Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

5.Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 5. Juni.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Ein Banachraum heißt *strikt konvex*, falls aus $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$ und $x \neq y$ folgt: $\|x+y\| < 2$. Ist nun X ein reflexiver Banachraum, dessen Dualraum strikt konvex ist, so gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein Element $Jx \in X^*$, so daß

$$\langle Jx, x \rangle = \|x\|^2 = \|Jx\|_*^2.$$

Die Abbildung $J : X \to X^*$ heißt *Dualitätsabbildung*.
Zeige, daß die Dualitätsabbildung $J : X \to X^*$ demistetig, strikt monoton und koerzitiv ist. Ist X ein Hilbertraum, so folgt sogar starke Monotonie.

Der Beweis der Existenz der Dualitätsabbildung gibt 5 Extrapunkte.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei V ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum. Der Operator $A : V \to V^*$ erfülle die Voraussetzungen des Hauptsatzes über monotone Operatoren von Browder und Minty. Zeige:

(i) Ist A strikt monoton, so ist A^{-1} ist demistetig.

(ii) Ist A sogar stark monoton, so ist A^{-1} Lipschitz-stetig.

(iii) Ist A sogar stark monoton und Lipschitz-stetig, so ist A^{-1} stark monoton.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ periodisch mit Periode 1. Zeige, daß dann die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n(x) := f(n\,x)$$

schwach* in $L^\infty(\mathbb{R})$ gegen die konstante Funktion

$$\overline{f} \equiv \int_0^1 f(x)dx$$

konvergiert.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei V ein Banachraum. Zeige:

(i) Ist $1 < p < 2$ und $\mu > 0$, so gibt es keinen Operator $A : V \to V^*$ mit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \;\geq\; \mu \|u - v\|^p, \quad u, v \in V.$$

(ii) Ist $p > 2$, $\beta > 0$ und $A : V \to V^*$ ein Operator mit

$$\|Au - Av\|_* \;\leq\; \beta \|u - v\|^{p-1},$$

so ist A konstant.