Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

3.Übungsblatt

Lemma von Lax-Milgram / Satz von Zarantonello

Abgabe in der Übung am 22. Mai.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Zeige, daß für $V = H_0^1(a,b)$, $f \in V^*$, $a \in L^\infty(a,b)$ mit $a(x) \geq \mu > 0$ f.ü. in (a,b), das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + d(x,u(x)) = f(x), \quad x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung besitzt, wenn $d : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und im zweiten Argument gleichmäßig Lipschitz-stetig und monoton wachsend ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Wir betrachten das Sturm-Liouville-Problem mit Neumann-Randdaten

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = f(x), \quad x \in (a,b), \\ p(a)u'(a) = p(b)u'(b) = 0 \end{cases}$$

mit $0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta$, $x \in (a,b)$. Unter welchen Voraussetzungen hat das Problem genau eine Lösung? Wie ist es, wenn zusätzlich $f \in L^2(a,b)$ gefordert wird?

Hinweis: Betrachte den Raum $V := \{v \in H^1(a,b) \,|\, \overline{v} := (b-a)^{-1} \int_a^b v(\xi) d\xi = 0\}$ und benutze die Abschätzung aus der siebten Aufgabe des ersten Blattes.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -u''(x) + ku'(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases}$$

Bestimme einen Wert für $k \in \mathbb{R}$, so daß die zugehörige Bilinearform a in (a,b) nicht positiv ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $V = H_0^1(a,b)$, $f \in V^*$, $c, c', d \in L^\infty(a,b)$ und gelte für ein $\delta \in \mathbb{R}$

$$d(x) - \frac{1}{2}c'(x) \geq \delta > -\frac{\pi^2}{(b-a)^2} \quad \text{f.ü. in } (a,b).$$

Zeige, daß das Problem

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in V$ besitzt.