Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

2.Übungsblatt

Sobolew-Räume und variationelle Formulierung

Abgabe in der Übung am 15. Mai.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Wir wissen, daß es für jedes $f \in H^{-1}(a,b)$ eine Funktion $u_f \in L^2(a,b)$ gibt, so daß

$$\langle f, v \rangle = -\int_a^b u_f(x) v'(x) dx, \quad v \in H_0^1(a,b),$$

gilt. Führe die Berechnung von $\|f\|_{-1,2}$ auf die von $\|u_f\|_{0,2}$ zurück.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein geeignetes, beschränktes Gebiet und

$$L_0^2 := \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega v(x) dx = 0\}.$$

Wir versehen $L_0^2(\Omega)$ mit der üblichen L^2-Norm. (Dieser Raum ist in der Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen von Bedeutung, bei der der Druck eines Fluids nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.) Es sei weiterhin $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ der übliche Quotientenraum, versehen mit der Quotientennorm:

$$\|[u]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{v \in [u]} \|u\|_{0,2}.$$

Zeige, daß $L_0^2(\Omega)$ und $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ isometrisch isomorph sind,

$$L_0^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Zeige weiterhin, daß $L_0^2(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)$ ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Zeige, daß $C_0^\infty(a,b)$ nicht dicht ist in $H^1(a,b)$.

Bitte wenden

Aufgabe 4: **7 Punkte**

(a) Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' &= 0, \quad x \in (-1,1), \\ u(-1) &= 3, \\ u(1) &= 0, \end{cases}$$

wobei

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in (-1,0), \\ 1/2, & \text{falls } x \in (0,1). \end{cases}$$

Stelle die schwache Formulierung auf, untersuche das Problem auf Lösbarkeit und bestimme eine Lösung[1].

(b) Stelle die schwache Formulierung des Problems

$$\begin{cases} -u'' + cu' + du &= f \quad \text{in } (a,b), \\ u'(a) + c_a u(a) &= \alpha, \\ u'(b) + c_b u(b) &= \beta \end{cases}$$

auf, wobei $c, d \in L^\infty(a,b)$ seien, $f \in L^2(a,b)$ und $c_a, c_b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kann man die Voraussetzung an f abschwächen?

[1] Hierzu ist es günstig, einmal mit Funktionen zu testen, die in $(-1,0)$ verschwinden, und ein anderes Mal mit Funktionen, die in $(0,1)$ verschwinden.