

SEMINARARBEIT

**Modellierung und Analysis  
der stationären und instationären  
Navierschen Gleichung der  
linearen Elastizitätstheorie**

von

**Saskia Aßmann**

ausgeführt am

Institut für Mathematik  
der Technischen Universität Berlin

unter Anleitung von

Dr. Etienne Emmrich

im Rahmen des Seminars Differentialgleichungen

bei Prof. Dr. Petra Wittbold

Wintersemester 2006/2007



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Modellierung</b>	<b>2</b>
2.1	Bewegung starrer Körper . . . . .	2
2.2	Verzerrungstensor . . . . .	5
2.3	Spannungstensor . . . . .	5
2.4	Thermodynamische Vorbetrachtung . . . . .	7
2.5	Herleitung der Gleichgewichtsgleichung . . . . .	8
2.6	Elastizitätsmodul und Poissonsche Zahl . . . . .	10
2.7	Übersicht der hergeleiteten Formeln . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Sobolew-Räume im <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Zwei mögliche schwache Formulierungen</b>	<b>16</b>
4.1	Satz und Formel von Gauß . . . . .	16
4.2	Erste schwache Formulierung . . . . .	17
4.3	Zweite schwache Formulierung . . . . .	19
4.4	Vergleich der Formulierungen . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Lösbarkeit des stationären Problems</b>	<b>22</b>
5.1	Dirichletsches Randwertproblem . . . . .	22
5.2	Neumannsches Randwertproblem . . . . .	25
5.3	Energiefunktional . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Lösbarkeit des instationären Problems</b>	<b>30</b>
	<b>Literatur</b>	<b>32</b>

# 1 Einleitung

Die Theorie von der Verformung elastischer Körper wurde in der Zeit vom 17. bis zum 19. Jahrhundert entwickelt. Bereits 1678 formulierte Robert Hooke (1635-1703) einen linearen Zusammenhang zwischen der Deformation und den dabei auftretenden Kräften. Zwei Jahre später fand der Franzose Edme Mariotte (1620-1684) den gleichen Zusammenhang. Er verfasste eine Theorie zur Beschreibung tragender Balken, welche 1705 von Jakob Bernoulli erweitert wurde. In den folgenden Jahren beschäftigten sich namhafte Mathematiker und Physiker wie Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783) und Charles Augustin Coulomb (1736-1806) mit der Verfeinerung der Theorie und ihren Anwendungen auf unterschiedliche Gebiete.

Die erste allgemeine Beschreibung fester elastischer Körper erfolgte durch Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) am 14. Mai 1821. Dieses Datum steht für die Geburt der mathematischen Formulierung der Elastizität. Naviers ursprüngliche Gleichung beinhaltete nur eine Konstante, da er die zwischenmolekularen Wechselwirkungen sehr stark vereinfacht hatte. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) schuf, von anderen Annahmen ausgehend, die lineare Elastizitätstheorie wie wir sie heute kennen. Die Navier-Gleichung, die im Kapitel 2 hergeleitet wird, stammt somit auch von Cauchy.

Spätere Untersuchungen im 19. Jahrhundert beschränkten sich auf die Anwendung der Theorie auf spezielle Körper, z. B. Balken, Platten, symmetrische Volumina unter dem Einfluss verschiedener Kraftfelder. Es findet dabei mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften eine Reduktion der Konstanten statt, die das explizite Ausrechnen erleichtert.

Andererseits wurden auch nichtlineare Theorien für die plastische Verformung von Körpern entwickelt. Die Plastizitätstheorie beschreibt fortschreitende Verformungen des Körpers ohne Erhöhung der aufgebrachten Kraft. Solche Vorgänge sind irreversibel, so dass die Deformation nach dem Abklingen der Kräfte bestehen bleibt. Bei der Theorie der Viskoelastizität berücksichtigt man die vorhergehende zeitliche Entwicklung des Systems und betrachtet z. B. Hysterese-Effekte. Ein Sonderfall der von Cauchy entwickelten Theorie ist die Hyperelastizität. Bei großen Dehnungen werden einige Materialien, z. B. Metalle, weich, andere dagegen, z. B. Polymere, hart. Aktuelle Forschungen beschäftigen sich mit der Entstehung von Rissen in solchen Materialien.

Wir wollen uns aber hier auf die lineare Theorie beschränken und dabei die Lösbarkeit der Navier-Gleichung untersuchen. In den 1930er Jahren führte der russische Mathematiker Sergei Lwowitsch Sobolew (1908-1989) die heute nach ihm benannten Funktionenräume ein. Sie bilden die Grundlage für die Theorie der schwachen Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Das 1954 publizierte Lemma von Peter David Lax (geb. 1926) und Arthur Norton Milgram (1912-1961) gibt die schwache Lösbarkeit der stationären Navier-Gleichung. Dabei werden in unserem Fall die Ungleichungen von Arthur Korn (1870-1945) verwendet, um die Voraussetzungen des Satzes von Lax und Milgram zu prüfen.

In dieser Seminararbeit wird zunächst die Navier-Gleichung hergeleitet. Danach beschäftigen wir uns mit den Sobolew-Räumen für Funktionen mit Werten im  $\mathbb{R}^d$  und stellen zwei schwache Formulierungen für die Navier-Gleichung auf. Anschließend untersuchen wir die stationäre Gleichung auf Lösbarkeit mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram. Abschließend betrachten wir die Lösbarkeit der instationären Gleichung.

## 2 Mathematische Modellierung

Wir betrachten einen homogenen isotropen Körper, welcher durch das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  dargestellt werden soll. Elemente aus  $\Omega$  sind Ortsvektoren  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ . Eine Deformation des Körpers wird beschrieben durch den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times [0, T] \supset \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Dabei gibt  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  an, um wieviel der Punkt  $\mathbf{x}$  bei der Deformation zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  verschoben wurde. Die neue Position des Punktes  $\mathbf{x}$  ist dann  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ .

Es soll sich um eine elastische Deformation handeln, d. h., die Deformation sei genügend klein, damit nach Verschwinden der äußeren Kräfte, welche die Verformung bewirken, der Körper seinen ursprünglichen, nicht deformierten Zustand wieder annehme. Weiterhin setzen wir voraus, dass die Prozesse genügend langsam verlaufen, damit sich zu jedem Zeitpunkt das thermodynamische Gleichgewicht einstellt. Dann ist der Prozess reversibel, also thermodynamisch umkehrbar.

Die Temperatur des Körpers sei konstant, da sonst durch Temperaturänderung eine Wärmeausdehnung des Körpers stattfindet, welche die Gleichgewichtslage zusätzlich stören und so verhindern würde, dass der Körper in die Ausgangslage zurückkehrt. Schließlich wollen wir noch annehmen, dass vorhergehende Ereignisse keinen Einfluss auf das Verhalten des Materials haben und somit z. B. Hysterese-Effekte ausgeschlossen werden.

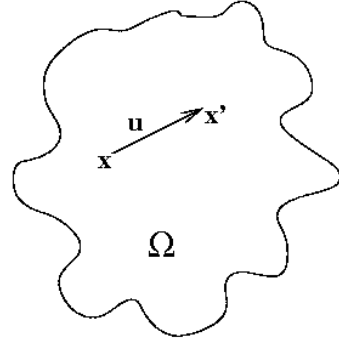


Abbildung 1: Veranschaulichung des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$

### 2.1 Bewegung starrer Körper

Es sollen reine Deformationen betrachtet werden. Starrkörperbewegungen sollen explizit ausgeschlossen werden. Dabei definieren wir eine Starrkörperbewegung wie folgt.

**Definition 1** (Starrkörperbewegung). Eine Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *Starrkörperbewegung*, wenn es Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  gibt, so dass gilt

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{x} + \mathbf{a}. \quad (1)$$

Der Vektor  $\mathbf{a}$  beschreibt eine reine Verschiebung des Körpers,  $\mathbf{b}$  zeigt in die Richtung der Drehachse und  $|\mathbf{b}|$  gibt die Stärke der Drehung an.

*Bemerkung.* Die Darstellung (1) der Starrkörperbewegung ist eindeutig. Angenommen es gäbe  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ , so dass  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{b}} \times \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{a}} \forall \mathbf{x} \in \Omega$ . O.B.d.A. ist  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \Omega$  (sonst verschiebe  $\Omega$ ), so dass  $\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}$  gilt. Es folgt  $(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  und somit  $\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ .

Eine äquivalente Darstellung kann mit  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  und einer schiefsymmetrischen Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gefunden werden,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{a}, \text{ wobei } B = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definition 2** (Starrkörperbewegung 2). Eine Starrkörperbewegung ist eine Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  der Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + (Q - \mathcal{I})\mathbf{x},$$

wobei  $\mathcal{I}$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^{d \times d}$  ist und  $Q \in \text{SO}(d)$ , d. h. es ist  $Q^T Q = \mathcal{I}$  und  $\det Q = 1$ .

Man sieht leicht, dass die Definitionen 1 und 2 nicht übereinstimmen. Der Unterschied zwischen den beiden Darstellungen liegt in der Beschreibung der Drehung. Bei kleinen Winkeln kann man die Näherungen  $\cos \alpha = 1$  sowie  $\sin \alpha = \alpha$  verwenden und erhält bei geschickter Wahl der  $x_3$ -Achse:

$$Q - \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Sind die Koordinatenachsen fest gewählt, erhält man die näherungsweise Gleichheit der Darstellungen durch geometrische Überlegungen.

Sei dazu die Drehung des Körpers um einen Punkt  $C$  beschrieben durch die Matrix  $Q \in \text{SO}(d)$ . Wie in Abbildung 2 dargestellt, ist der Punkt vor der Drehung gegeben durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{d},$$

wobei  $\mathbf{x}_c$  die Position des Rotationszentrums und  $\mathbf{d}$  den Abstand von  $\mathbf{x}$  zum Rotationszentrum angibt. Nach der Drehung befindet sich der Punkt bei  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_c + Q\mathbf{d}$ . Dies kann auch mit der Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}$  ausgedrückt werden, mittels  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x}' - \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}_c + Q\mathbf{d} - \mathbf{x} \\ &= Q\mathbf{d} - \mathbf{d} \\ &= (Q - \mathcal{I})\mathbf{d}. \end{aligned}$$

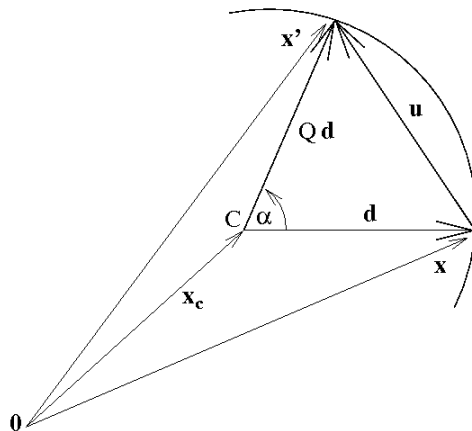


Abbildung 2: Zusammenhang zwischen Drehmatrix  $Q$  und Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$

Im zweiten Schritt betrachten wir die Drehung und ihre Inverse. Da  $Q \in \text{SO}(d)$  ist, gilt  $Q^{-1} = Q^T$ . Der Vektor  $\mathbf{u}_s$ , definiert durch

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_s &= \frac{1}{2}(Q\mathbf{d} - Q^T\mathbf{d}) \\ &= \frac{1}{2}(Q - Q^T)\mathbf{d},\end{aligned}$$

steht senkrecht auf  $\mathbf{d}$ . Wir wählen einen Vektor  $\mathbf{b}$  im Rotationszentrum, der senkrecht auf der Paperebene steht, so dass  $\mathbf{u}_s$  parallel zu  $\mathbf{b} \times \mathbf{d}$  ist. Die Länge von  $\mathbf{b}$  sei

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\frac{\mathbf{d}^T(Q - Q^T) \cdot (Q - Q^T)\mathbf{d}}{2|\mathbf{d}|}}.$$

Damit gilt  $\mathbf{u}_s = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$ . Sei nun  $\mathbf{u}_p$  ein Vektor im Rotationszentrum parallel zu  $\mathbf{d}$  derart, dass  $Q\mathbf{d} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p$  (siehe Abbildung 3). Für Drehungen um kleine Winkel gilt  $\mathbf{d} \approx \mathbf{u}_p$ . Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (Q - \mathcal{I})\mathbf{d} \\ &= \mathbf{u}_s + \underbrace{\mathbf{u}_p - \mathbf{d}}_{\approx 0} \\ &\approx \mathbf{u}_s \\ &= \mathbf{b} \times \mathbf{d}.\end{aligned}$$

Somit kann man die Darstellung aus Definition 2 annähern durch die Darstellung aus Definition 1.

Falls andererseits eine Drehung mit  $\mathbf{u} = B\mathbf{x}$  und  $B = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$  gegeben ist, kann man zeigen, dass für kleine Drehungen  $B + \mathcal{I}$  näherungsweise einer Matrix  $Q \in \text{SO}(d)$  entspricht. Es gilt  $B^T = -B$  und somit

$$\begin{aligned}&(B + \mathcal{I})^T \cdot (B + \mathcal{I}) \\ &= B^T B + B + B^T + \mathcal{I} \\ &= -B^2 + \mathcal{I} \\ &\approx \mathcal{I},\end{aligned}$$

da für kleine Winkel  $B^2 \approx 0$  ist. Außerdem ist dann  $\det(B - \mathcal{I}) = 1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \approx 1$ .

Wenn wir im Folgenden von Starrkörperbewegungen sprechen, meinen wir Verschiebungsfunktionen der Form (1) aus Definition 1. Für das Studium kleiner Deformationen, wie sie im Rahmen einer linearen Theorie auch nur beschrieben werden können, ist dies angemessen.

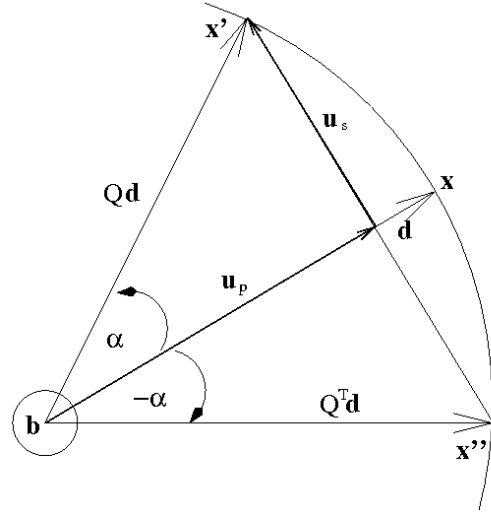


Abbildung 3: Approximation des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  mit  $\mathbf{u}_s$

## 2.2 Verzerrungstensor

Wir betrachten nun die Änderung des Abstandes  $dl$  zweier (infinitesimal entfernter) Punkte (siehe Abbildung 4). Die Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  haben den Abstand  $dl^2 = \sum_{i=1}^d dx_i^2$ . Dabei ist  $dx_i$  der Anteil von  $dl$  in Richtung von  $x_i$ . Nach der Deformation sind die Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  verschoben. Die neuen Positionen  $\mathbf{x}'$  bzw.  $\mathbf{y}'$  haben den Abstand  $dl'$  zueinander. Komponentenweise ändern sich die Abstände von  $dx_i$  zu  $dx_i + du_i$ . Somit wird aus  $dl^2 = \sum_{i=1}^d dx_i^2$  nach der Deformation

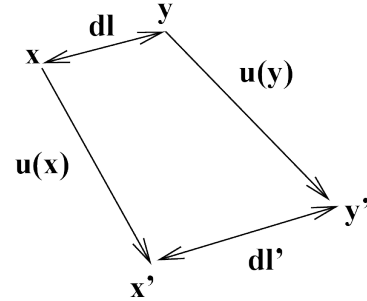


Abbildung 4: Änderung des Abstandes zweier Punkte

$$\begin{aligned}
 dl'^2 &= \sum_{i=1}^d (dx_i + du_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^d \left( dx_i + \sum_{k=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^d dx_i^2 + 2 \sum_{k,i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \sum_{k,i,l=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^d dx_i^2}_{= dl^2} + 2 \sum_{k,i=1}^d \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)}_{=: \varepsilon_{ik}} dx_k dx_i + \underbrace{\sum_{k,i,l=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l}_{\text{vernachlässigen}} \\
 &\approx dl^2 + 2 \sum_{k,i=1}^d \varepsilon_{ik} dx_i dx_k.
 \end{aligned}$$

Wir haben hier den Term zweiter Ordnung vernachlässigt, um eine lineare Abhängigkeit vom Gradienten zu erhalten. Dies ist physikalisch sinnvoll, wenn nur kleine Deformationen betrachtet werden, was bei elastischen Verformungen oft gerechtfertigt ist. Dennoch kann der Verschiebungsvektor sehr groß werden, beispielsweise beim Biegen eines langen Stabes.

An obiger Rechnung sieht man, dass die Verzerrung nur vom symmetrisierten Gradienten abhängt. Die Matrix  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  mit den Komponenten  $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$  heißt *Verzerrungstensor* von  $\mathbf{u}$ . Der Verzerrungstensor ist symmetrisch, denn  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ .

## 2.3 Spannungstensor

Ohne Deformation sind die Moleküle in einem Körper im thermodynamischen Gleichgewichtszustand angeordnet, d. h., es wirken keine Kräfte, welche die Position der Moleküle verändern. Eine Deformation ändert nun die Anordnung der Moleküle, so dass sie sich nicht mehr im Gleichgewichtszustand befinden. Es wirken daher Kräfte  $\mathbf{F}$ , die die Teilchen



zurück in die Gleichgewichtslage bringen. Dies sind die inneren Spannungen. Ursache für diese inneren Spannungen sind Molekülkräfte, z. B. Van-der-Waals-Kräfte. Man nimmt nun an, dass diese vergleichsweise schwachen Kräfte kleine Wirkungsradien haben, so dass sie nur auf ihre nächsten Nachbarn wirken und auch nur auf die Oberfläche des benachbarten Volumenelements. Diese Annahme gilt nicht für äußere makroskopische Felder, wie Gravitations- oder Magnetfelder. Äußere Felder werden später in Abschnitt 2.5 betrachtet.

Man möchte also eine Kraft  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_d \end{pmatrix}$  derart darstellen, dass gilt

$$\int_{\Omega} F_i = \int_{\partial\Omega} \dots$$

Dies ist durch Anwendung des Satzes von Gauß möglich, falls  $F_i$  die Divergenz eines Vektors  $\sigma_i$  ist,

$$\int_{\Omega} F_i = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^d \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} \sigma_i \mathbf{n}.$$

Dabei ist  $\mathbf{n}$  der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen auf  $\partial\Omega$ . Der so erhaltene Tensor zweiter Stufe (Matrix)  $\sigma$  heißt *Spannungstensor* der Deformation  $\mathbf{u}$ .

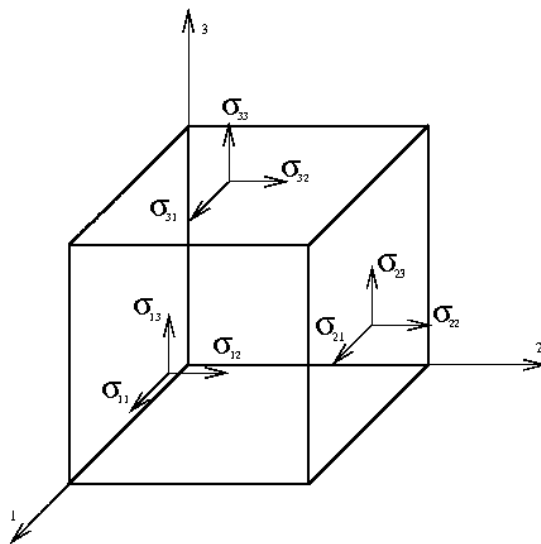


Abbildung 5: Wirkung des Spannungstensors auf ein Volumensegment [13]

Der Spannungstensor ist symmetrisch. Dies wird in Abbildung 5 anhand eines Volumensegmentes verdeutlicht. Falls der Spannungstensor nicht symmetrisch wäre, d. h., falls für ein  $i$  und ein  $k$   $\sigma_{ik} > \sigma_{ki}$  gelte, träte ein Drehmoment auf. Das Volumensegment würde sich um die  $j$ -Achse drehen. Dies ist aber eine Starrkörperbewegung, die wir ausgeschlossen haben, und keine Deformation.

## 2.4 Thermodynamische Vorbetrachtung

Das zu betrachtende Gleichgewicht ist thermodynamischer Natur, weshalb wir zunächst einige thermodynamische Begriffe einführen. Man unterscheidet zwischen der inneren Energie  $U$ , der Entropie  $S$  und der freien Energie  $\mathcal{F}$ . Die drei Größen sind voneinander abhängig. Es gilt  $\mathcal{F} = U - T \cdot S$ , wobei  $T$  die Temperatur des betrachteten Körpers ist. Die freie Energie ist der Anteil der Gesamtenergie, der in kinetische Energie, also Bewegungsenergie, umgewandelt werden kann. Die Entropie  $S$  ist ein Maß für die Unordnung des Systems, wobei Zustände höherer Unordnung energetisch günstiger sind. Die innere Energie  $U$  eines Systems ist die Energie, die bleibt, wenn man von der Gesamtenergie die geordnete kinetische und die potentielle Energie abzieht. Sie besteht u.a. aus der Bindungsenergie der Atombindungen und den Schwingungsenergien der Moleküle.

Unser erstes Ziel ist es, die freie Energie  $\mathcal{F}$  als Funktion des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  darzustellen. Da wir nur kleine Deformationen betrachten, können wir eine Potenzreihenentwicklung nach  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ansetzen. Da im nichtdeformierten Zustand Spannungsfreiheit vorliegt, gilt  $\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} = 0$  für  $i, k = 1, \dots, d$ , so dass die linearen Terme verschwinden. Nun ist  $\mathcal{F}$  eine skalare Größe, also ist jedes Glied der Entwicklung ebenfalls skalar. Die skalaren Abbildungen  $\boldsymbol{\varepsilon} \mapsto \left(\sum_{i=1}^d \varepsilon_{ii}\right)^2$  und  $\boldsymbol{\varepsilon} \mapsto \sum_{i,k=1}^d \varepsilon_{ik}^2$  sind linear unabhängig. Damit erhält man unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{F}_0}_{\substack{\text{freie Energie des} \\ \text{nicht deformierten} \\ \text{Körpers}}} + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^d \varepsilon_{ii}\right)^2 + \mu \sum_{i,k=1}^d \varepsilon_{ik}^2 + \dots, \quad (2)$$

was wir vektoriell ausdrücken können als

$$\mathcal{F} = \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3)$$

Die Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  heißen Lamésche Koeffizienten und hängen vom betrachteten Material ab. Den konstanten Term  $\mathcal{F}_0$ , der die freie Energie des nicht deformierten Körpers darstellt, lassen wir weg, da uns nur die freie Energie der Deformation, auch elastische freie Energie genannt, interessiert. Die Spur von  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} := \sum_{i=1}^d \varepsilon_{ii}$ , bestimmt die Volumenänderung des Körpers. Eine Deformation ohne Formänderung heißt homogene Dilatation. Liegt keine Volumenänderung vor, spricht man von einer reinen Scherung. Jede Deformation kann als Summe von reiner Scherung und homogener Dilatation dargestellt werden,

$$\varepsilon_{ik} = \underbrace{\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll}\right)}_{\text{reine Scherung}} + \underbrace{\frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll}}_{\text{homogene Dilatation}}.$$

Der erste Term ist eine reine Scherung, da

$$\sum_{i=1}^d \left(\varepsilon_{ii} - \frac{1}{3} \delta_{ii} \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll}\right) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_{ii} - \frac{1}{3} 3 \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll} = 0.$$

gilt. Die Abbildungen von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  auf die Quadrate dieser Terme sind ebenfalls linear unabhängig, so dass man auch schreiben kann

$$\mathcal{F} = \mu \sum_{i,k=1}^d \left( \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll} \right)^2 \quad \text{mit } K = \lambda + \frac{2}{3} \mu.$$

Die materialabhängige Konstante  $K$  heißt Kompressionsmodul. Die freie Energie  $\mathcal{F}$  ist somit eine quadratische Form und außerdem nichtnegativ. Im thermodynamischen Gleichgewicht nimmt die Energie ein Minimum im kräftefreien Zustand bei  $\varepsilon_{ik} = 0, i, k = 1, \dots, d$  an. Da man die Deformation als reine Scherung oder als homogene Dilatation wählen kann und so je ein Term von  $\mathcal{F}$  verschwindet, muss  $K > 0$  und  $\mu > 0$  gelten, damit die Form nichtnegativ ist. Für  $\lambda$  erhalten wir zunächst nur die Bedingung  $\lambda + \frac{2}{3} \mu > 0$ .

## 2.5 Herleitung der Gleichgewichtsgleichung

Nun können wir mit Hilfe der freien Energie  $\mathcal{F}$  den Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  als lineare Funktion des Verzerrungstensors darstellen,

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} \right) \\ &= K \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left( \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll} \right) \\ &= \lambda \sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (4)$$

Das kann man auch vektoriell schreiben,

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{I}_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5)$$

wobei  $\mathcal{I}_d$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^{d \times d}$  ist. Der lineare Zusammenhang von Spannung und Verzerrung wird als das *Hookesche Gesetz* bezeichnet.

Im Gleichgewichtszustand müssen sich die Kräfte der inneren Spannungen in jedem Volumenelement aufheben, d. h., es soll gelten

$$F_i = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, d,$$

$$\text{bzw.} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Zusätzlich können Volumenkräfte  $\boldsymbol{f}$  auftreten. Das sind Kräfte, die auf den gesamten Körper wirken und nicht nur auf die Oberfläche oder einen einzelnen Punkt. Dies sind

äußere makroskopische Felder, wie z. B. die Schwerkraft  $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$ . In diesem Fall muss die Summe aus Spannungen und Kräften pro Volumeneinheit verschwinden, so dass

$$F_i + f_i = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i \stackrel{!}{=} 0 \text{ für } i = 1, \dots, d,$$

bzw. 
$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$$

gilt.

Verwendet man nun die oben gewonnene Gleichung (5) für  $\boldsymbol{\sigma}$ , erhält man für die  $i$ -te Komponente von  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$  die folgende Darstellung.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^d \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} &= \sum_{k=1}^d \left( \lambda \sum_{l=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} \right) \\ &= \lambda \sum_{l=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + 2\frac{1}{2}\mu \sum_{k=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \sum_{l=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \end{aligned}$$

Es ist nun  $\sum_{l=1}^d \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = \operatorname{div} \mathbf{u}$  und  $\sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} = \Delta u_i$ , so dass wir schreiben können:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (6)$$

Insgesamt erhalten wir als stationäre Gleichung

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad (7)$$

oder

$$-(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (8)$$

Für das instationäre Problem betrachtet man  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Nach dem Newtonschen Gesetz erhält man die Bewegungsgleichung aus der Beziehung

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$$

Wir betrachten die Größen pro Volumeneinheit, weshalb wir eine Abhängigkeit von der Dichte  $\rho$ , der Masse pro Volumen, erhalten. Die Kräfte sind nun die Summe aus inneren Spannungen und makroskopischen Kräften  $\mathbf{F} + \mathbf{f}$ . Die Beschleunigung entspricht der zweiten zeitlichen Ableitung der Verzerrung. Insgesamt erhalten wir so die instationäre Navier-Gleichung

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \quad (9)$$

bzw.

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (10)$$

## 2.6 Elastizitätsmodul und Poissonsche Zahl

Bei der Anwendung der Navier-Gleichung in den Ingenieurwissenschaften werden häufig nicht die Laméschen Koeffizienten  $\lambda$  und  $\mu$  benutzt. Statt dessen verwendet man das Elastizitätsmodul  $E$  und die Poissonsche Zahl  $\nu$ . In diesem Abschnitt werden diese Größen anhand eines Beispiels erläutert. Dazu betrachten wir die homogene Dilatation eines Stabes.

Bei der homogenen Dilatation ist der Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  konstant. Da, wie bereits in Abschnitt 2.5 gezeigt, der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  als eine lineare Funktion des Verzerrungstensors angenommen wird, muss der Spannungstensor bei einer homogenen Dilatation konstant sein.

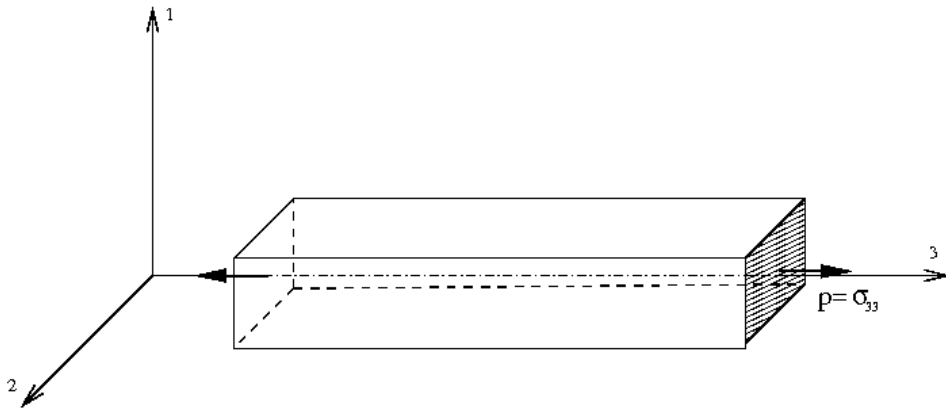


Abbildung 6: Einfache Streckung eines Stabes

Als Beispiel für eine homogene Dilatation betrachten wir die einfache Streckung eines Stabes wie in Abbildung 6. Dabei wird nur die Kraft  $p = \sigma_{33}$  auf die Oberfläche ausgeübt. Das heißt, der Stab wird in  $x_3$ -Richtung gestreckt. An den Mantelflächen greifen keine Kräfte an. Für einen Normalenvektor  $\mathbf{n}$  senkrecht zur  $x_3$ -Achse gilt also  $\sigma_{ik}n_k = 0$  für  $k \neq 3$  und  $i = 1, \dots, d$ . Da  $\boldsymbol{\sigma}$  symmetrisch ist, verschwinden so alle Komponenten von  $\boldsymbol{\sigma}$  bis auf  $\sigma_{33} = p$ .

In Abschnitt 2.5 haben wir in Gleichung (4)  $\boldsymbol{\sigma}$  als lineare Funktion von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dargestellt. Zusätzlich können wir  $\boldsymbol{\varepsilon}$  als lineare Funktion von  $\boldsymbol{\sigma}$  schreiben, mittels

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sum_{l=1}^d \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^d \sigma_{ll} \right).$$

Im Falle der einfachen Streckung des Stabes gilt damit  $\varepsilon_{ik} = 0$  für  $i \neq k$ . Außerdem ist

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p$$

und

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p.$$

Die relative Verlängerung des Stabes wird durch  $\varepsilon_{33}$  bestimmt,

$$\varepsilon_{33} = \underbrace{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right)}_{\frac{1}{E}} p = \frac{1}{E} p.$$

Der Faktor  $\frac{1}{E}$  heißt Elastizitätskoeffizient, sein Kehrwert  $E$  wird Elastizitätsmodul oder Youngsche Zahl genannt. Es ist

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}.$$

Neben der Streckung findet auch eine Querkontraktion des Stabes statt, welche durch  $\varepsilon_{11}$  und  $\varepsilon_{22}$  bestimmt wird. Der Querkontraktionskoeffizient, auch als Poissonsche Zahl bezeichnet, ist das Verhältnis der Querkontraktion zur longitudinalen Dehnung des Stabes,

$$\varepsilon_{11} = -\nu\varepsilon_{33} \text{ mit } \nu := \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} = \frac{\lambda}{6\lambda + 5\mu}.$$

Die Poissonsche Zahl  $\nu$  hat daher keine Einheit.

Im Abschnitt 2.4 haben wir festgestellt, dass  $K > 0$  und  $\mu > 0$  gelten muss. Dadurch erhalten wir Schranken für  $\nu$ :

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}.$$

In der Praxis ist es nun sinnvoll eine Fallunterscheidung für  $\nu$  zu machen. Es wurden bisher nur Stoffe mit  $\nu \geq 0$  gefunden. Materialien mit  $\nu < 0$  würden breiter werden, wenn man sie in die Länge zieht. Der Fall  $\nu = 0$  entspricht einer einseitigen Kompression. Dabei ist der Stab derart seitlich befestigt, dass die Querdimension unverändert bleibt, während sich seine Länge in  $x_3$ -Richtung verkleinert. Die Bedingung  $\nu > 0$  entspricht der Forderung  $\lambda > 0$ , so dass wir im Folgenden mit  $\mu, \lambda > 0$  arbeiten werden.

Die einzelnen Materialkonstanten können ineinander überführt werden,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, & E &= \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, & \nu &= \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} = \frac{\lambda}{6\lambda + 5\mu}, \\ K &= \frac{E}{3(1 - \nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \end{aligned}$$

Die in Abschnitt 2.5 gefundene Navier-Gleichung kann so mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Poissonschen Zahl  $\nu$  ausgedrückt werden,

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \mathbf{f}.$$

*Beispiel* (Stahl). Wir betrachten einen Stahlbalken unter Einfluss der Gravitation. Die Konstanten  $E$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  und  $\lambda$  sind abhängig vom betrachteten Material. Für Stahl findet man als Wert für das Elastizitätsmodul

$$E \approx 210 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Die Poissonsche Zahl liegt zwischen

$$\nu = 0,25 \dots 0,3.$$

Mit  $\nu = 0,25$  erhalten wir für die Laméschen Koeffizienten

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{\frac{1}{4}E}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{2}{5}E, \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{4}}E = \frac{2}{5}E \end{aligned}$$

und damit

$$\mu = \lambda \approx 84 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Als äußere Kraft betrachten wir die Schwerkraft  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$  mit der Normalfallbeschleunigung  $\mathbf{g} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{pmatrix}$ . Die Dichte von Stahl beträgt  $\rho \approx 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Insgesamt lautet die Navier-Gleichung:

$$84 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \Delta \mathbf{u} + 168 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{grad div } \mathbf{u} \approx 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \mathbf{g}.$$

Skaliert man diese Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned} 0,84 \Delta \mathbf{u} + 1,68 \text{grad div } \mathbf{u} &\approx 7,8 \cdot 10^{-8} \cdot 9,8 \mathbf{e}_3 \\ &\approx 0,76 \cdot 10^{-6} \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Hier fällt unter anderem auf, dass die Laméschen Koeffizienten einen (um den Faktor  $10^6$ ) größeren Einfluss auf das Verhalten von  $\mathbf{u}$  haben, als das äußere Kraftfeld. Also ist die Erdanziehungskraft vernachlässigbar gegenüber den deformierenden Kräften.

Man kann dieses Beispiel erweitern, indem man durch die Randbedingungen vorgibt, wie der Balken befestigt ist. Ausführungen dazu findet man z. B. in Sokolnikoff [14].

## 2.7 Übersicht der hergeleiteten Formeln

Wir haben die Deformation eines homogenen isotropen festen Körpers, der das Gebiet  $\Omega$  einnimmt, ausgedrückt über die *Verschiebungsfunktion*  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, T] \subset \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Der *Verzerrungstensor*  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  ist der symmetrisierte Gradient von  $\mathbf{u}$  und beschreibt die räumliche Änderung der Verschiebungsfunktion,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Die inneren Spannungen werden durch den *Spannungstensor*  $\boldsymbol{\sigma}$  ausgedrückt. Nach dem Hookeschen Gesetz hängt  $\boldsymbol{\sigma}$  linear von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ab,

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{I}_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5)$$

Die Laméschen Koeffizienten  $\mu$  und  $\lambda$  sind dabei positiv und reell. Während  $\boldsymbol{\sigma}$  die inneren molekularen Kräfte des Körpers beschreibt, werden die äußeren makroskopischen Volumenkräfte durch  $\mathbf{f}$ , der späteren rechten Seite der Differentialgleichung, ausgedrückt,

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \times [0, T] \supset \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Alle ausschließlich auf den Rand des Körpers  $\partial\Omega$  wirkenden Kräfte bilden die Randbedingungen. Dirichlet-Randbedingungen erklären, wo der Rand des Körpers lokal fixiert ist. Neumann-Randbedingungen geben Auskunft über Kräfte, die auf die Oberfläche wirken. In der Anwendung treten meist gemischte Randbedingungen auf. Wir werden uns aber hier auf die beiden Spezialfälle konzentrieren, da die Aussagen für gemischte Randbedingungen ähnlich bewiesen werden können. Andere Randbedingungen sollen nicht betrachtet werden.

Aus der Betrachtung des thermodynamischen Gleichgewichts erhalten wir die *Navier-Gleichung*:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \quad (9)$$

bzw.

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (10)$$



### 3 Sobolew-Räume im $\mathbb{R}^d$

Bevor wir uns mit der Frage der Lösbarkeit der Navier-Gleichung beschäftigen, erinnern wir uns, wie die  $L^2$ -Integrierbarkeit im mehrdimensionalen Fall erklärt ist.

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Der Raum  $L^2(\Omega)^d$  ist der lineare Raum der komponentenweise in  $L^2(\Omega)$  liegenden Funktionen  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Versehen mit dem Skalarprodukt

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{L^2(\Omega)^d} = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) dx$$

und der induzierten Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} = \left( \sum_{i=1}^d \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} |u_i(\mathbf{x})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist  $L^2(\Omega)^d$  ein Hilbert-Raum.

Der Gradient der Verschiebungsfunktion ist aber eine Funktion von  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$  in  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . Wir definieren  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  als den linearen Raum der komponentenweise in  $L^2(\Omega)$  liegenden Funktionen  $A : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ . Der Raum  $L^2(\Omega)^{d \times d}$ , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\int A : B = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} A_{ij}(\mathbf{x}) B_{ij}(\mathbf{x}) dx$$

und der hierdurch induzierten Norm

$$\|A\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} = \left( \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} |A_{ij}(\mathbf{x})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ist ebenfalls ein Hilbert-Raum.

Schließlich können wir die Sobolew-Räume  $H^1(\Omega)^d$  und  $H_0^1(\Omega)^d$  erklären. Wir definieren

$$H^1(\Omega)^d := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d \mid \exists \nabla \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^{d \times d}\},$$

wobei  $\nabla \mathbf{f}$  die Matrix der schwachen partiellen Ableitungen von  $\mathbf{f}$  ist. Der Raum  $H^1(\Omega)^d$ , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{H^1(\Omega)^d} := \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) dx + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

und der induzierten Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} := \left( \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} |u_i(\mathbf{x})|^2 dx + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ist ein Hilbert-Raum.

Ebenso definieren wir

$$H_0^1(\Omega)^d := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d \mid \exists \nabla \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^{d \times d} \text{ und } \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Da quadratintegrierbare Funktionen fast überall definiert sind, bezeichnet  $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}$  die Spur von  $\mathbf{v}$  auf  $\Omega$ . Die Theorie zum Spuroperator in Sobolew-Räumen wird in Attouch, Buttazzo und Michaille [1, Seite 186 f.] behandelt.

Der Raum  $H_0^1(\Omega)^d$ , versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_0^1(\Omega)^d} := \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx$$

und der induzierten Norm

$$|\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d} := (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H_0^1(\Omega)^d}^{\frac{1}{2}}$$

mit  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ , ist ein Hilbert-Raum.

*Bemerkung.* Die oben definierte Norm von  $H_0^1(\Omega)^d$  ist eine Halbnorm von  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  und es gilt

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} = |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d}.$$

Der Dualraum von  $H_0^1(\Omega)^d$  wird wie üblich mit  $H^{-1}(\Omega)^d$  bezeichnet.

## 4 Zwei mögliche schwache Formulierungen

Ziel der Seminararbeit ist es, die Lösbarkeit der Navier-Gleichung im schwachen Sinne zu untersuchen. In diesem Kapitel werden wir dafür die schwache Formulierung aufstellen. Mit (7) und (8) haben wir, zumindest für hinreichend glatte Verschiebungsfelder, zwei äquivalente Darstellungen der Navier-Differentialgleichung. Wir werden im Folgenden feststellen, dass wir aus beiden Gleichungen schwache Formulierungen bilden können, dabei aber unterschiedliche Bilinearformen erhalten.

### 4.1 Satz und Formel von Gauß

Von nun an sei  $\Omega$  ein hinreichend reguläres Gebiet in  $\mathbb{R}^d$ . Dann gilt für genügend glatte skalare Funktionen  $f$  und  $g$  auf  $\Omega$  die folgende Formel der partiellen Integration, auch Formel von Gauß genannt,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} f g n_i. \quad (11)$$

Dabei bezeichnet  $n_i$  die  $i$ -te Komponente des Normalenvektors  $\mathbf{n}$ . Wie man in Abbildung 7 sieht, ist  $n_i = \cos \angle(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)$ .

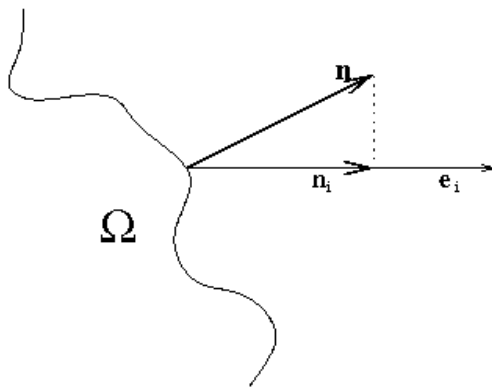


Abbildung 7: Normalenvektor  $n$

*Bemerkung* (Zusammenhang zum Satz von Gauß). Setzt man  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$  und  $g = 1$ , so

erhält man mit Gleichung (11) den Satz von Gauß,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cdot 1 \\ &= - \underbrace{\int_{\Omega} u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} 1}_{=0} + \sum_{i=1}^d \int_{\partial\Omega} u_i \cdot 1 \cdot n_i \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

## 4.2 Erste schwache Formulierung

Um eine schwache Formulierung zu erhalten, multiplizieren wir Gleichung (7) von rechts mit einer Testfunktion  $\mathbf{v}$  und integrieren über  $\Omega$ . Die benötigten Eigenschaften dieser Testfunktion werden weiter unten diskutiert. Somit erhalten wir zunächst

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Ist  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)^d = \mathbf{H}^1(\Omega)^{d*}$ , so können wir das Skalarprodukt auf der rechten Seite durch die duale Paarung ersetzen,

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Die linke Seite formen wir mit Hilfe der Formel von Gauß um,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= \sum_{i,j=1}^d - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \cdot v_i \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left( \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \int_{\partial\Omega} v_i \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j \right) \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Durch diese heuristische Rechnung schwächen wir die Forderungen an  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  ab. Musste anfangs  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  stetig differenzierbar sein, so reicht es nun, wenn  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)^{d \times d}$  und  $\nabla \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^{d \times d}$  ist.

Nun betrachten wir die möglichen Randbedingungen. Zunächst lautet das klassische Problem für Dirichlet-Randbedingungen wie folgt.

**Problem** (Dirichlet-Randbedingungen). Finde  $\mathbf{u} \in V$  zu  $\mathbf{f} \in V$  und  $\mathbf{g} \in V$  mit

$$\begin{cases} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Liegen Dirichlet-Randbedingungen vor, so gilt  $\mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\partial\Omega$ . Sei nun  $\tilde{\mathbf{g}}$  eine hinreichend glatte auf  $\Omega$  erklärte Funktion mit  $\tilde{\mathbf{g}}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}$ . Wir suchen dann bei der schwachen Formulierung Funktionen  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{g}} + H_0^1(\Omega)^d$ , d. h.,  $\mathbf{u}$  lässt sich darstellen als  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{g}}$  auf ganz  $\Omega$  mit  $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^d$ , so dass mit

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \underbrace{\mathbf{u}_0|_{\partial\Omega}}_{=0} + \underbrace{\tilde{\mathbf{g}}|_{\partial\Omega}}_{=\mathbf{g}}$$

die Randbedingung erfüllt ist. Wir testen mit Funktionen  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$  und erhalten als schwache Formulierung

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

bzw.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{g}}) : \nabla \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{g}}) \mathbf{n}.$$

Da  $\mathbf{u}_0 = 0$  auf  $\partial\Omega$  gilt, hängt das Integral  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{g}) \mathbf{n}$  und damit die rechte Seite nicht explizit von  $\mathbf{u}$  ab.

Wir werden im Folgenden nur homogene Dirichlet-Randbedingungen betrachten. Dadurch fällt das Randintegral weg und sowohl Testfunktion  $\mathbf{v}$  als auch Lösung  $\mathbf{u}$  sind Elemente von  $H_0^1(\Omega)^d$ . Wir definieren nun unsere Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}. \quad (12)$$

*Bemerkung.* Für  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \in L^2(\Omega)^{d \times d}$  und  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$  gilt im Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^{d \times d}$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}),$$

denn

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} &= \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij} \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Somit kann man an Stelle von Gleichung (12) auch schreiben:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}). \quad (12')$$

Damit lautet die schwache Formulierung des klassischen homogenen Dirichlet-Problems wie folgt.

**Problem 1.** Zu gegebenem  $\mathbf{f} \in V^* = H^{-1}(\Omega)^d$  finde  $\mathbf{u} \in V = H_0^1(\Omega)^d$ , so dass für alle  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$  gilt

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Bei Neumann-Randbedingungen gibt man die Änderung der Spannung am Rand des zu deformierenden Körpers vor.

**Problem** (Neumann-Randbedingungen). Finde  $\mathbf{u} \in V$  zu  $\mathbf{f} \in V$  mit

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{g}_a & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Wie oben erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}_a \mathbf{v} \end{aligned}$$

Wieder hängt die rechte Seite nicht von  $\mathbf{u}$  ab. Die Neumann-Randdaten fließen also in die rechte Seite ein. Daher betrachten wir auch hier nur homogene Randbedingungen. Daher ist zu lösen:

**Problem 2.** Zu gegebenen  $\mathbf{f} \in V^* = (H^1(\Omega)^d)^*$  finde  $\mathbf{u} \in V = H^1(\Omega)^d$ , so dass für alle  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$  gilt

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

### 4.3 Zweite schwache Formulierung

Beginnt man mit Gleichung (8), erhält man zunächst ein zur ersten klassischen Formulierung äquivalentes Problem, sofern die Funktionen allesamt glatt sind.

**Problem** (Dirichlet-Randbedingungen). Zu gegebenen  $\mathbf{f} \in V$  und  $\mathbf{g} \in V$  finde klassisch  $\mathbf{u} \in (C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^d$  mit

$$\begin{cases} -(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zunächst betrachten wir den Term  $\int_{\Omega} (-(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ . Wie oben bereits ausgeführt wurde, gilt

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -\int_{\Omega} \operatorname{grad} \left( \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \cdot \mathbf{v} \\
&= -\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \cdot v_i \\
&= \sum_{i,j=1}^d \left( \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \cdot v_i \cdot n_i \right) \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}).
\end{aligned}$$

Somit ist es sinnvoll, eine Bilinearform  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (13)$$

zu definieren. Wir erhalten damit die Gleichung

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} \mu \mathbf{n} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle. \quad (14)$$

Für  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$  verschwindet das Randintegral in Gleichung (14) und es ist folgendes Problem zu lösen.

**Problem 3.** Zu gegebenen  $\mathbf{f} \in V^* = H^{-1}(\Omega)^d$  finde  $\mathbf{u} \in V = H_0^1(\Omega)^d$ , so dass für alle  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$  gilt

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Will man nun Neumann-Randdaten angeben, sieht man an Gleichung (14), dass nur folgende Problemstellung zu sinnvollen Ergebnissen führt.

**Problem** (Neumann-Randbedingungen). Finde  $\mathbf{u} \in V$  zu  $\mathbf{f} \in V$  und  $\mathbf{g}_b \in V$  mit

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mu (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{n} = \mathbf{g}_b & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Wählt man nun wieder homogene Neumann-Randdaten, also  $\mathbf{g}_b = 0$ , so ergibt sich das folgende

**Problem 4.** Zu gegebenen  $\mathbf{f} \in V^* = (H^1(\Omega)^d)^*$  finde  $\mathbf{u} \in V = H^1(\Omega)^d$ , so dass für alle  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$  gilt

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

## 4.4 Vergleich der Formulierungen

Man könnte erwarten, dass  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$  gilt und auch die Neumann-Randbedingungen aus den Problemen 2 und 4 übereinstimmen würden. Dies ist nicht der Fall, wie man mit einigen Umformungen sieht. Als erstes nehmen wir den Integranden aus der Form  $a$  und versuchen ihn in den Integranden der Form  $b$  zu überführen,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \mathbf{v} &= (\lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \text{grad } \mathbf{v} \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left( \lambda \sum_k \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right) \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left( \lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{2}{2} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \lambda \text{div } \mathbf{u} \cdot \text{div } \mathbf{v} + \mu \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} + \mu \left( \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

An Stelle des gewünschten Terms  $\mu \text{div } \mathbf{u} \cdot \text{div } \mathbf{v}$  steht der Term  $\mu \left( \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$ . Da beide Terme in den Formen unter dem Integral stehen, kann man für glatte Funktionen partielle Integration zur Umformung verwenden,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \sum_{i,j=1}^d \left( - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} v_i + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_i n_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left( \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_i n_j - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} v_i n_i \right) \\ &= \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} - \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Damit haben wir gesehen, dass die Bilinearformen  $a$  und  $b$  im Allgemeinen nicht übereinstimmen, genauer gesagt gilt, wenn man gleiche Randbedingungen fordert,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} - \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})).$$

Es fällt zunächst auf, dass im Falle von homogenen Dirichlet-Randdaten die Formen übereinstimmen, da  $\mathbf{v}$  auf  $\partial\Omega$  verschwindet. Bei Neumann-Randdaten funktioniert das nicht. Man schreibt hier das Randintegral auf die rechte Seite. Setzt man voraus, dass die Bilinearformen identisch sind, erhält man aus  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g}_a$  und  $\mu(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \text{div } \mathbf{u} \mathbf{n} = \mathbf{g}_b$  dass  $\mathbf{g}_a = \mathbf{g}_b + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} - \text{div } \mathbf{u} \mathbf{n}$  gilt.

Nachdem wir dieses Problem kennen, wollen wir es im Folgenden ignorieren und annehmen, dass wir, wenn eine der beiden Bilinearform betrachtet wird, die Randbedingungen entsprechend so gewählt sind, dass sie homogen sind.



## 5 Lösbarkeit des stationären Problems

Um zu prüfen, ob es zu den obigen Problem eine eindeutige Lösung gibt, verwenden wir das Lemma von Lax-Milgram.

**Satz 5.1** (Lemma von Lax-Milgram). *Sei  $(V, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|_V)$  ein Hilbert-Raum und sei  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear, beschränkt und stark positiv. Dann gibt es zu jedem  $\mathbf{f} \in V^*$  genau ein  $\mathbf{u} \in V$ , so dass für alle  $\mathbf{v} \in V$  gilt:*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

*Bemerkung.* Die Form  $a$  heißt *beschränkt*, falls eine positive Konstante  $\beta$  existiert mit

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \beta \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

für alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Eine Form  $a$  heißt *stark positiv*, falls eine positive Konstante  $\mu$  existiert, so dass

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \mu \|\mathbf{u}\|_V^2.$$

für alle  $\mathbf{u} \in V$  gilt.

### 5.1 Dirichletsches Randwertproblem

In Kapitel 3 haben wir uns bereits mit den in der schwachen Lösungstheorie auftretenden Räumen, Normen und Skalarprodukten beschäftigt. Im Falle von homogenen Dirichlet-Randdaten wählen wir  $V = H_0^1(\Omega)^d$ . In Kapitel 4 haben wir zwei Bilinearformen  $a$  und  $b$  hergeleitet. Wir behaupten nun, dass beide schwache Formulierungen der Navier-Gleichung mit Dirichlet-Randdaten eindeutige Lösungen besitzen.

**Behauptung.** Es gibt genau eine Lösung von Problem 1 aus Kapitel 4.2.

Beim Beweis verwenden wir Satz 5.1, d. h., wir prüfen die Voraussetzungen. Die Bilinearform  $a$  ist *beschränkt*. Wir verwenden die Darstellung von  $\boldsymbol{\sigma}$  aus Gleichung (5) in Abschnitt 2.5,

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{I}_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Seien nun  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$  beliebig. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} &= \left( \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left( \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (|\nabla \mathbf{u}| + |(\nabla \mathbf{u})^T|) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}.
\end{aligned}$$

Außerdem ist  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \operatorname{tr} \nabla \mathbf{v}$ , so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \right| \\
&\stackrel{\lambda, \mu > 0}{\leq} \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}| \cdot |\operatorname{div} \mathbf{v}| + 2\mu \underbrace{\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}}_{\leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}} \underbrace{\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}}_{\leq \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}} \\
&\leq \lambda \left( \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
&\leq (\lambda + 2\mu) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
&= (\lambda + 2\mu) |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d} |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d},
\end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung von Cauchy und Schwarz verwendet haben.

Die Bilinearform  $a$  ist auf  $H_0^1(\Omega)^d$  *stark positiv*. Um dies zu zeigen, benötigen wir als Hilfsmittel eine Ungleichung von Korn.

**Satz 5.2** (Erste Kornsche Ungleichung). *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^d$ . Dann erfüllt jede Funktion  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d$  die Ungleichung*

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \leq 2 \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2.$$

*Beweis.* Sei zunächst  $\mathbf{u} \in C_0^\infty$ . Mit der Formel von Gauß (vgl. Satz 11 aus Kapitel 4.1)

und der Tatsache, dass  $\mathbf{u}$  auf dem Rand von  $\Omega$  verschwindet, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right|^2 \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left( \frac{1}{4} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + \frac{2}{4} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2 \right) \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 - \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + 0 \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 0 \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2}_{\geq 0} \\
&\geq \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \\
&= \frac{1}{2} |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d}^2.
\end{aligned}$$

Bekanntlich gilt  $\overline{C_0^\infty} = H_0^1(\Omega)^d$ , so dass wir mit dem üblichen Dichtheitsargument die Behauptung erhalten.  $\square$

Nun können wir recht einfach zeigen, dass  $a$  stark positiv ist.

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} (\lambda |\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 + 2\mu |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2) \\
&= \underbrace{\int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2}_{\geq \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2} \\
&\geq \mu |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d}^2.
\end{aligned}$$

Damit ist  $a : H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, stark positive Bilinearform und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 5.1, dem Lemma von Lax-Milgram. Somit folgt die eindeutige Lösbarkeit für beliebiges  $f \in H^{-1}(\Omega)$ .

**Behauptung.** Das Problem 3 aus Abschnitt 4.3 besitzt eine eindeutige Lösung.

Wie oben beweisen wir die Behauptung mit dem Lemma von Lax-Milgram. Wir zeigen also, dass die Bilinearform  $b : H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$  aus Definition (13) im Abschnitt 4.3 beschränkt und stark positiv ist.

Die Form  $b$  ist *beschränkt*. Das sieht man mit der Dreiecksungleichung und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \right| \\
&\stackrel{\lambda, \mu > 0}{\leq} \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}| + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}| \\
&\leq \mu \left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \mathbf{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (\lambda + \mu) \left( \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\lambda + 2\mu) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
&= (\lambda + 2\mu) |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d} |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Die Bilinearform  $b$  ist *stark positiv*, da

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \underbrace{(\mu + \lambda) \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2}_{\geq 0} \\
&\geq \mu |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d}^2.
\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Im Vergleich zur Bilinearform  $a$  bekommt man hier die starke Positivität quasi geschenkt. Man benötigt insbesondere dafür nicht die erste Ungleichung von Korn. Die Ursache liegt in der unterschiedlichen Wahl der Randdaten. Es fällt auf, dass die Umformung zum Vergleich der Formen in Abschnitt 4.4, dieselbe ist wie die im Beweis der ersten Kornschen Ungleichung.

Also ist  $b : H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, stark positive Bilinearform und mit dem Satz 5.1 besitzt das Problem 3 eine eindeutige Lösung. Damit haben wir die eindeutige Lösbarkeit beider schwacher Formulierungen im  $H_0^1(\Omega)^d$  gezeigt.

## 5.2 Neumannsches Randwertproblem

**Behauptung.** Die Probleme 2 und 4 aus den Abschnitten 4.2 bzw. 4.3 besitzen eine eindeutige Lösung.

Ziel ist es in diesem Abschnitt, die Lösbarkeit für Neumann-Randbedingungen zu prüfen. Wieder verwenden wir das Lemma von Lax-Milgram, d. h. den Satz 5.1. Da nun für die in Abschnitt 3 definierten Normen gilt

$$|\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d,$$

sind die Formen  $a$  und  $b$  beschränkt. Genauer ist

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq (\lambda + 2\mu) |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d} |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d} & \text{und } |b(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq (\lambda + 2\mu) |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d} |\mathbf{v}|_{H_0^1(\Omega)^d} \\
&\leq (\lambda + 2\mu) \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d} & &\leq (\lambda + 2\mu) \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Dass die Formen  $a$  und  $b$  auf  $H^1(\Omega)^d$  nicht stark positiv sind, sieht man unter anderem, wenn man  $\mathbf{v} = \mathbf{u} = \text{const}$  setzt. Die Ursache dafür ist, dass keine Eindeutigkeit vorliegt. Neumann-Randbedingungen bedeuten physikalisch, dass am Rand des Körpers die Spannung vorgegeben wird. Sie erklären welche Kräfte auf die Oberfläche wirken. Dabei ist der Körper nicht fixiert. Es kann somit ein ruhender Körper die gleiche Deformation erfahren wie ein gleichförmig bewegter oder ein rotierender Körper. Es sind also die in Abschnitt 2.1 beschriebenen Starrkörperbewegung, die wir hier ausschließen müssen, um eine eindeutige Lösbarkeit zu erhalten. Dies geschieht indem wir den bisher benutzten Raum  $H^1(\Omega)^d$  nach der Menge aller Starrkörperbewegungen faktorisieren. Zur Vorbereitung brauchen wir zwei Hilfsmittel.

**Satz 5.3** (Zweite Kornsche Ungleichung). *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es eine Konstante  $c = c(\Omega) > 0$ , so dass für alle  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d$  gilt*

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \geq c \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (15)$$

Der Beweis der Ungleichung kann auf unterschiedliche Arten geführt werden. In Oleinik, Shamaev und Yosifyan [11] werden Abschätzungen für Hilfsfunktionen bewiesen, mit denen dann die eigentliche Ungleichung gezeigt wird. In McLean [9] erfolgt der Beweis mittels Fouriertransformation.

**Lemma 5.4** (Starrkörperbewegung). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet. Für  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$  ist genau dann  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0$ , wenn  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{x} + \mathbf{a}$  mit  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  gilt.*

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ji} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_k. \end{aligned}$$

Sei nun  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0$ , dann folgt nach obiger Rechnung  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_k = 0$  für alle  $i, j, k = 1, \dots, 3$ . Also ist  $\mathbf{u}$  eine lineare Funktion der Form  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$  mit  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ . Außerdem ist  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0$ . Somit gilt für die Komponenten der Matrix  $A$

$$a_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -a_{ji}.$$

Insbesondere ist  $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$ , also  $a_{kk} = 0$ . Damit ist  $A$  eine schiefsymmetrische Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und, wie bereits in Abschnitt 2.1 gezeigt, folgt  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{x} + \mathbf{a}$  mit  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ .

Sei nun andererseits  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \mathbf{x} + \mathbf{a}$  mit  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  gegeben. Dann heißt das

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_3x_2 + b_2x_3 + a_1 \\ b_3x_1 - b_1x_3 + a_2 \\ -b_2x_1 + b_1x_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

Man rechnet nach, dass für alle  $i, j = 1, \dots, 3$   $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0$  gilt, womit die Behauptung  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0$  folgt.  $\square$

*Bemerkung.* Das Lemma zur Starrkörperbewegung macht nur Aussagen für den Fall  $d = 3$ . Die Aussage gilt auch für  $d = 1, 2$ . Dies sieht man, indem man die Starrkörperbewegung in der Form  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{a}$  schreibt.

**Definition 3** (Menge der Starrkörperbewegungen).  $\mathcal{M}$  sei die Menge aller Starrkörperbewegungen, d. h.

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \mid \exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \exists B \in \mathbb{R}^{d \times d} : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{a}\}. \quad (16)$$

Die Menge der Starrkörperbewegungen  $\mathcal{M}$  ist ein linearer Unterraum von  $H^1(\Omega)^d$ . Wir betrachten für den Rest dieses Abschnittes den Faktorraum  $(H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}})$ , versehen mit der Norm

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}} := \inf_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{v} + \mathbf{m}\|_{H^1(\Omega)^d}.$$

Analog dazu verwenden wir den  $(L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}, |\cdot|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}})$  mit der Norm

$$|\mathbf{v}|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}} := \inf_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{v} + \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Als nächstes wollen wir uns ein paar Eigenschaften der Normen vergegenwärtigen. Es gilt  $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$  genau dann, wenn  $\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 0$ .

**Lemma 5.5.** Die Abbildung  $\mathbf{v} \mapsto \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}$  ist eine zu  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}}$  äquivalente Norm auf  $H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$ .

*Beweis.* Als eine Folgerung aus dem Satz 5.4 ist für  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$  und  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} + \mathbf{m}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m})}_{=0} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}). \quad (17)$$

Daher ist für  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$ , bzw.  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}$ , die Abbildung  $\mathbf{v} \mapsto \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}$  wohldefiniert. Weil  $\boldsymbol{\varepsilon}$  linear ist, zeigt man leicht, dass  $\|\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}$  eine Halbnorm auf  $H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$  darstellt. Mit Hilfe des Lemmas zur Starrkörperbewegung kann man nun zeigen, dass es sich sogar um eine Norm handelt, denn

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} = 0 &\Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in \mathcal{M} \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Insbesondere ist auch

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{v}|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 0.$$

**Lemma 5.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet. Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$  gilt

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \geq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}}^2. \quad (18)$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch *reductio ad absurdum*. Angenommen es gelte

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 < C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}}^2. \quad (19)$$

Dann existiert insbesondere eine Folge  $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$  mit  $\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\|\mathbf{v}_n\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 1$ . Die Folge  $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt in  $H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$ , da nach der zweiten Kornschen Ungleichung, die auch im Faktorraum gilt, folgt

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + |\mathbf{v}_n|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}} \geq c \|\mathbf{v}_n\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}}. \quad (20)$$

Daher existiert eine schwach konvergente Teilfolge  $(\mathbf{v}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$  mit  $\mathbf{v}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{v}$  in  $H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$  für  $k \rightarrow \infty$ , so dass

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{n_k})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 = 0.$$

Daraus folgt mit obiger Überlegung, dass  $|\mathbf{v}|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 0$  gilt. Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass  $H^1(\Omega)^d$  kompakt in  $L^2(\Omega)^d$  eingebettet ist, kurz

$$H^1(\Omega)^d \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)^d.$$

Das lässt sich auf die faktorisierten Räume übertragen,

$$H^1(\Omega)^d/\mathcal{M} \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}.$$

Damit ist  $(\mathbf{v}_{n_k})$  stark konvergent in  $L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}$ , d. h.

$$\mathbf{v}_{n_k} \rightarrow \mathbf{v} \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ in } L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}$$

Da aber  $|\mathbf{v}_n|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 1$ , ist auch  $|\mathbf{v}_{n_k}|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und somit  $|\mathbf{v}|_{L^2(\Omega)^d/\mathcal{M}} = 1$ . Da  $1 \neq 0$  gilt, haben wir die Aussage zum Widerspruch geführt und die Behauptung 5.6 bewiesen.  $\square$

Nun können wir die starke Positivität der Bilinearformen  $a$  und  $b$  in  $H^1(\Omega)^d$  zeigen. Wie wir bereits in Abschnitt 5.1 gesehen haben, sind die Bilinearformen stark positiv in  $H_0^1(\Omega)^d$ . Mit der Behauptung 5.6 erhalten wir für  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leq \mu |\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ &= \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \\ &\leq \mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \\ &\leq \mu C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d/\mathcal{M}}^2 \end{aligned}$$

mit der Konstanten  $C = C(\Omega)$  aus Gleichung (18). Diese Abschätzung funktioniert analog für die Bilinearform  $b$ .

### 5.3 Energiefunktional

Sei  $a$  eine symmetrische, stark positive Bilinearform – dies ist im Falle der Navier-Gleichung gegeben. Dann definieren wir das Energiefunktional  $\mathcal{J} : V \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Die Aufgabe, *finde ein  $\mathbf{u} \in V$  mit*

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in V} \mathcal{J}(\mathbf{v}),$$

ist genau dann eindeutig lösbar, falls es zu jedem  $f \in V^*$  genau eine Lösung  $\mathbf{u} \in V$  gibt, so dass für alle  $\mathbf{v} \in V$  gilt

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Dies kann man mit Hilfe der Gateaux-Ableitung einsehen.

Im Falle der Navier-Gleichung besteht ein Zusammenhang zwischen dem Energiefunktional  $\mathcal{J}$  und der freien Energie  $\mathcal{F}$ . Die freie Energie, eingeführt in Abschnitt 2.4, kann beschrieben werden, als die Funktion für die gilt

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} = \sigma_{ik} \text{ für alle } i, k = 1, \dots, d.$$

Dabei hatten wir  $\mathcal{F}$  als Funktion von  $\varepsilon$  dargestellt,

$$\mathcal{F} = \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr} \varepsilon \operatorname{tr} \varepsilon + \mu \varepsilon : \varepsilon. \quad (3)$$

Damit ist

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + c.$$

Hierbei soll  $c$  nicht explizit von  $\varepsilon$  abhängen. Wählt man als konstanten Term  $c = - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$ , so ist

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \mathcal{J}(\mathbf{v}).$$

Im Buch von Temam und Miranville [16] wird daher  $\mathcal{J}$  auch als elastische Deformationsenergie von  $\varepsilon$  und  $\mathcal{F}$  als Deformationsenergiedichte von  $\varepsilon$  bezeichnet.



## 6 Lösbarkeit des instationären Problems

Mit (9) und (10) haben wir in Abschnitt 2.5 die instationäre Navier-Differentialgleichung formuliert. Da die Betrachtungen beider Formulierungen analog zueinander sind, beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf Gleichung (10).

Wir betrachten in unserem Modell ein homogenes, isotropes Medium bei kleinen Deformationen. Daher können wir annehmen, dass die zeitliche Änderung der Dichtefunktion  $\rho = \rho(t)$  sehr klein ist. Wir setzen deshalb  $\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$  voraus. Damit ist  $\rho$  keine Funktion in der Zeit, wohl aber eine ortsabhängige Funktion,

$$\rho : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Weiterhin schließen wir aus, dass die Dichtefunktion an einer Stelle verschwindet. In einem Gebiet mit Dichte Null besteht ein Vakuum. Da wir Deformationen fester Körper betrachten, können wir den Vakuumzustand ausschließen. Wir können daher die Gleichung (10) durch die Dichte  $\rho$  dividieren,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - \left(\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\right) \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}}{\rho}.$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \lambda_\rho &:= \frac{\lambda}{\rho}, \\ \mu_\rho &:= \frac{\mu}{\rho}, \\ \mathbf{f}_\rho &:= \frac{\mathbf{f}}{\rho} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} - (\lambda_\rho + \mu_\rho) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu_\rho \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_\rho. \quad (21)$$

Nun können wir wie in Abschnitt 4.3 die schwache Formulierung aufstellen. Sei also  $\mathbf{v}$  ein Element aus dem zu Grunde liegenden Banachraum ( $H_0^1(\Omega)^d$  bei homogenen Dirichlet-Randdaten und  $H^1(\Omega)^d$  bei homogenen Neumann-Randdaten). Dann erhalten wir, wenn wir Gleichung (21) von rechts mit  $\mathbf{v}$  multiplizieren, integrieren und die partielle Integration anwenden, die folgende Gleichung

$$\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} \mathbf{v} + \int_\Omega (\lambda_\rho + \mu_\rho) \text{div } \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mu_\rho \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{f}_\rho \mathbf{v}.$$

Was wir auch schreiben als

$$\frac{d^2}{dt^2} ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{H^1(\Omega)^d} + b_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}_\rho, \mathbf{v} \rangle, \quad (22)$$

wobei die Form  $b_\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nicht von der Zeit  $t$  abhängt, da  $\rho$  zeitlich konstant ist. Bevor wir die Formulierung (22) auf Lösbarkeit untersuchen, erinnern wir an den Begriff des Gelfanddreiers.

**Definition 4** (Gelfanddreier). Sei  $V$  ein reeller, reflexiver, separabler Banachraum und  $H$  ein reeller, separabler Hilbertraum. Sei  $V$  stetig eingebettet in  $H$  und liege dicht in  $H$ , kurz  $V \xhookrightarrow{d} H$ .

Dann bilden  $V$ ,  $H$  und  $V^*$ , der Dualraum von  $V$ , einen Gelfanddreier (Evolutionstripel).

Die von uns verwendeten Räume bilden die Gelfanddreier:  $H_0^1(\Omega)^d \subseteq L^2(\Omega)^d \subseteq H^{-1}(\Omega)^d$  und  $H^1(\Omega)^d \subseteq L^2(\Omega)^d \subseteq (H^1(\Omega)^d)^*$ .

**Satz 6.1** (Lösbarkeit des instationären Problems). Sei  $V \subseteq H \subseteq V^*$  ein Gelfanddreier und sei  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmäßig beschränkte, symmetrische Bilinearform, die einer Gårdingschen Ungleichung genüge, d. h.

$$\exists \kappa \geq 0 \exists \mu > 0 \forall \mathbf{v} \in V : a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \mu \|\mathbf{v}\|_V^2 - \kappa \|\mathbf{v}\|_H^2.$$

Ferner seien  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H)$ ,  $\mathbf{u}_0 \in V$  und  $\mathbf{u}_1 \in H$  gegeben.

Dann gibt es genau ein  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$  mit  $\frac{d}{dt}\mathbf{u} \in L^2(0, T; H)$ , so dass für alle  $\mathbf{v} \in V$  im schwachen Sinne auf  $(0, T)$  gilt:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle.$$

Insbesondere hängt  $\mathbf{u}$  stetig von den Daten  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{u}_1$  ab und es gilt die A-priori-Abschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \left\| \frac{d}{dt}\mathbf{u} \right\|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq \text{const} \cdot T \left( \|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \|\mathbf{u}_1\|_H^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; H)}^2 \right).$$

Einen Beweis von Satz 6.1 findet man in Wloka [17].

Die oben definierte Form

$$b_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\lambda_\rho + \mu_\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu_\rho \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \quad (23)$$

wurde – mit anderen Koeffizienten – bereits in den Abschnitten 5.1 und 5.2 untersucht. Dabei haben wir nachgewiesen, dass  $b_\rho$  bilinear, beschränkt und stark positiv ist. Eine stark positive Bilinearform genügt einer Gårdingschen Ungleichung mit  $\kappa = 0$ . Wie man leicht sieht, ist  $b_\rho$  symmetrisch. Daher sind alle Voraussetzungen des Satzes 6.1 erfüllt und wir erhalten eine eindeutig bestimmte Lösung des Anfangsrandwertproblems für die instationäre Navier-Differentialgleichung.

## Literatur

- [1] H. Attouch, G. Buttazzo und G. Michaille: *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: Applications to PDEs and optimization*, MPS/SIAM Series on Optimization, Philadelphia, 2006.
- [2] D. Braess: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1992.
- [3] S. C. Brenner und L. R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [4] P. G. Ciarlet: *Mathematical Elasticity: Volume I: three-dimensional elasticity*, North-Holland Verlag, Amsterdam, 1988.
- [5] P. G. Ciarlet: *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, In : P. G. Ciarlet und J. L. Lions (Hrsg.) *Handbook of Numerical Analysis, Volume II, Finite Element Methods (Part 1)*, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [6] R. Dautray und J.-L. Lions: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 2: Functional and Variational Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [7] E. Emmrich: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen: Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*, Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [8] L. D. Landau und E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 7: Elastizitätstheorie*, 6. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin, 1989.
- [9] W. McLean: *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [10] J. T. Oden und J. N. Reddy: *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1976.
- [11] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev und G. A. Yosifyan: *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [12] M. Renardy und R. C. Rogers: *An Introduction to Partial Differential Equations*, 2. Auflage, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [13] H. J. Schlüter: *Finite-Element-Methode (Vorlesungsskript)*, 1999, [http://www.uni-duisburg.de/FB7/IST/studium/Festigkeit/fem\\_skript.html](http://www.uni-duisburg.de/FB7/IST/studium/Festigkeit/fem_skript.html).
- [14] I. S. Sokolnikoff: *Mathematical Theory of Elasticity*, 2. Auflage, McGraw-Hill Book Company, New York – Toronto – London, 1956.

- [15] R. Temam: *Mathematical Problems in Plasticity*, Gauthiers-Villars, Paris, 1985.
- [16] R. Temam und A. Miranville: *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [17] J. Wloka: *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

Historische Daten der Einleitung wurden den Büchern von Sokolnikoff [14] und Emmerich [7] entnommen. Das Kapitel 2 richtet sich nach dem ersten Kapitel von Landau und Lifschitz [8]. Zusätzlich wurden die Bücher von Braess [2] sowie Temam und Miranville [16] benutzt. Die distributionelle Lösung wird in McLean [9, Seite 299 ff.] erklärt. Die Lösbarkeit der stationären Navier-Gleichung wurde mit Hilfe von [11] und [4] nachvollzogen. Einen allgemeineren Satz zur Lösbarkeit von hyperbolischen Gleichungen findet man in Wloka [17, Seite 419 ff.].