Seminararbeit

Eine Einführung in Young-Maße

Im Rahmen des Seminars:
‚Evolutionsgleichungen'

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Betreut durch: Prof. Dr. Etienne Emmrich

Vorgelegt von: Andrea Nickel

Bielefeld im Wintersemester 2011/2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Motivation **3**

3 Young-Maße **6**

3.1 Existenz 6

3.2 Folgerungen 10

4 Ausblick **13**

Literaturverzeichnis **14**

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Hilfsmittel für die Charakterisierung schwacher Grenzwerte vorzustellen - das Young-Maß. Dieses wurde eingeführt von L. C. Young, um Probleme im Rahmen der Variationsrechnung behandeln zu können, für die auf herkömmliche Art die Existenz eines Minimierers nicht nachgewiesen werden kann.[1] Eine entscheidende Rolle spielt dabei der Begriff der *schwachen Unterhalbstetigkeit*, was in Kapitel 2 motiviert werden soll.

Betrachten wir etwa eine Funktionenfolge $u^n : \Omega \to \mathbb{R}^p$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt, mit schwachem Grenzwert $u \in L^1(\Omega)$ und F eine beliebige stetige Funktion auf $\mathbb{R}^p$, so stellt sich die Frage, welche Aussagen bezüglich des schwachen Grenzwertes

$$\text{weak-}\lim_{n\to\infty} F(u^n(x))$$

getroffen werden können. Dieser entspricht in der Regel nämlich nicht $F(u(x))$, was im nachfolgenden Kapitel anhand einiger Beispiele veranschaulicht werden soll. Es ist jedoch möglich den Zusammenhang derartiger Grenzwerte über Wahrscheinlichkeitsmaße genauer zu beschreiben. Im Verlauf der Arbeit werden wir zeigen, dass für Funktionenfolgen, wie oben beschrieben, eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ mit kompaktem Träger existiert, mit Hilfe derer der schwache Grenzwert von $F(u^n)$ charaktierisiert werden kann. Für den speziellen Fall einer periodischen Funktionenfolge u^n kann ein solches Young-Maß sogar konkret angegeben werden.
Gelten zusätzliche Voraussetzungen für die kompakten Träger der Young-Maße, so können wir auch einen Zusammenhang zur starken Konvergenz herstellen: diese liegt genau dann vor, wenn sich der kompakte Träger jeweils auf einen Punkt beschränkt; das heißt also, wenn ν_x einem Dirac-Maß entspricht.

Der Hauptteil dieser Arbeit basiert im Wesentlichen auf Luc Tartars *‚Compensated Compactness and applications to partial differential equations‘* aus [KU79] und dem Kapitel *‚Young measures and scalar conservation laws‘* in [Mál96].

[1] aus ‚A Version of the Fundamental Theorem for Young Measures ‘von J.M. Ball

2 Motivation

Im folgenden Kapitel wollen wir die Beziehung schwacher Grenzwerte, wie sie in der Einleitung beschrieben wurden, näher betrachten und ihre Bedeutung motivieren. Hierbei orientieren wir uns hauptsächlich an [Ped87] und [Mál96].

Eine derartige Problemstellung ergibt sich etwa beim Minimieren von Funktionalen im Zusammenhang mit schwacher Unterhalbstetigkeit, wie in [Ped87] genauer beschrieben.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt und I gegeben durch

$$I(u) = \int_\Omega W(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

für W nichtnegativ und stetig. Um nun einen Minimierer von I zu finden, das heißt ein $\bar{u} \in A \subset W^{1,p}(\Omega)$, sodass $I(\bar{u}) \leq I(u)$ für alle $u \in A$, muss bekanntlich gelten:

- $A \subset W^{1,p}(\Omega)$ ist abgeschlossen und konvex,

- I ist koerziv, das heißt für $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \infty$ gilt $I(u) \to \infty$ und

- I ist unterhalbstetig, das heißt für jede Folge mit $u^n \to u$ gilt

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u^n).$$

Da A als abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines reflexiven Banachraumes gefordert wird, folgt für $u^n(x) \in A$ unmittelbar die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge mit Grenzwert in A. Die Frage, die sich automatisch stellt, ist, ob sich auf gleiche Weise ein Minimierer $\bar{u}$ für I finden lässt, wenn statt starker nur schwache Konvergenz vorliegt. Welche Bedingungen müssen also an I, oder genaugenommen an W, gestellt werden, sodass

$$u^n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u^n)$$

gilt? Problematisch ist allerdings, dass für stetige Funktionen F bei nur schwacher Konvergenz von u^n gegen u

$$F(u^n(x)) \rightharpoonup F(u(x))$$

im Allgemeinen <u>nicht</u> gilt. Dies soll anhand der folgenden Beispiele deutlich gemacht werden. Als Hilfsmittel zur konkreten Bestimmung des schwachen Grenzwertes dient das nachfolgende Lemma:

Lemma 1. *Seien $v \in L^2(0,2\pi)$ eine 2π-periodische Funktion und $v^n(x) = v(nx)$. Dann gilt*

$$v^n \rightharpoonup \frac{a_0}{2} \text{ in } L^2(0,2\pi), \text{ wobei } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(x)\,dx.$$

Beweis. Aufgrund der 2π-Periodizität kann die Funktion v in Fourierreihendarstellung betrachtet werden. Demnach gilt

$$v^n(x) = v(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(knx) + b_k\sin(knx)),$$

wobei $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(nx)\cos(knx)\,dx$ und $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(nx)\sin(knx)\,dx$.

Sei $0 \leq a \leq b \leq 2\pi$. Partielle Integration und die Anwendung der Hölderschen Ungleichung liefern

$$\begin{aligned}
|\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(knx)\,dx| &= |\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} a_k\frac{1}{kn}(\sin(knb) - \sin(kna))\,dx| \\
&\leq |\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}\cdot C| \\
&\leq \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|\cdot\frac{1}{k}) \\
&\leq \frac{C}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \text{ für } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$|\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(knx)\,dx| \longrightarrow 0.$$

Für jedes beliebige Intervall $(a,b) \subseteq (0,2\pi)$ gilt also

$$|\int_0^{2\pi}\left(v^n(x) - \frac{a_0}{2}\right)\chi_{(a,b)}(x)\,dx| \longrightarrow 0.$$

Aus diesem Ergebnis und der Approximation von Funktionen aus $L^2(0,2\pi)$ durch Treppenfunktionen folgt nun die schwache Konvergenz von v^n gegen $\frac{a_0}{2}$, denn

$$\int_0^{2\pi} v^n(x)\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\varphi(x)\,dx \text{ für alle } \varphi \in L^2(0,2\pi).$$

$\square$

Beispiel. Seien $u^n(x) = \sin(nx)$ und $g^n(x) = (u^n(x))^2$ für $x \in [0, 2\pi]$. Unter Anwendung von Lemma 1 erhält man für die schwachen Grenzwerte der Funktionenfolgen u^n und g^n, dass

$$u^n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = 0$$

und

$$g^n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} 1\, dx = \frac{1}{2}.$$

Insbesondere ist also

$$(\text{weak-}\lim_{n\to\infty} u^n(x))^2 = 0^2 < \frac{1}{2} = \text{weak-}\lim_{n\to\infty} (u^n(x))^2.$$

Bemerkung. Diese Relation gilt jedoch nicht für jede stetige Komposition. Betrachten wir nämlich $h^n(x) = \sqrt{g^n(x)} = |u^n(x)|$, dann folgt analog

$$h^n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx = \frac{2}{\pi},$$

aber

$$\sqrt{\text{weak-}\lim_{n\to\infty} g^n(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\pi} = \text{weak-}\lim_{n\to\infty} \sqrt{g^n(x)}.$$

Wie diese Grenzwerte zusammenhängen, liefert die Existenz einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit kompaktem Träger - den sogenannten Young-Maßen.

Mit Hilfe dieser Maße kann später auch eine Aussage darüber getroffen werden, für welche Funktionen die, im Hinblick auf schwache Unterhalbstetigkeit gewünschte, erste Ungleichung erfüllt ist.

3 Young-Maße

Einen Ansatz zur Beschreibung schwacher Grenzwerte liefert das von L.C. Young eingeführte Young-Maß. In diesem Kapitel, welches im Wesentlichen auf [Mál96] basiert, wollen wir zeigen, dass eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit kompaktem Träger existiert. Mit Hilfe einiger Beispiele soll verdeutlicht werden, wie schwache und sogar starke Konvergenz beschränkter Folgen mit diesen Maßen zusammenhängen.

3.1 Existenz

Bevor wir eine Existenzaussage bezüglich der Young-Maße formulieren und beweisen, sei zunächst kurz an den Begriff der Radon-Maße erinnert.
Der Raum der beschränkten Radon-Maße auf $\mathbb{R}^p$ wird beschrieben durch den Raum $(C_0(\mathbb{R}^p), \|\cdot\|_\infty)^*$. Dieser ist gegeben durch

$$M(\mathbb{R}^p) = \{\mu : C_0(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R} \mid \exists\, C > 0 : |\mu(f)| \leq C\|f\|_\infty \,\forall\, f \in C_c(\mathbb{R}^p)\}$$

und ist versehen mit der Norm

$$\|\mu\|_{M(\mathbb{R}^p)} = \sup_{\substack{f \in C_c(\mathbb{R}^p) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\mu(f)|$$

ein Banachraum. Gilt zusätzlich $\mu \geq 0$ und $\mu(\mathbb{R}^p) = 1$, so ist $\mu \in M(\mathbb{R}^p)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^p$.

Mit dem nächsten Satz erhalten wir nun die Existenz einer Familie solcher Wahrscheinlichkeitsmaße und damit das entscheidende Hilfsmittel zur Darstellung schwacher Grenzwerte.

Satz 1. *Seien $K \subset \mathbb{R}^p$ beschränkt, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt und $u^n : \Omega \to \mathbb{R}^p$ eine Funktionenfolge mit $u^n(x) \in K$ fast überall. Dann existiert eine Teilfolge $\{u^{n_k}\}$ von $\{u^n\}$ und eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$, genannt Young-Maße, mit den Eigenschaften*

$$\nu_x \geq 0,\ \nu_x(\mathbb{R}^p) = 1,\ \mathrm{supp}(\nu_x) \subset \overline{K} \text{ für fast alle } x \in \Omega$$

und es gilt $F(u^{n_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{F}$ in $L^\infty(\Omega)$ für alle stetigen Funktionen $F \in C(\mathbb{R}^p)$, wobei

$$\bar{F}(x) = \langle \nu_x, F\rangle = \int_\Omega F(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \text{ fast überall.}$$

Die Young-Maße $\{\nu_x\}$ sind für jedes $x \in \Omega$ als Wahrscheinlichkeit vorstellbar, mit welcher die Funktionenfolge $\{F(u^n)\}$ in einer Umgebung von x ihren schwachen Grenzwert annimmt.

Beispiel 1. Wählen wir etwa $F \in C(\mathbb{R}^p)$ als Identität, so ergibt sich für $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$

$$u^n \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_x, \mathrm{Id} \rangle = \int_\Omega \lambda \, d\nu_x(\lambda) = u(x).$$

Beispiel 2. Wie in [Mál96] und [DiP85] beschrieben, lässt sich für den speziellen Fall, dass $\{u^n\}$ eine periodische Funktionenfolge ist, sogar ein konkretes Young-Maß, unabhängig von $x \in \Omega$, angeben. Zurückgreifend auf Lemma 1 wissen wir, dass die Funktionenfolge $u^n(x) = \sin(nx)$ schwach$*$ gegen $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$ in $L^\infty(0, 2\pi)$ konvergiert. Für eine stetige Funktion g gilt dann aufgrund der Periodizität von u^n, dass

$$g(u^n) \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sin(x)) \, dx \text{ in } L^\infty(0, 2\pi).$$

Verwendet man nun die Eigenschaften der Sinus-Funktion und substituiert mit $\lambda = \sin(x)$, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sin(x)) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} \, d\lambda = \int_0^{2\pi} g(\lambda) \chi_{[-1,1]}(\lambda) \frac{d\lambda}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Gleichzeitig liefert Satz 1 die Existenz der entsprechenden Familie von Young-Maßen, sodass

$$g(u^n) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_x, g \rangle = \int_0^{2\pi} g(\lambda) d\nu_x(\lambda).$$

Zusammmenfassend erhalten wir damit für $\{\nu_x\}$, dass

$$d\nu_x(\lambda) = \chi_{[-1,1]}(\lambda) \frac{d\lambda}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Die Existenz einer solchen Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen basiert im Wesentlichen auf der folgenden Dualitätsaussage, die hier ohne Beweis angegeben wird (siehe [Mál96]). Für diese benötigen wir zunächst den Begriff der schwach$*$-Messbarkeit.

Definition. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Die Abbildung $\nu : \Omega \to M(\mathbb{R}^p)$ heißt schwach$*$-messbar, wenn für alle $F \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^p))$ die Funktion*

$$x \mapsto \langle \nu_x, F(x, \cdot) \rangle = \int_\Omega F(x, \lambda) d\nu_x(\lambda)$$

messbar ist. Im Folgenden bezeichne

$$L^\infty_w(\Omega; M(\mathbb{R}^p)) = \{\nu : \Omega \to M(\mathbb{R}^p) \mid \nu \text{ schwach}*\text{-messbar}, \|\nu\|_{L^\infty_w(\Omega; M(\mathbb{R}^p))} < \infty\}$$

den Raum der schwach$*$-messbaren Funktionen versehen mit der Norm

$$\|\nu\|_{L^\infty_w(\Omega; M(\mathbb{R}^p))} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^p)}.$$

Satz 2. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen. Sei* $\phi \in (L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^p)))^*$ *ein lineares beschränktes Funktional. Dann existiert genau ein* $\nu \in L^\infty_w(\Omega; M(\mathbb{R}^p))$, *sodass*

$$\phi(F) = \int_\Omega \langle \nu_x, F(x) \rangle dx$$

für alle $F \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^p))$ *und*

$$\|\phi\|_{L^1(\Omega;C_0(\mathbb{R}^p)))^*} = \|\nu\|_{L^\infty_w(\Omega;M(\mathbb{R}^p))}.$$

Beweis von Satz 1. Der Beweis lässt sich grob in zwei Schritte unterteilen. So wird als Erstes mit Hilfe von Satz 2 gezeigt, dass der schwache Grenzwert von $\{F(u^n)\}$ mittels einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen dargestellt werden kann. Anschließend wird überprüft, ob diese die geforderten Eigenschaften erfüllen.

Nach Voraussetzung ist $u^n(x) \in K$ für fast alle $x \in \Omega$, wobei $K \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt. $\{u^n\}$ ist also gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(\Omega)$ und damit auch jede Folge $\{F(u^n)\}$ mit $F \in C(\mathbb{R}^p)$. Das heißt es existiert eine schwach∗-konvergente Teilfolge, sodass

$$F(u^{n_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{F} \text{ in } L^\infty(\Omega).$$

Zudem ist es aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit von $\{u^n\}$ in $L^\infty(\Omega)$ ausreichend, die Aussage für $F \in C_0(\mathbb{R}^p)$ zu zeigen.

Sei $\{\nu^n_x\}$ als Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch

$$\nu^n_x \equiv \delta_{u^n(x)} \text{ für alle } x \in \Omega,$$

definiert, wobei $\delta_{u^n(x)}$ das Dirac-Maß an der Stelle $u^n(x) \in \mathbb{R}^p$ bezeichnet.
Für $g \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^p))$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \nu^n_x, g(x) \rangle &= \int_\Omega g(x,\lambda)\; d\nu^n_x(\lambda) \\ &= \int_\Omega g(x,\lambda)\; d\delta_{u^n(x)}(\lambda) \\ &= g(x, u^n(x)),\end{aligned}$$

insbesondere ist damit die Funktion $x \mapsto \langle \nu^n_x, g(x) \rangle$ messbar. Die Folge $\{\nu^n\}$, definiert durch

$$\nu^n : x \mapsto \nu^n_x,$$

ist gleichmäßig beschränkt in $L^\infty_w(\Omega; M(\mathbb{R}^p))$, denn

$$\|\nu^n\|_{L^\infty_w(\Omega;M(\mathbb{R}^p))} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|\delta_{u^n(x)}\|_{M(\mathbb{R}^p)} = 1.$$

Demnach existiert eine schwach$*$-konvergente Teilfolge $\{\nu^{n_k}\}$ mit $\nu^{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ in $L^\infty_w(\Omega; M(\mathbb{R}^p))$, sodass für alle $g \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^p))$ und $n \to \infty$ gilt

$$\int_\Omega \langle \nu_x^n, g(x) \rangle \, dx \longrightarrow \int_\Omega \langle \nu_x, g(x) \rangle \, dx.$$

Definiere nun eine Funktion g als $g(x) = \phi(x)F$, wobei $\phi \in L^1(\Omega)$ und $F \in C_0(\mathbb{R}^p)$. Dann ist $g \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^p))$ und unter Verwendung der obigen Beobachtungen gilt

$$\int_\Omega \phi(x) F(u^n(x)) \, dx = \int_\Omega \phi(x) \langle \nu_x^n, F \rangle \, dx \longrightarrow \int_\Omega \phi(x) \langle \nu_x, F \rangle \, dx.$$

Da die Funktion $x \mapsto \langle \nu_x, F \rangle = \int_\Omega F(\lambda) \, d\nu_x(\lambda)$ für alle $F \in C_0(\mathbb{R}^p)$ als Element von $L^\infty(\Omega)$ aufgefasst werden kann, ist damit gezeigt, dass

$$F(u^n) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_{(\cdot)}, F \rangle \text{ in } L^\infty(\Omega).$$

Satz 2 liefert, da $x \mapsto \langle \nu_x, g(x) \rangle$ messbar und

$$\int_\Omega \phi(x) \langle \nu_x, F \rangle \, dx = \int_\Omega \langle \nu_x, g(x) \rangle \, dx,$$

die Existenz und Eindeutigkeit von $\{\nu_x\}$.

Bleibt noch zu zeigen, dass $\{\nu_x\}$ die gewünschten Eigenschaften erfüllt.
Betrachte $F \in C_0(\mathbb{R}^p)$ und $\phi \in L^1(\Omega)$ mit $F, \phi \geq 0$. Dann gilt

$$0 \leq \int_\Omega \phi(x) F(u^n(x)) dx \longrightarrow \int_\Omega \phi(x) \langle \nu_x, F \rangle dx,$$

und damit

$$\nu_x \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Sei nun $c \geq 0$ derart, dass $\overline{B_{c+1}(0)} \equiv \overline{K}$. Betrachte $F \in C_0(\mathbb{R}^p)$ mit $\operatorname{supp}(F) \cap \overline{B_{c+1}(0)} = \emptyset$. Da $u^n(x) \in K$ für fast alle $x \in \Omega$, folgt $F(u^n(x)) = 0$. Somit ist $\langle \nu_x, F \rangle = 0$, denn

$$0 = \int_\Omega \phi(x) F(u^n(x)) dx \longrightarrow \int_\Omega \phi(x) \langle \nu_x, F \rangle dx,$$

und daraus folgt

$$\operatorname{supp}(\nu_x) \subseteq \overline{B_{c+1}(0)} \equiv \overline{K} \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Wählt man nun $F_0 \in C_0(\mathbb{R}^p)$ als $F_0 \equiv 1$ auf $\overline{B_{c+2}(0)}$ und $|F_0| \leq 1$, so folgt

$$\langle \nu_x, F_0 \rangle = \int_\Omega F_0(\lambda) d\nu_x(\lambda) = 1 = \bar{F}_0.$$

Dann gilt einerseits $\|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^p)} \geq 1$ und andererseits aufgrund der schwach$*$-Unterhalbstetigkeit der Norm $\|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^p)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nu_x^n\|_{M(\mathbb{R}^p)} = 1$, sodass insgesamt für alle $x \in \Omega$

$$\|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^p)} = 1.$$

$\square$

Bemerkung. Wie in [KU79] gezeigt wird, gilt auch eine Umkehrung von Satz 1, die bei gegebener Familie von Wahrscheinlkichkeitsmaßen $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ die Existenz einer beschränkten Funktionenfolge $u^n : \Omega \to \mathbb{R}^p$ liefert und den schwachen Grenzwert mittels

$$\bar{F}(x) = \langle \nu_x, F\rangle = \int_\Omega F(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)$$

für alle $F \in C(\mathbb{R}^p)$ charakterisiert.

3.2 Folgerungen

Aufgrund der Darstellung schwacher Grenzwerte über Young-Maße wie in Satz 1, lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen sogar auf starke Konvergenz schließen. Ist der kompakte Träger der Young-Maße auf einen Punkt beschränkt, so entspricht $\{\nu_x\}$ einem Dirac-Maß und die Konvergenz gilt im starken Sinne.

Satz 3. *Seien $u^n : \Omega \to \mathbb{R}^p$ eine Funktionenfolge mit $\|u^n\|_{L^\infty(\Omega)}$ und $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$ und $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ die zugehörige Familie von Young-Maßen. Dann konvergiert u^n stark gegen u in $L^2(\Omega)$ genau dann, wenn*

$$\nu_x = \delta_{u(x)} \textit{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Beweis. Zunächst gelte die starke Konvergenz von u^n gegen u in $L^2(\Omega)$. Dann folgt für alle stetigen Funktionen F auf $\mathbb{R}^p$, dass

$$\lim_{n\to\infty} F(u^n(x)) = F(u(x)).$$

Nach Satz 1 muss ν_x dem Dirac-Maß $\delta_{u(x)}$ entsprechen, denn

$$\begin{aligned}
\langle \delta_{u(x)}, F\rangle &= \int_\Omega F(\lambda)\, d\delta_{u(x)}(\lambda)\\
&= F(u(x))\\
&= \bar{F}(x)\\
&= \langle \nu_x, F\rangle.
\end{aligned}$$

Sei nun $\nu_x = \delta_{u(x)}$ für fast alle $x \in \Omega$. Da nach Voraussetzung $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$ folgt mit Satz... für alle $F \in C(\mathbb{R}^p)$, dass $F(u^n) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{F}$ in $L^\infty(\Omega)$, wobei

$$\bar{F}(x) = \langle \nu_x, F(\lambda)\rangle = \langle \delta_{u(x)}, F(\lambda)\rangle = F(u(x)).$$

Wählt man also $F_i(u) = (u_i)^2$ für $i = 1, \dots, p$, so gilt insbesondere $(u_i^n)^2 \overset{*}{\rightharpoonup} (u_i)^2$ in $L^\infty(\Omega)$ für alle $i = 1, \dots, p$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|u^n - u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |u^n(x) - u(x)|^2 \, dx \\
&= \sum_{i=1}^p \int_\Omega (u_i^n(x) - u_i(x))^2 \, dx \\
&= \sum_{i=1}^p \int_\Omega (u_i^n(x))^2 - 2u_i^n(x)u_i(x) + (u_i(x))^2 + (u_i(x))^2 - (u_i(2))^2 \, dx \\
&= \sum_{i=1}^p \left[\int_\Omega (u_i^n(x))^2 - (u_i(x))^2 \, dx - 2 \int_\Omega u_i(x)(u_i^n(x) - u_i(x)) \, dx \right].
\end{aligned}$$

Da $(u_i^n)^2 \overset{*}{\rightharpoonup} (u_i)^2$ in $L^\infty(\Omega)$ konvergiert das erste Integral in der Summe gegen Null. Betrachtet man nun $u_i \in L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ als Testfunktion, dann folgt mit der Voraussetzung $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$, dass auch das zweite Integral gegen Null konvergiert, sodass insgesamt gilt

$$\|u^n - u\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

□

Des Weiteren ist es nun möglich, für bestimmte Funktionen $F \in C(\mathbb{R}^p)$ eine Aussage bezüglich der schwachen Unterhalbstetigkeit zu treffen. Dafür verwenden wir die nachfolgende verallgemeinerte Jensen'sche Ungleichung:

Lemma 2. *Sei $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^p$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\langle \nu_x, F \rangle \geq F(\langle \mu, \mathrm{Id} \rangle),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn μ einem Dirac-Maß entspricht.

Beweis. Gleichheit für den Fall, dass μ einem Dirac-Maß entspricht, wurde bereits für Satz 3 gezeigt. Da F strikt konvex ist, existiert ein $\beta \in \mathbb{R}^p$, sodass für alle $\lambda \neq x$ und $i = 1, \ldots, p$ gilt

$$F(\lambda) > F(x) + \beta_i(\lambda - x)_i.$$

Für $x \equiv \langle \mu, \mathrm{Id} \rangle = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda \, d\mu$ $(\in \mathbb{R}^p)$ ergibt sich unter Verwendung der Eigenschaften von μ als Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\begin{aligned}
\langle \mu, F \rangle &= \int_{\mathbb{R}^p} F(\lambda) \, d\mu(\lambda) \\
&> \int_{\mathbb{R}^p} \left(F(x) + \beta_i (\lambda - x)_i \right) \, d\mu(\lambda) \\
&= F(x) + \beta_i \int_{\mathbb{R}^p} (\lambda_i - x_i) \, d\mu(\lambda) \\
&= F(x) \\
&= F(\langle \mu, \mathrm{Id} \rangle).
\end{aligned}$$

□

Demzufolge gilt unter den Voraussetzungen von Satz 1 für strikt konvexe Funktionen F, dass

$$\bar{F} = \langle \nu_x, F \rangle \geq F(\langle \nu_x, \mathrm{Id} \rangle) = F(\int_\Omega \lambda \, d\nu_x(\lambda)) = F(u(x)),$$

also

$$\text{weak-}\lim_{n \to \infty} F(u^n(x)) \geq F(\text{weak-}\lim_{n \to \infty} u^n(x)).$$

4 Ausblick

Wie das vorherige Kapitel gezeigt hat, erweisen sich die Young-Maße als nützliches Werkzeug beim Darstellen schwacher Grenzwerte. So konnte mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeitsmaße ein Zusammenhang hergestellt werden für die Grenzwerte von Kompositionen stetiger Funktionen und schwach konvergenter Folgen. Insbesondere ermöglicht die Existenz von Young-Maßen Aussagen darüber zu treffen, für welche stetigen Funktionen F bei schwacher Konvergenz von u^n gegen u

$$\text{weak-}\lim_{n\to\infty} F(u^n) \geq F(\text{weak-}\lim_{n\to\infty} u^n)$$

erfüllt ist. Eine besondere Rolle spielt der Fall, dass das Young-Maß einem Dirac-Maß entspricht. Dann gilt Gleicheit der obigen Ungleichung und die betrachtete Folge u^n konvergiert sogar im starken Sinne.

Darüber hinaus liefern Young-Maße auch einen Ansatz bei der Suche nach Lösungen im Bereich der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Hierfür wurde ein weiterer Lösungsbegriff entwickelt - die *measure-valued solution*, welche als Tupel aus einer Lösung u und dem zugehörigen Young-Maß definiert ist. Wie etwa in [Mál96] beschrieben, kann man die Existenz einer schwachen Lösung mit Hilfe von *measure-valued solutions* nachweisen, indem man zeigt, dass diese existieren und das entsprechende Maß einem Dirac-Maß entspricht.

Literatur

[DiP85] DiPerna, RonaldJ.: Measure-valued solutions to conservation laws. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 88 (1985), S. 223–270

[KU79] Knops, R.J. ; University, Heriot-Watt: *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt symposium.* Pitman, 1979 (Research notes in mathematics Bd. 4)

[Mál96] Málek, J.: *Weak and Measure-Valued Solutions to Evolution Pdes.* Chapman & Hall, 1996 (Applied Mathematics and Methematical Computation Series)

[Ped87] Pedregal, P.: *Variational Methods in Nonlinear Elasticity.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987 (Miscellaneous Titles in Applied Mathematics Series)