dass die durch $u \mapsto \int_\Omega h(x)u(x)dx$ gegebene Abbildung linear und stetig ist, sodass wir die Fréchet-Differenzierbarkeit unmittelbar erhalten mit

$$\int_\Omega h(x)v(x)dx$$

als Ableitung in Richtung $v \in H_0^1(\Omega)$.

Aus diesen vier Einzelergebnissen erhalten wir, dass die Fréchet-Ableitung von J existiert und wirklich dem oben angegebenen Ausdruck entspricht.

□

Bemerkung. In Kapitel 2 möchten wir den letzten Satz gerne benutzen, aber die Bedingung

$$|f(t)| \leqslant a + b|t|^{\frac{d+2}{d-2}}$$

durch

$$|f(t)| \leqslant a + b|t|$$

ersetzen. Der letzte Satz bleibt dennoch anwendbar: Für $|t| > 1$ ist

$$|t| < |t|^{\frac{d+2}{d-2}}$$

und die Funktion f ist stetig, also auf $[-1, 1]$ beschränkt. Demzufolge haben wir

$$|f(t)| \leqslant a + b|t| \leqslant \tilde{a} + b|t|^{\frac{d+2}{d-2}}$$

mit $\tilde{a} = a + \sup_{s\in[-1,1]} |f(s)|$, was zeigt, dass auch in diesem Fall die Voraussetzung des letzten Satzes erfüllt ist.

1.4 Eigenwerte

Da wir im nächsten Kapitel eine Charakterisierung des ersten Eigenwertes eines bestimmten Differentialoperators benötigen, führen wir hier in aller Kürze die wichtigsten Begriffe ein. Dabei beschränken wir uns auf den Operator $-\Delta + q$, wobei wir wieder $q \in L^\infty(\Omega)$ mit einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ annehmen wollen.

Definition 1.4.1 *Für den Operator $-\Delta + q$ heißt $u \in H_0^1(\Omega)$ Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls $u \neq 0$ und eine schwache Lösung*[6] *von*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) - \lambda u(x) = 0 & \textit{für } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \textit{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ist.

Neben dem Begriff des Eigenwertes lässt sich auch der des Rayleighquotienten auf Differentialoperatoren übertragen. Es bezeichne dazu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ das L^2-Skalarprodukt. Würden wir zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u \neq 0$ mit $u(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ zulassen, so ließe sich der Rayleighquotient analog zum endlich-dimensionalen Fall als

$$R_{-\Delta+q}(u) = \frac{\langle -\Delta u + qu, u \rangle_{L^2}}{\langle u, u \rangle_{L^2}}$$

[6] Zu schwachen Lösungen siehe auch nächstes Kapitel.

definieren. Diesen Term können wir als Integral ausschreiben und anschließend die erste Greensche Formel benutzen, bei der die Randterme wegen $u(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ wegfallen. Man erhält

$$\begin{aligned} R_{-\Delta+q}(u) &= \frac{-\int_\Omega u(x)\Delta u(x)dx + \int_\Omega q(x)u(x)^2dx}{\int_\Omega u(x)^2dx} \\ &= \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx + \int_\Omega q(x)u(x)^2dx}{\int_\Omega u(x)^2dx}. \end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck ist auch für $u \in H_0^1(\Omega)$ definiert.

Dies motiviert folgende Definition:

Definition 1.4.2 *Für den Operator $-\Delta + q$ heißt die durch*

$$R_{-\Delta+q}(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx + \int_\Omega q(x)u(x)^2dx}{\int_\Omega u(x)^2dx}$$

definierte Abbildung $R_{-\Delta+q} : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ Rayleighquotient.

Für den Rayleighquotienten gilt der folgende Satz, der in [2] als Satz 1.7.6 (1) zu finden ist.

Satz 1.4.3 Der Operator $-\Delta + q$ besitzt einen kleinsten Eigenwert λ_1 und jede zugehörige Eigenfunktion löst die Aufgabe

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} R_{-\Delta+q}(u)$$

mit dem Optimalwert λ_1.

Bemerkung. Insbesondere liefert dies die Ungleichung

$$\lambda_1 \int_\Omega u(x)^2dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx + \int_\Omega q(x)u(x)^2dx$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$. Setzt man $q = 0$, so stimmt sie mit der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung[7] überein, wobei die auftretende Konstante durch $\frac{1}{\lambda_1}$ gegeben ist. Der letzte Satz zeigt, dass diese Konstante sogar optimal ist.

Korollar 1.4.4 *Ist q fast überall nichtnegativ, so gilt*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_1(-\Delta) > 0,$$

wobei $\lambda_1(-\Delta)$ den ersten Eigenwert des Operators $-\Delta$ bezeichne.

Beweis. Diese Aussage folgt aus

$$R_{-\Delta+q}(u) \geqslant R_{-\Delta}(u) > 0$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ und dem letzten Satz.

□

[7] siehe Satz 1.3.5.

2 Variationelle Methoden

2.1 Elliptische Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden wir einen Existenzbeweis für spezielle elliptische semilineare Randwertprobleme präsentieren, der sich auf die im ersten Kapitel vorgestellten Resultate stützt. Zuvor geben wir jedoch die allgemeine Definition einer elliptischen Differentialgleichung mithilfe des elliptischen Differentialoperators an[8] :

Für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wird folgende Abbildungsvorschrift definiert. Es seien $a_s \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, wobei s alle Multiindizes der Länge d durchlaufe.[9] Außerdem verschwinde a_s nicht identisch für einen Multiindex s mit $|s| = m$. Dann ist der lineare partielle Differentialoperator der Ordnung m definiert durch

$$Lu := \sum_{|s| \leqslant m} a_s D^s u$$

Der Anteil mit den höchsten Ableitungen heißt Hauptteil des Differentialoperators und wird mit L_H bezeichnet. Es gilt also

$$L_H u = \sum_{|s|=m} a_s(x) D^s u.$$

Um zu definieren, was es heißt, dass L elliptisch ist, stellen wir jetzt Anforderungen an die Koeffizientenfunktionen. Dazu definieren wir folgendes Polynom:

$$L_H(x, \xi) = \sum_{|s|=m} a_s(x) \xi^s,$$

wobei $x \in \mathbb{R}^d$ ist. Für festes x definiert dies also ein Polynom in d Variablen.

Definition 2.1.1 *Der lineare Differentialoperator L heißt elliptisch im Punkt x, falls $L_H(x, \cdot)$ nur in Null eine Nullstelle besitzt. Er heißt elliptisch, falls er in jedem $x \in \mathbb{R}^d$ elliptisch ist.*

Elliptiziät stellt damit nur eine lokale Eigenschaft dar. Eine entsprechende globale Eigenschaft ist die gleichmäßige Elliptizität:

Definition 2.1.2 *Der lineare Differentialoperator heißt gleichmäßig elliptisch, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass*

$$|L_h(x, \xi)| \geqslant M |\xi|^m$$

für alle $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Diese Bedingung sichert, dass $L_H(x, \xi)$ für festes $\xi \neq 0$ bei variablem x nicht beliebig nahe an die Null herankommen kann. Der Abstand zur Null hängt also im Wesentlichen nur noch von ξ ab.

Besonders ist die Eigenschaft jedoch nur deshalb, weil sie auf ganz Ω erfüllt sein muss. Für kompakte Teilmengen folgt sie aus der Elliptizität, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.1.3 *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $n \geqslant 2$ offen, $K \subset \Omega$ kompakt und der lineare Differentialoperator L elliptisch, so gibt es $M > 0$ mit*

$$|L_H(x, \xi)| \geqslant M |\xi|^m.$$

[8] In diesem Abschnitt orientieren wir uns an [8].

[9] Die Bedingungen, die an die Koeffizientenfunktionen gestellt werden, hängen vom untersuchten Problem ab. Es wäre beispielsweise möglich, nur Stetigkeit, stetige Differenzierbarkeit, Beschränktheit oder Messbarkeit zu fordern. Vergleiche [1], Abschnitt 4.4 oder [2], Abschnitt 1.2.3.

Beweis. Da alle Koeffizientenfunktionen im linearen Differentialoperator stetig sind, definiert

$$|L_H(\cdot,\cdot)| : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Insbesondere ist sie damit stetig auf der kompakten Menge $K \times S^{d-1}$, wobei S^{d-1} die $d-1$-dimensionale Einheitssphäre bezeichne. Aufgrund der Kompaktheit nimmt die Funktion dort ein Minimum an, welches wegen der Elliptizität von Null verschieden ist. Wir setzen also

$$M := \min_{(x,\xi)\in K\times S^{d-1}} |L_H(x,\xi)|.$$

Damit gilt für beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$M \leqslant \left| L_H(x, \frac{\xi}{|\xi|}) \right| = \frac{1}{|\xi|^m} |L_H(x,\xi)|,$$

sodass nach Multiplikation mit $|\xi|^m$ die Behauptung folgt.

□

Definition 2.1.4 *Eine Differentialgleichung heißt elliptisch, wenn die Ableitungsterme durch einen elliptischen Differentialoperator beschrieben werden.*

Beispiel. Der Laplace-Operator ist elliptisch. Damit ist

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(u(x)) + h(x)$$

mit gewissen Funktionen q, f und h ein Beispiel für eine elliptische Differentialgleichung. Diese ist semilinear, denn die Nichtlinearität entsteht nur durch die Funktion f, welche aber nicht von den Ableitungen von u abhängt.

2.2 Schwache Lösungen und Existenzaussagen

Wir behandeln in diesem Abschnitt semilineare elliptische Randwertprobleme der Form

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q\,(x)u(x) = f\,(u(x)) + h\,(x) & , \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases}, \qquad (2.1)$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt ist.

Definition 2.2.1 *Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems (2.1), wenn folgende Gleichung für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt:*

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega q(x)u(x) \cdot v(x) dx = \int_\Omega f(u(x))v(x) dx + \int_\Omega h(x)v(x) dx\,. \qquad (2.2)$$

Nun zeigen wir, wie schwache Lösungen von (2.1) im Zusammenhang zu kritischen Punkten des zugehörigen Funktionals stehen. Das bereits im ersten Kapitel diskutierte[10] Funktional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$J(u) \;= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u(x)^2 dx - \int_\Omega F\,(u(x)) dx - \int_\Omega h(x)u(x)\, dx \qquad (2.3)$$

[10] siehe dazu Satz 1.3.6

ist das zur Differentialgleichung (2.1) gehörige Energiefunktional, wobei $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Wie in Satz 1.3.6 gezeigt wurde, ist J Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega q(x)u(x)v(x)dx - \int_\Omega f(u(x))v(x)dx - \int_\Omega h(x)v(x)dx, \quad (2.4)$$

für $v \in H_0^1(\Omega)$, wenn f stetig ist und die Bedingung

$$|f(t)| \leqslant a + b|t|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $a, b > 0$ erfüllt.

Lemma 2.2.2 *Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ ist genau dann eine schwache Lösung von (2.1), wenn u die Euler-Lagrange-Gleichung*

$$J'(u) = 0$$

erfüllt. Insbesondere ist jeder globale Minimierer von J eine schwache Lösung.

Beweis. Es gelte $\langle J'(u), v\rangle = 0$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann folgt nach äquivalenter Umformung

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega q(x)u(x) \cdot v(x)dx = \int_\Omega f(u(x))v(x)dx + \int_\Omega h(x)v(x)dx$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Somit ist u eine schwache Lösung der Differentialgleichung (2.1).

Die andere Richtung ist nach Definition eines kritischen Punktes trivialerweise erfüllt.

□

Proposition 2.2.3 *Gilt für den ersten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_1(-\Delta + q) > 0$, so definiert die Bilinearform*

$$(u \mid v) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega q(x)u(x) \cdot v(x)dx, \qquad (2.5)$$

ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ und die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm, welche wir im Weiteren mit $\|\cdot\|$ bezeichnen werden, ist äquivalent zu der auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$ definierten Norm

$$\|u\|_{1,2}^2 = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega u(x)^2 dx,$$

d.h. es existieren reelle Zahlen $c, C > 0$, sodass für alle $u \in H_0^1(\Omega)$

$$c\|u\|_{1,2} \leqslant \|u\| \leqslant C\|u\|_{1,2} \qquad (2.6)$$

gilt.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Äquivalenz beider Normen. Offensichtlich ist die Ungleichungskette für $u \equiv 0$ auf Ω erfüllt. Sei also im Folgenden $u \neq 0$. Aus der Bemerkung nach Satz 1.4.3 erhält man

$$\lambda_1\|u\|_2^2 = \lambda_1 \int_\Omega u(x)^2 dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega q(x)u(x)^2 dx = \|u\|^2. \quad (2.7)$$

Es ist zu zeigen, dass

$$c^2\|u\|_{1,2}^2 \leqslant \|u\|^2$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ mit einer Konstante $c > 0$ gilt.

Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $u_n \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|u_n\|_{1,2} = 1$ und

$$\frac{1}{n}\|u_n\|_{1,2}^2 \geqslant \|u_n\|^2.$$

Wegen $\|u_n\|_{1,2}^2 = 1$ ergibt sich nach Ausschreiben der Integrale

$$\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx + \int_\Omega q(x) u_n(x)^2 dx \leqslant \frac{1}{n}.$$

Mithilfe von (2.7) folgt daraus

$$\lambda_1 \int_\Omega u_n(x)^2 dx \leqslant \frac{1}{n}$$

und die Konvergenz von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der L^2-Norm gegen die Nullfunktion, weil $\lambda_1 > 0$ ist. Da $q \in L^\infty(\Omega)$ ist, gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega q(x) u_n(x)^2 dx = 0.$$

Dies ergibt einen Widerspruch, denn es folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx + \int_\Omega u_n(x)^2 dx \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx + \int_\Omega u_n(x)^2 dx + \int_\Omega q(x) u_n(x)^2 dx \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx + \int_\Omega q(x) u_n(x)^2 dx \right) \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also muss die Annahme falsch gewesen sein und es gibt eine Konstante $c > 0$ mit

$$c^2 \|u\|_{1,2}^2 \leqslant \|u\|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Für die andere Abschätzung erhalten wir mit $C := \sqrt{\max\{1, \|q\|_\infty\}} > 0$

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega q(x) u(x)^2 dx \\
&\leqslant \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \|q\|_\infty \int_\Omega u(x)^2 dx \\
&\leqslant \max\{1, \|q\|_\infty\} \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega u(x)^2 dx \right) = C^2 \|u\|_{1,2}^2.
\end{aligned}$$

Die Bilinearität und die Symmetrie des Skalarproduktes (2.5) sind trivialerweise erfüllt. Die positive Definitheit folgt aus den eben gezeigten Abschätzungen zur Äquivalenz der Normen: Wegen (2.7) ist $(u \mid u) \geqslant 0$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ und wir haben bereits gesehen, dass

$$c^2 \|u\|_{1,2}^2 \leqslant (u \mid u)$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Ist also $(u \mid u) = 0$, so folgt $\|u\|_{1,2} = 0$ und letztlich $u = 0$. $\square$

Satz 2.2.4 *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $\lambda_1(-\Delta + q) > 0$ und gibt es darüber hinaus reelle Zahlen $a > 0$ und $b \in (0, \lambda_1)$, sodass*

$$|f(t)| \leqslant a + b|t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (2.8)$$

gilt, dann besitzt das Problem (2.1) mindestens eine schwache Lösung.

Beweis. Nach Lemma 2.2.2 reicht es, die Existenz eines globalen Minimierers des in (2.3) definierten Funktionals J nachzuweisen. Um diese zu zeigen, führen wir den Beweis in zwei Schritten. Im ersten Schritt zeigen wir die Koerzitivität des Funktionals J und im zweiten, dass J schwach unterhalb folgenstetig ist.

Schritt 1. Um die Koerzitivität von J zu zeigen, schätzen wir die Terme $\int_\Omega F\left(u(x)\right) dx$ und $\int_\Omega h(x)u(x)\, dx$ geeignet ab. Dabei verwenden wir die Ungleichung (2.7), die Hölder-Ungleichung und die Tatsache der stetigen Einbettung des Raumes $H_0^1(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$. Nach Integration beider Seiten von (2.8) folgt unmittelbar, dass

$$|F(t)| \leqslant a|t| + \frac{b}{2}|t|^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Somit folgt mit

$$\left| \int_\Omega F\left(u(x)\right) dx \right| \leqslant a \int_\Omega |u(x)| dx + \frac{b}{2} \int_\Omega |u(x)|^2 dx \leqslant C_1 \|u\| + \frac{b}{2\lambda_1} \|u\|^2$$

und

$$\left| \int_\Omega h(x)u(x) dx \right| \leqslant \|h\|_2 \|u\|_2 \leqslant C_2 \|u\|$$

für das Funktional

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q\,(x) u(x)^2 dx - \int_\Omega F\left(u(x)\right) dx - \int_\Omega h(x)u(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F\left(u(x)\right) dx - \int_\Omega h(x)u(x)\, dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_1\|u\| + \frac{b}{2\lambda_1}\|u\|^2 - C_2\|u\| \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 - C\|u\|.
\end{aligned}$$

Da $b < \lambda_1$ nach Voraussetzung gilt, ist die Koerzitivität von J gezeigt.

Schritt 2. Es konvergiere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $u \in H_0^1(\Omega)$. Nach Korollar 1.3.4 existiert eine Teilfolge, die wir mit $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wollen, mit folgenden drei Eigenschaften:

1. $u_{n_k} \to u$ in $L^2(\Omega)$
2. $u_{n_k}(x) \to u(x)$ fast überall in Ω und
3. Es existiert $w \in L^2(\Omega)$, sodass $|u_{n_k}(x)| \leqslant w(x)$ fast überall in Ω und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Da F stetig ist, folgt $F\left(u_{n_k}(x)\right) \to F\left(u(x)\right)$ fast überall in Ω. Außerdem ist F fast überall durch eine $L^1(\Omega)$-Funktion beschränkt, denn mit (2.8) und **3**. folgt

$$|F(u_{n_k}(x))| \leqslant a|u_{n_k}(x)| + \frac{b}{2}|u_{n_k}(x)|^2 \leqslant aw(x) + \frac{b}{2}w(x)^2 =: \overline{w}(x) \quad \text{f.ü. in}\, \Omega$$

und, da Ω beschränkt ist, ist $\overline{w} \in L^1(\Omega)$, denn es gilt mit der Hölder-Ungleichung

$$\int_\Omega |\overline{w}(x)|dx \leqslant a \int_\Omega |w(x)|dx + \frac{b}{2} \int_\Omega w(x)^2 dx \leqslant a\sqrt{\lambda^d(\Omega)}\|w\|_2 + \frac{b}{2}\|w\|_2^2 < \infty,$$

wobei λ^d das d-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichne.

Somit gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$\int_\Omega F\left(u_{n_k}(x)\right)dx \to \int_\Omega F\left(u(x)\right)dx.$$

Da $h \in L^2(\Omega)$, folgt mit **2.** auch

$$\int_\Omega h(x)u_{n_k}(x)dx \to \int_\Omega h(x)u(x)dx,$$

denn

$$\left|\int_\Omega h(x)(u_{n_k}(x) - u(x))dx\right| \leqslant \int_\Omega |h(x)||u_{n_k}(x) - u(x)|dx \leqslant \|h\|_2\|u_{n_k} - u\|_2$$

und $\|u_{n_k} - u\|_2 \to 0$ für $k \to \infty$. Die Norm ist schwach unterhalb folgenstetig [11]. Für die Folge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt also

$$\|u\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|.$$

Insgesamt folgt nun für das Funktional

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u(x))dx - \int_\Omega h(x)u(x)dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\liminf_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|^2 - \lim_{k\to\infty}\int_\Omega F(u_{n_k}(x))dx - \lim_{k\to\infty}\int_\Omega h(x)u_{n_k}(x)dx \\
&= \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_{n_k}\|^2 - \int_\Omega F(u_{n_k}(x))dx - \int_\Omega h(x)u_{n_k}(x)dx\right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} J(u_{n_k}),
\end{aligned}$$

womit aus der Bemerkung zu Lemma 1.2.3 die schwache Unterhalbfolgenstetigkeit von J folgt. Durch Anwendung von Satz 1.2.2 erhält man dann die Existenz eines globalen Minimierers.

$\square$

[11] Vergleiche [1], Bemerkung 6.3 (3)

3 Zusammenfassung und Ausblick

In unserer Arbeit haben wir eine spezielle Klasse elliptischer Randwertprobleme auf Existenz schwacher Lösungen untersucht und uns dabei ausschließlich auf variationelle Methoden gestützt.

Ein weiterer Ansatz, der z.B. in Wloka: Partielle Differentialgleichungen verfolgt wird, ist die Verwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes.[12] Auch dieser liefert Existenzresultate, trifft aber keine Aussagen über die Eindeutigkeit von Lösungen. Variationelle Methoden haben demgegenüber den Vorteil, dass mit ihnen auch die Eindeutigkeit schwacher Lösungen gezeigt werden kann. Für Eindeutigkeitsbeweise mittels variationeller Methoden verweisen wir auf [2].

Letztlich bleibt noch die Frage vom Anfang zu beantworten: Verallgemeinert die untersuchte Klasse von Randwertproblemen wirklich das Poissonproblem? Wir erhalten die Poissongleichung für $f = 0$ und $q = 0$. Tatsächlich ist der erste Eigenwert λ_1 in diesem Fall positiv[13], sodass der im letzten Abschnitt bewiesene Existenzsatz anwendbar ist. Wir haben also insbesondere gezeigt, dass die Poissongleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und einer L^∞-Funktion als rechte Seite stets lösbar ist.

[12] Wloka untersucht in [8] ein Randwertproblem mit einem allgemeinen elliptischen Differentialoperator, schränkt sich also nicht auf den Laplace-Operator ein.

[13] Vergleiche dazu Korollar 1.4.4.

4 Literaturverzeichnis

- [1] H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [2] M. Badiale, E. Serra: *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Springer-Verlag, London, 2011.
- [3] M. Barner, F.Flohr: *Analysis 2*. de Gruyter, Berlin, 1989.
- [4] M. Dobrowolski: *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [5] E. Emmrich: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 2004.
- [6] H. Kielhöfer: *Variationsrechnung*. Vieweg+Teubner Verlag/Springer Fachmedien GmbH, Wiesbaden, 2010.
- [7] D. Werner: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [8] J. Wloka: *Partielle Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript 1975.