Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

11.Übungsblatt

instationäre Probleme

Abgabe in der Übung am 17. Juli.

Die Punkte dieses Übungsblattes zählen als Zusatzpunkte.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $V \subseteq H \subsetneqq V^*$ ein Gelfand-Dreier und $a : [0,T] \times V \times V \to \mathbb{R}$ eine bezüglich t gleichmäßig beschränkte, einer Gårdingschen Ungleichung genügende Bilinearform. Zeige:

(i) Für ein beliebiges $t_0 \in [0,T]$ wird durch

$$((u,v)) := \frac{1}{2}(a(t_0;u,v) + a(t_0;v,u)) + \kappa(u,v)$$

auf V ein Skalarprodukt erklärt und die hierdurch induzierte Norm ist äquivalent zur Norm $\|\cdot\|$ auf V.

(ii) Mit der Transformation

$$\hat{u}(t) := e^{-\kappa t}u(t), \quad \hat{f}(t) := e^{-\kappa t}f(t), \quad \hat{a}(t;v,w) := a(t;v,w) + \kappa(v,w)$$

ist die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(t;u(t),v) = \langle f(t),v\rangle, \quad v \in V,$$

äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(\hat{u}(t),v) + \hat{a}(t;\hat{u}(t),v) = \langle \hat{f}(t),v\rangle, \quad v \in V.$$

Dabei ist $\hat{a}(t;\cdot,\cdot)$ eine gleichmäßig beschränkte, stark positive Bilinearform.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Beweise vermittels einer Galerkin-Approximation den Satz von Lions:

> Sei $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Gelfand-Dreier. Die Bilinearform $a : [0,T] \times V \times V \to \mathbb{R}$ sei bezüglich t Lebesgue-meßbar, genüge gleichmäßig einer Gårdingschen Ungleichung und sei gleichmäßig beschränkt. Dann besitzt das Problem
>
> > *Zu $u_0 \in H$ und $f \in L^2(0,T;V^*)$ finde $u \in \mathcal{W}(0,T)$ mit $u(0) = u_0$, so daß für alle $v \in V$*
> >
> > $$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(t;u(t),v) = \langle f(t), v\rangle$$
> >
> > *im verallgemeinerten Sinne auf $(0,T)$ gilt.*
>
> genau eine Lösung.