Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

4.Übungsblatt

schwache Konvergenz

Abgabe in der Übung am 29. Mai.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $V = L^2(0,1)$ und $g \in V$ fest. Dann ist

$$A : V \to V, \quad v \mapsto Av := g\,\|v\|^2,$$

zwar kompakt, aber nicht verstärkt stetig.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zeige, daß lineare, beschränkte Operatoren sowie Lipschitz-stetige Operatoren hemistetig sind.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

(a) Sei X ein reflexiver Banachraum und $(x_n) \subset X$ eine beschränkte Folge. Nimm weiterhin an, daß alle schwach konvergenten Teilfolgen von (x_n) gegen dasselbe $x \in X$ konvergieren. Zeige, daß dann auch (x_n) schwach gegen x konvergiert, $x_n \rightharpoonup x$.

(b) Sei X ein separabler, normierter Raum und $(f_n) \subset X^*$ eine beschränkte Folge. Nimm weiterhin an, daß alle schwach* konvergenten Teilfolgen von (f_n) gegen dasselbe $f \in X^*$ konvergieren. Zeige, daß dann auch (f_n) schwach* gegen f konvergiert.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum und (x_n) eine Folge in X, (f_n) eine Folge im Dualraum X^*. Zeige:

(a) Ist $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \to f$ in X^* , so folgt $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

(b) Ist $x_n \to x$ in X und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X^* , so folgt $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

(c) Die Behauptung $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ gilt nicht, falls nur $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X^* erfüllt ist.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Sei V ein Hilbertraum und (x_n) eine Folge in V. Zeige, daß aus $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ auch $x_n \to x$ in V folgt. Angenommen, V ist lediglich ein Banach- und kein Hilbertraum. Unter welcher Voraussetzung kann dann die Aussage aufrecht erhalten werden?