Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

6.Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 12. Juni.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Untersuche für $\alpha \in \mathbb{R}$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + \alpha(\sin u(x))u'(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{aligned}$$

auf schwache Lösbarkeit.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei V ein reeller, reflexiver Banachraum und $A : V \to V^*$. Wir nennen hier A Gâteaux-differenzierbar[1], falls es einen Operator $A' : V \to L(V, V^*)$ gibt, so daß für beliebige $u, v, w \in V$ gilt

$$\langle A'(u)v, w\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\langle A(u+tv) - A(u), w\rangle}{t}.$$

Zeige:

(i) Ist A linear, so ist A Gâteaux-differenzierbar und A' ist konstant.

(ii) Sei A Gâteaux-differenzierbar und für alle $u, v \in V$ sei die Funktion

$$t \mapsto \langle A'(u+tv)v, v\rangle$$

stetig auf $[0,1]$. Dann ist A genau dann monoton, falls für beliebige $u, v \in V$

$$\langle A'(u)v, v\rangle \geq 0$$

gilt.

[1]Dies ist die Gâteaux-Ableitung bezüglich der schwach*-Topologie in V^*.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $B : V \to V^*$ beschränkt Lipschitz-stetig, d.h. es gebe eine beschränkte Abbildung $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\|Bu - Bv\|_* \leq \beta(\max\{\|u\|, \|v\|\})\, \|u - v\|.$$

Sei $R > 0$. Wir definieren

$$\tilde{B} : V \to V^*, \quad \tilde{B}v := \begin{cases} Bv, & \text{falls } \|v\| \leq R \\ B\big(\frac{v}{\|v\|}R\big), & \text{falls } \|v\| > R. \end{cases}$$

Zeige, daß dann $\tilde{B}$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

(i) Seien $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in (0, 1) \text{ und } |y| \leq x^\alpha\}$ und sei $u(x, y) := x^\beta$ Für welche β gilt $u \in L^p(\Omega)$?

(ii) Drücke den Laplace-Operator $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in Zylinderkoordinaten aus.

(iii) Sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ glatt und radialsymmetrisch, d.h. $u = u(|x|)$. Berechne Δu.

(iv) Wir betrachten die Einheitskugel $B_d := \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\| < 1\}$ im $\mathbb{R}^d$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne. Für welche Parameter $\alpha > 0$, $p \geq 1$ gilt für die Funktion

$$u : B_d \to \mathbb{R}, \quad u(x) := \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & \text{falls} \quad |x| \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Aussage $u \in L^p(B_d)$?

(v) Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Eckpunkte $(1, 2), (4, 3)$ und $(2, 4)$ gegebene Dreieck. Führe die Integration einer Funktion $u : \Delta \to \mathbb{R}$ auf jene über dem Einheitsdreieck $\hat{\Delta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 1], 0 < y < 1 - x\}$ zurück. (Hinweis: Benutze eine affin-lineare Transformation.)
Integriere sodann die Funktion $u : \Delta \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = x^2 + 2xy$ über Δ.