Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

1.Übungsblatt

Schwache Ableitungen und Poincaré-Friedrichsche Ungleichung.

Abgabe in der Übung am 8. Mai.

Hinweis: Da die Übung am 1. Mai nicht stattfindet, ist dieses Übungsblatt umfangreicher als üblich. Manche Aufgaben setzen außerdem Begriffe voraus, die erst in dieser Woche eingeführt werden.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Für $x \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\phi(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & \text{falls } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|\cdot|$ die übliche euklidische Norm im $\mathbb{R}^d$ sei. Zeige, daß $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Zusatzaufgabe 1: **Eine Flasche Sekt**

Finde eine $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$-Funktion, die fundamental von der in der ersten Aufgabe definierten verschieden ist, d.h., die nicht nur Summe oder Produkt mit Polynomen, trigonometrischen Funktionen oder Ableitung etc. von dieser Funktion ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Seien $u, v \in H^1(a, b)$. Beweise die Produktregel $(uv)' = uv' + u'v$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $u \in C(a, b)$ stückweise stetig differenzierbar. Sei ferner $\mathcal{M}$ die Menge der Punkte, in denen u klassisch differenzierbar ist. Zeige, daß dann

$$v(x) := \begin{cases} u'(x) & \text{für } x \in \mathcal{M}, \\ 0 & \text{sonst ,} \end{cases}$$

schwache Ableitung von u ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ und gelte für alle $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)dx = 0.$$

Zeige, daß es dann eine reelle Konstante c gibt, so daß $u(x) = c$ für fast alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Sei $u \in H^1(a,b)$. Zeige, daß dann u außerhalb von (a,b) konstant als stetige Funktion fortgesetzt werden kann und deshalb

$$D_h u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

wohldefiniert ist für $h \neq 0$ und $x \in (a,b)$. Zeige, daß $D_h u$ in $L^2(a,b)$ gegen u' konvergiert.

Aufgabe 6: **5 Punkte**

Sei $(u_n) \subset L^1(a,b)$ eine Folge von Funktionen, die bezüglich der $L^1(a,b)$-Norm gegen u konvergiere. Außerdem mögen die schwachen Ableitungen u_n' als Funktionen im $L^1(a,b)$ existieren und in $L^1(a,b)$ gegen v konvergieren. Zeige, daß dann die schwache Ableitung von u existiert und gleich v ist.

Aufgabe 7: **7 Punkte**

(a) Zeige, daß für $v \in L^2(a,b)$

$$\|v\|_{-1,2} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|v\|_{0,2}$$

gilt.

(b) Zeige, daß für $v \in H^1(a,b)$

$$\|v\|_{0,2} \leq \frac{b-a}{2} |v|_{1,2} + \sqrt{b-a}\, |\overline{v}|$$

gilt, wobei $\overline{v} := (b-a)^{-1} \int_a^b v(\xi) d\xi$ ist.

Aufgabe 8: **5 Punkte**

Beweise die Poincaré-Friedrichssche Ungleichung mit der verbesserten Konstanten $(b-a)/\pi$. (Hinweis: Fourierreihen)