Grenzverhalten der gebrochenen Sobolevnormen bei $s = 1$

Ausarbeitung eines Vortrages im Seminar
,,Evolutionsgleichungen"
Wintersemester 2011-2012
Veranstalter: Prof. Dr. Emmrich

vorgelegt von:

Nelli Schmelzer, nelli-und-sergej@gmx.de
Martin Friesen, martin.friesen@gmx.de

1 Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir eine spezielle von Gagliardo und Slobodetskij eingeführte Norm auf den gebrochenen Sobolevräumen untersuchen. Genauer bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und es sei $1 \leq p < \infty$. Die ganzzahlig positiven Sobolevräume bezeichnen wir mit $W^{m,p}(\Omega)$ mit der Sobolevnorm

$$\|f\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

für $m \in \mathbb{N}$. Für den Fall, dass $s \geq 0$ nicht notwendigerweise ganzzahlig ist, wurde von Gagliardo folgende Definition vorgenommen. Wir zerlegen $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 < \sigma < 1$ und betrachten jetzt

$$\begin{aligned} |f|^p_{\sigma,p,\Omega} &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^{d+\sigma p}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ \|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|f\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha f|^p_{\sigma,p,\Omega}. \end{aligned}$$

Die Menge aller $f \in W^{m,p}(\Omega)$ mit endlicher Norm $\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ bildet dann einen Banachraum bezeichnet mit $W^{s,p}(\Omega)$. Für $p = 2$ ist dieser Raum in natürlicher Weise ein Hilbertraum. In [2] lässt sich nachlesen, dass die Einschränkungen der Funktionen $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ in allen $W^{s,p}(\Omega)$ dicht liegen. Ein wenig Überraschend ist jetzt, dass zum Beispiel für $s = \sigma \to 0$ man nicht einfach den Grenzübergang unter dem Integral durchführen kann. Es gilt also nicht

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^{d+\sigma p}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \to \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^{d}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Genauso stellt man auch fest, dass für $\sigma \to 1$ die Normen nicht beschränkt bleiben, also nicht $\|\cdot\|_{W^{m+\sigma,p}} \to \|\cdot\|_{W^{m+1,p}}$ gilt. Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir den zweiten Fall genauer untersuchen. Dazu reicht es aus, nur $m = 0$ zu betrachten. Wir werden uns dabei an der Darstellung von [1] orientieren.

2 Lösung von Bourgain, Brezis, Mironescu

Im folgenden betrachten wir $m = 0$ und somit den Zusammenhang zwischen $\|\cdot\|_{W^{\sigma,p}(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Die Idee ist es bei dem linken Integral in (1) einen Term als eine Approximation der 1 zu interpretieren und somit das Grenzverhalten

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^{d+\sigma p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \to K \int_\Omega |\nabla f(y)|^p \mathrm{d}y$$

mit einer von d und p abhängigen Konstante zu erhalten. Genauer schreiben wir für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{W^{1-\varepsilon,p}(\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^{d+(1-\varepsilon)p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^p} |y - x|^{\varepsilon p - d} \mathrm{d}y\mathrm{d}y \end{aligned}$$

und betrachten den zweiten Teil zusammen mit einer Abschneidefunktion auf $B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$ als eine Approximation der 1. Dabei stellen wir jedoch fest, dass ein Faktor ε dazu nicht ausreicht. Im Folgenden werden wir alle für diesen Zugang notwendigen Schritte beweisen.

Satz 2.1.
Für $f \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^p} \rho(y - x) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq K^p \cdot \|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)} \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

wobei $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\rho \geq 0$ und $K = K(p, \Omega)$ ist.

Beweis.
Für $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $x, h \in \mathbb{R}^d$ gilt mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |\phi(y + h) - \phi(y)| &= \left| \int_0^1 (\nabla\phi)(y + th) \cdot h \mathrm{d}t \right| \\ &\leq |h| \int_0^1 |(\nabla\phi)(y + th)| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y + h) - \phi(y)|^p \mathrm{d}y &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |(\nabla\phi)(y + th)| \mathrm{d}t \right)^p \mathrm{d}y \\ &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |(\nabla\phi)(y + th)|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}y \\ &= |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla\phi)(y + th)|^p \mathrm{d}y\mathrm{d}t = |h|^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi(y)|^p \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Also gilt diese Ungleichung auch auf dem Abschluss von $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ Norm. Für ein beschränktes Lipschitzgebiet gibt es einen beschränkten linearen Fortsetzungsoperator

$$E = E_{p,\Omega} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad \|\nabla Ef\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq K\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für $f \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt jetzt

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|Ef(y)-Ef(x)|^p}{|y-x|^p}\rho(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho(h)}{|h|^p}|Ef(y+h)-Ef(y)|^p\mathrm{d}y\mathrm{d}h \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho(h)}{|h|^p}|h|^p \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla Ef(y)|^p\mathrm{d}y\mathrm{d}h \\
&= \|\nabla Ef\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq K^p\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ρ radialsymmetrisch und positiv, sowie $e \in \mathbb{R}^d$ mit $|e| = 1$ gilt

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{(y-x)\cdot e\geq 0} f(x)\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|y-x|}\rho(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}|\varphi(y)|\rho(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Man beachte, dass das linke Integral wegen $|\varphi(y)-\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty|y-x|$ stets endlich ist, jedoch das Rechte auch den Wert ∞ annehmen kann.

Beweis.
Wir definieren für $\delta > 0$ die Funktion

$$\rho_\delta(t) = 1_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(0)}(t)\rho(t) = \begin{cases} 0 & ,t < \delta \\ \rho(t) & ,t \geq \delta \end{cases}.$$

und erhalten

$$\rho_{\delta'} \leq \rho_\delta \leq \rho, \quad 0 < \delta < \delta'.$$

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz sieht man leicht, dass es ausreicht, das Lemma für ρ_δ zu beweisen. Die Funktionen

$$(x,y) \longmapsto |f(x)||\varphi(y)|\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}, \quad (x,y) \longmapsto |f(x)||\varphi(x)|\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}$$

sind wegen

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)||\varphi(y)|\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x &\leq \delta^{-1}\|\varphi\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \delta^{-1}\|\varphi\|_\infty\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

integrierbar. Somit können wir mit $A_x = \{y \in \mathbb{R}^d : (y-x)\cdot e \geq 0\}$ schreiben

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} f(x)\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|y-x|}\rho_\delta(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} f(x)\varphi(y)\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \\ &\quad \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} f(x)\varphi(x)\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aus der Identität $\rho_\delta(z) = \rho_\delta(-z)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} f(x)\varphi(x)\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{(x-y)\cdot e\geq 0} f(y)\varphi(y)\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} f(y)\varphi(y)\frac{\rho_\delta(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt dann

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} f(x)\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|y-x|}\rho_\delta(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} |\varphi(y)|\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\rho_\delta(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} |\varphi(y)|\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\rho(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

und mit $\delta \to 0$ auf der linken Seite die Behauptung. $\square$

Satz 2.3.
Für $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}\frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = K\|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)},$$

wobei $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven, radialsymmetrischen und normierten Mittelungskernen ist und $K = K_{p,d}$ eine nur von p und d abhängige positive Konstante.
Ist zusätzlich $1 < p < \infty$ und $f \notin W^{1,p}(\Omega)$, so gilt obige Identität auch mit der Konvention $\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} = \infty$.

Beweis.
Wir betrachten den ersten Teil mit $1 \leq p < \infty$ und $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Mit der Definition

$$F_n(x,y) = \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\rho_n(y-x)^{\frac{1}{p}}$$

ist die Behauptung aquivalent zu $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} = K\|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)}$.

Sind jetzt $f, g \in W^{1,p}(\Omega)$ und F_n bzw. G_n die dazugehörigen Funktionen wie oben, so gilt

$$\begin{aligned}
|\|F_n\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} - \|G_n\|_{L^p(\Omega\times\Omega)}| &\leq \|F_n - G_n\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} \\
&= \left(\int_\Omega \int_\Omega \rho_n(y-x) \left(\frac{|f(y)-f(x)| - |g(y)-g(x)|}{|y-x|} \right)^p \mathrm{d}y\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \int_\Omega \rho_n(y-x) \frac{|(f(y)-g(y)) - (f(x)-g(x))|^p}{|y-x|^p} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|\nabla f - \nabla g\|_{L^p(\Omega)} = C\|\nabla f - \nabla g\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung sich aus $|a| - |b| \leq |a - b|$ ergibt und C die Konstante aus Satz 2.1 bezeichnet. Insgesamt haben wir damit

$$|\|F_n\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} - \|G_n\|_{L^p(\Omega\times\Omega)}| \leq C\|\nabla f - \nabla g\|_{L^p(\Omega)} \tag{2}$$

gezeigt. Sei jetzt $f_k \to f$ eine Approximation, wobei f_k ein Element aus einer dichten Teilmenge von $W^{1,p}(\Omega)$ ist und F_n^k bzw. F_n die wie oben definierten Funktionen. Dann gilt mit vorheriger Abschätzung und denselben Bezeichnungen für die Konstanten

$$\begin{aligned}
\left| \|F_n\|_{L^p(\Omega)} - K\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \right| &\leq \left| \|F_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|F_n^k\|^p_{L^p(\Omega)} \right| + \left| \|F_n^k\|^p_{L^p(\Omega)} - K\|\nabla f_k\|^p_{L^p(\Omega)} \right| \\
&\quad + K \left| \|\nabla f_k\|^p_{L^p(\Omega)} - \|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)} \right| \\
&\leq \max\{K, C\}\|\nabla f - \nabla f_k\|^p_{L^p(\Omega)} + \left| \|F_n^k\|^p_{L^p(\Omega)} - K\|\nabla f_k\|\|^p_{L^p(\Omega)} \right|.
\end{aligned}$$

Somit reicht es aus, die Behauptung für eine dichte Teilmenge von $W^{1,p}(\Omega)$ zu zeigen. Betrachten wir die Einschränkung von $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ auf Ω, auch mit f bezeichnet, so erhalten wir aus der totalen Differenzierbarkeit

$$f(y) - f(x) = (\nabla f)(x) \cdot (y - x) + o(|y - x|)$$

und folglich auch

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \left| (\nabla f)(x) \cdot \frac{y - x}{|y - x|} \right| + O(|y - x|).$$

Für ein festes $x \in \Omega$ mit $R = d(x, \partial\Omega)$ gilt dann

$$\int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^p} \rho_n(y - x)\mathrm{d}y = \left(\int_{B_R(x)} + \int_{\Omega\setminus B_R(x)} \right) \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^p} \rho_n(y - x)\mathrm{d}y.$$

Das zweite Integral verschwindet für $n \to \infty$, wegen

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus B_R(x)} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|^p} \rho_n(y - x)\mathrm{d}y &\leq \left(\frac{2\|f\|_\infty}{R} \right)^p \int_{\Omega\setminus B_R(x)} \rho_n(y - x)\mathrm{d}y \\
&\leq \left(\frac{2\|f\|_\infty}{R} \right)^p \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R(0)} \rho_n(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Das erste Integral liefert uns mit $d \geq 2$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_R(x)} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y &= \int\limits_0^R \int\limits_{\partial B_r(x)} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(r)\mathrm{d}O(y)\mathrm{d}r \\
&= \int\limits_0^R \rho_n(r) \int\limits_{\partial B_r(0)} \left|(\nabla f)(x)\cdot \frac{w}{|w|}\right|^p + O(r^p)\mathrm{d}O(w)\mathrm{d}r \\
&= \int\limits_0^R \rho_n(r) \int\limits_{\partial B_1(0)} |(\nabla f)(x)\cdot w|^p\, r^{d-1} + O(r^{d+p-1})\mathrm{d}O(w)\mathrm{d}r \\
&= |\nabla f(x)|^p \int\limits_0^R \rho_n(r) \int\limits_{\partial B_1(0)} \left|\frac{(\nabla f)(x)}{|(\nabla f)(x)|}\cdot w\right|^p r^{d-1}\mathrm{d}O(w)\mathrm{d}r \\
&\quad +O\left(\int\limits_0^R r^{d+p-1}\rho_n(r)\mathrm{d}r\right) \\
&= |\nabla f(x)|^p \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int\limits_{\partial B_1(0)} |e\cdot w|^p\mathrm{d}O(w) \int\limits_0^R |\partial B_1(0)|\rho_n(r)r^{d-1}\mathrm{d}r \\
&\quad +O\left(\int\limits_0^R r^{d+p-1}\rho_n(r)\mathrm{d}r\right) \\
&= K|\nabla f(x)|^p \int\limits_{B_R(0)} \rho_n(z)\mathrm{d}z + O\left(\int\limits_0^R r^{d+p-1}\rho_n(r)\mathrm{d}r\right)
\end{aligned}$$

wobei $e \in \mathbb{R}^d$ mit $|e| = 1$ ist und die Konstante $K = K(p,d)$ als

$$K = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int\limits_{\partial B_1(0)} |e\cdot w|^p\mathrm{d}O(w)$$

unabhängig von Ω ist. Dabei ist für $d = 1$ diese gegeben durch $K(p,1) = 1$, welches man schnell einsieht. Es gilt jetzt

$$\int\limits_{B_R(0)} \rho_n(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho_n(z)\mathrm{d}z - \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_R(0)} \rho_n(z)\mathrm{d}z = 1 - \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_R(0)} \rho_n(z)\mathrm{d}z \to 1$$

und für $\varepsilon > 0$ beliebig und hinreichend klein auch

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^R r^p r^{d-1}\rho_n(r)\mathrm{d}r &= \int\limits_0^\varepsilon r^p r^{d-1}\rho_n(r)\mathrm{d}r + \int\limits_\varepsilon^R r^p r^{d-1}\rho_n(r)\mathrm{d}r \\
&\leq \varepsilon + R^p \int\limits_\varepsilon^\infty r^{d-1}\rho_n(r)\mathrm{d}r \to \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit haben wir jetzt

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y \to K(p,d)|\nabla f(x)|^p \tag{3}$$

gezeigt. Mit der Lipschitzabschätzung $|f(x)-f(y)| \leq \|\nabla f\|_\infty |x-y|$ für $x, y \in \Omega$, haben wir

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y \leq \|\nabla f\|_\infty^p \int\limits_{\Omega} \rho_n(y-x)\mathrm{d}y \leq \|\nabla f\|_\infty^p$$

welche wegen $|\Omega| < \infty$ eine integrierbare Majorante darstellt. Also folgt aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue die Behauptung. Für den zweiten Teil sei $1 < p < \infty$ und $f \in L^p(\Omega)$. Es reicht dann zu zeigen, dass aus

$$A_p = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \left(\frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

bereits $f \in W^{1,p}(\Omega)$ folgt. Sei dazu $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ beliebig und durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt. Dann gilt (durch Nachrechnen) für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int\limits_{(y-x)\cdot e \geq 0} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|y-x|}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y \to \frac{K(1,d)}{2}\nabla\varphi(x)\cdot e$$

mit der Konstante $K(1,p)$ für $p=1$ von früher. Auf die Funktion $1_\Omega \cdot f$ lässt sich jetzt das Lemma 2.2 anwenden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
I_n &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{A_x} 1_\Omega(x)f(x)\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|y-x|}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|1_\Omega(y)f(y)-1_\Omega(x)f(x)|}{|y-x|}|\varphi(y)|\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Omega} \frac{|1_\Omega(y)f(y)-1_\Omega(x)f(x)|}{|y-x|}|\varphi(y)|\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}|\varphi(y)|\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega}\int\limits_{\Omega} |f(y)||\varphi(y)|\frac{\rho_n(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= I_{1,n} + I_{2,n}.
\end{aligned}$$

Mittels der Hölderschen Ungleichung für $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_{1,n} &= \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}|\varphi(y)|\rho_n(y-x)^{\frac{1}{p}}\rho_n(y-x)^{\frac{1}{p'}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |\varphi(y)|^{p'}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Der zweite Faktor lässt sich weiter nach oben abschätzen durch

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)|^{p'}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} = \|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$

Damit erhalten wir

$$I_{1,n} \leq \left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p}\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Den zweiten Summanden $I_{2,n}$ schätzen wir mit der Überlegung $\frac{1}{|y-x|} \leq \frac{1}{d}$ mit $d = d(\mathbb{R}^d\backslash\Omega, supp(\varphi))$ für $y \in supp(\varphi),\ x \in \mathbb{R}^d\backslash\Omega$ ab:

$$\begin{aligned}
I_{2,n} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d\backslash\Omega}\int\limits_{supp(\varphi)} |\varphi(y)||f(y)|\frac{\rho_n(y-x)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\backslash\Omega}\int\limits_{supp(\varphi)} |\varphi(y)||f(y)|\rho_n(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{d}\int\limits_{|\xi|>d}\int\limits_{supp(\varphi)} |\varphi(y)||f(y)|\rho_n(\xi)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{1}{d}\|\varphi\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p}\int\limits_{|\xi|>d} \rho_n(\xi)\mathrm{d}\xi \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Gehen wir jetzt zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so erhalten wir insgesamt

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x)(\nabla\varphi)(x)\cdot e\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2A_p}{K(1,p)}\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Für einen festen Einheitsvektor $e = e_j = (0,\dots,1,\dots,0)$ ist mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$L^{p'}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\ , \varphi \longmapsto \int\limits_{\Omega} f\partial_j\varphi\mathrm{d}x$$

ein beschränktes lineares Funktional in $(L^{p'}(\Omega))'$ und besitzt wegen $1 < p < \infty$ eine Darstellung der Form

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\partial_j\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{\Omega} g_j(x)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x$$

für ein $g_j \in L^p(\Omega)$. Damit ist f nach der j-ten Komponente schwach differenzierbar mit Ableitung $\partial_j f = g_j \in L^p(\Omega)$. Da $e = e_j$ beliebig war ergibt sich die Behauptung. □

Korollar 2.4.
Für $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p} \rho_n(y-x)\mathrm{d}y = K(p,d)|\nabla f(x)|^p$$

als L^1- Grenzwert.

Beweis.
Im Beweis von Satz 2.3 wurde in (3) für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p} \rho_n(y-x)\mathrm{d}y \to K(p,d)|\nabla f(x)|^p$$

gezeigt. Wegen $|f(y)-f(x)| \le \|\nabla f\|_\infty |y-x|$ und $|\Omega| < \infty$ haben wir eine Majorante und schließen mit majorisierter Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(\cdot)|^p}{|y-\cdot|^p} \rho_n(y-\cdot)\mathrm{d}y - K(p,d)|\nabla f(\cdot)|^p \right\|_{L^1(\Omega)} .$$

Für ein allgemeines f können wir ein Dichtheitsargument zusammen mit der bereits in (2) gezeigten Abschätzung benutzen. □

Korollar 2.5.
Für $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ gilt auch

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon |f|^p_{1-\varepsilon,p,\Omega} = K'_{p,d} \|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

mit $K'(p,d) = \frac{|\partial B_1|}{p} K(p,d)$.

Beweis.
Sei für $\varepsilon > 0$ ρ_ε definiert durch

$$\rho_\varepsilon(h) = \frac{\varepsilon^{\varepsilon p} p}{|S^{d-1}||h|^{d-\varepsilon p}} 1_{B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}(h).$$

Mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ erfüllt jetzt ρ_ε die Voraussetzungen von Satz 2.3. Damit erhalten wir für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \varepsilon \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^{d+(1-\varepsilon)p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p} \frac{\varepsilon}{|y-x|^{d-\varepsilon p}} \frac{p\varepsilon^{\varepsilon p}}{|\partial B_1|} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \frac{|\partial B_1|}{p\varepsilon^{\varepsilon p}} \\
&= \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p} \rho_\varepsilon(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \frac{|\partial B_1|}{p\varepsilon^{\varepsilon p}} \\
&\to K(p,d) \int\limits_{\Omega} |\nabla f(x)|^p \mathrm{d}x \frac{|\partial B_1|}{p}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon |f|^p_{1-\varepsilon,p,\Omega} = \frac{K(p,d)|\partial B_1|}{p} \|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)} = K'(p,d)\|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

welches gerade die Behauptung ist. □

Wir haben jetzt eingesehen, dass die Halbnormen $|\cdot|_{\sigma,p,\Omega}$ mit dem Faktor $(1-\sigma)^{\frac{1}{p}}$ reskaliert werden müssen.
Definieren wir also

$$|f|^p_{\sigma,p,\Omega} = \frac{(1-\sigma)}{K'(p,d)} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^{d+\sigma p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

so erhalten wir, dass die Normen alle stetig ineinander übergehen, wie gewünscht.
Mit denselben Argumenten wie beim letzten Korollar können wir auch die nachstehenden beiden Ergebnisse zeigen.

Korollar 2.6.
Für $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ gilt

1. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^p} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = K_1 \|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)}$

2. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\log(\varepsilon)|} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|^{d+p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = K_2 \|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)}$

mit von f unabhängigen Konstanten $K_1, K_2 \geq 0$ und der Konvention $\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} = \infty$ für $f \notin W^{1,p}(\Omega)$.

3 Ausblick

Zuerst wollen wir einige Anwendungen, basierend auf [1], aufzeigen. Für $f \in L^1(\Omega)$ betrachten wir die Halbnorm

$$\|f\|_{BV} = \int_\Omega |\nabla f| \mathrm{d}x = \sup \left\{ \int_\Omega f \mathrm{div}(\varphi) \mathrm{d}x : \ \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d), \ |\varphi(x)| \leq 1 \right\}.$$

und definieren die Variation über $\|f\|_V = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|f\|_{BV}$. $BV(\Omega)$ sei definiert als als Raum aller Funktionen mit endlicher Variation, also solche wo obiges Supremum endlich ist.

Satz 3.1.
Eine Funktion $f \in L^1(\Omega)$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn der Ausdruck

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \rho_n(y - x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

endlich ist. Unter diesen Voraussetzungen gibt es dann zwei Konstanten $C_1, C_2 \geq 0$, welche nur von dem Gebiet abhängig sind mit

$$\begin{aligned} C_1 \|f\|_{BV} &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \rho_n(y - x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \rho_n(y - x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \leq C_2 \|f\|_{BV}. \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $d = 1$ und $\Omega = (0, 1)$ sind die Konstanten gegeben durch $C_1 = C_2 = 1$ und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \rho_n(y - x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 |f'(y)| \mathrm{d}y.$$

Es ist leider noch nicht bekannt, ob eine analoge Aussage auch für höhere Dimensionen richtig ist.
Ein interessanter Spezialfall obigen Ergebnisses bekommen wir mit $\rho_\varepsilon(h) = |h|^{\varepsilon - d}$.

Korollar 3.2.
Eine Funktion $f \in BV(\Omega)$ erfüllt die Ungleichung

$$\begin{aligned} C_1 \|f\|_{BV} &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^{d+1-\varepsilon}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^{d+1-\varepsilon}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \leq C_2 \|f\|_{BV} \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck $\|f\|_{BV}$ genau dann endlich ist, wenn die Integrale in der Mitte endlich sind.

Betrachten wir eine messbare Menge $A \subset \Omega$ mit endlichem Durchmesser, so ergibt sich mittels der Sobolev-Ungleichung

$$(|A||\Omega\backslash A|)^{\frac{d-1}{d}} \leq C \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{|y-x|^{d+1-\varepsilon}}.$$

Ist zusätzlich

$$\int_{\Omega\backslash A} \int_A \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{|y-x|^{d+1}} < \infty$$

endlich, so gilt bereits $|A| = 0$ oder $|\Omega\backslash A| = 0$. Einen Beweis findet man auch in [4].

Wir stellen fest, dass der Mißstand der Nichtkonvergenz der Normen und die damit verbundene Reskalierung die Ursache in der Wahl der Halbnormen selbst hat. Es ist möglich äquivalente Normen zu wählen, welche nicht zu diesem Effekt führen. In [2] wurden solche als

$$\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|f\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega\times\Omega\cap\{|y-x|<1\}} \frac{|D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)|^p}{|y-x|^{d+\sigma p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

wobei $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 < \sigma < 1$ ist.
Für den Fall $p = 2$ mit $\Omega = \mathbb{R}^d$ findet man in [3] ähnliche Ergebnisse. Diese nutzen dann die Charakterisierung der Sobolevräume durch die Fouriertransformation, welches ein mächtiges Werkzeug zur Verfügung stellt. Anwendung finden obige Ergebnisse in einem großen Bereich der Analysis. So tretten Fragen nach der Konvergenz der Sobolevnormen für verschiedene Parameter s in natürlicher Weiser bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen auf.

References

[1] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu: *Another look at Sobolev spaces*, Optimal Control and Partial Differential Equations, J.L Menaldi et. al., IOS Press. 2001

[2] M. Dobrowolski: *Angewandte Funktionalanalysis*, Springer, 2te Auflage 2010 Würzburg

[3] W. Masja, J. Nagel: *Über äquivalente Normierung der anisotropen Funktionalräume* $H^{\mu}(\mathbb{R}^n)$, Beiträge zur Analysis 12, 1978, 7-17

[4] Jean Bourgain, Haim Brezis, Petru Mironescu: *Lifting in Sobolevspaces*, J. d'Analyse 80, 2000, 37-86