TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

10.Übungsblatt[1]

Bochner-Integral / variationelle Formulierung

Abgabe in der Übung am 10. Juli.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Seien X, Y Banach-Räume.

(i) Sei $1 \leq q \leq p \leq \infty$ und $X \hookrightarrow Y$. Zeige

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y).$$

(ii) Ist $1 \leq p \leq \infty$, so ist $\mathcal{C}([0,T];X)$ stetig eingebettet in $L^p(0,T;X)$.

(iii) Zeige $W^{1,1}(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];X)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Wir wissen, daß aus der Stetigkeit einer Funktion $u : [0,T] \to X$ dessen Bochner-Integrierbarkeit folgt[2]. Gilt dies auch, falls lediglich Demistetigkeit vorausgesetzt wird?

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es bezeichne $\tilde{u} = \tilde{u}(t) \in \mathcal{W}(0,T)$[3] die zur Funktion $u = u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ gehörige abstrakte Funktion. Dabei sei $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Gelfand-Dreier und $C_0^\infty(\Omega)$ liege dicht in V. Zeige: Existiert die verallgemeinerte partielle Ableitung $\partial u/\partial t$, so daß für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$

$$\int_0^T \int_\Omega u(x,t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} dx dt = - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \phi(x,t) dx dt$$

gilt, so existiert auch die verallgemeinerte Ableitung $\tilde{u}'$ und umgekehrt. Außerdem ist $\tilde{u}'$ die zur Funktion $\partial u/\partial t$ zugehörige abstrakte Funktion.

---

[1] Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Es wird aber nächste Woche ein 11. Blatt geben, welches als Zusatzblatt zählt.

[2] vgl. VL. Der Beweis ist wie für das eindimensionale Riemann-Integral.

[3] Der Raum $\mathcal{W}(0,T)$ wird eventl. erst am Freitag eingeführt. Ihr koennt deshalb diese Aufgabe auch etwas spaeter abgeben, wenn ihr dafür noch mehr Zeit braucht. Sonst:

$$\mathcal{W}(0,T) := \{u \in L^2(0,T;V) \,:\, \exists u' \in L^2(0,T,V^*).$$

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Sei

$$b(u, v) := \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v dx$$

der die nichtlineare Konvektion beschreibende Term aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Es sei $\mathcal{V} := \{v \in C_0^\infty(\Omega)^d \,|\, \text{div } v = 0\}$ und V der Abschluß von $\mathcal{V}$ bezüglich $|\cdot|_{1,2}$ und H der Abschluß von $\mathcal{V}$ bezüglich $\|\cdot\|_{0,2}$.

(i) Zeige, daß b auf $V \times V$ und der zugehörige Operator B als Abbildung von V in V^* wohldefiniert sind.

(ii) Zeige, daß B auch auf $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ definiert werden kann und dann im zweidimensionalen Fall in $L^2(0, T; V^*)$, im dreidimensionalen aber nur in $L^{4/3}(0, T; V^*)$ abbildet.