Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

7.Übungsblatt

Galerkin-Verfahren / Finite-Elemente

Abgabe in der Übung am 19. Juni.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei

$$a(u,v) := \int_0^1 x^2 u'(x)v'(x)dx, \quad u,v \in V := H_0^1(0,1).$$

(a) Ist das Lemma von Lax-Milgram anwendbar? (Hinweis: Betrachte z.B. lineare Hutfunktionen).

(b) Betrachte die äquidistante Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ mit der Schrittweite h und die zugehörigen linearen Hutfunktionen, die den Raum $V_h \subset V$ aufspannen mögen. Ist das zugehörige diskrete Ersatzproblem eindeutig lösbar?

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(a) Untersuche das Problem

$$a(u,v) := \int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))dx = \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V := H_0^1(0,1),$$

auf Lösbarkeit.
Zeige, daß

$$u(x) := \frac{1}{e+1}(1 - e^x + e(1 - e^{-x}))$$

die einzige Lösung ist.

(b) Stelle das Galerkin-Verfahren auf und bestimme Näherungslösungen unter der Verwendung linearer Hutfunktionen, wobei das Intervall $(0,1)$ in zwei bzw. drei Teilintervalle äquidistant zerlegt werde.

(c) Gib eine Fehlerabschätzung an und vergleiche die Näherungslösungen aus (b) mit der exakten Lösung in den Punkten $x_n = n/10$, $n = 1, \ldots, 5$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Beweise für einen reellen, separablen Hilbertraum den Satz von Lax-Milgram mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$-u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$
$$u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta.$$

Seien $c, d \in L^\infty(a, b)$ und $f \in L^2(a, b)$. Stelle unter Verwendung linearer Hutfunktionen bei äquidistanter Zerlegung und unter Verwendung der Trapez-Regel die Gleichungen für die näherungsweise Berechnung der schwachen Lösung auf. Schreibe und teste (mit selbst gewählten (nichttrivialen!) Problemdaten[1]) ein Computerprogramm (z.B. in Matlab) zur numerischen Lösung, welches neben der Trapez- auch die Simpson-Regel zuläßt.

Zur Erinnerung: Unter den linearen Hutfunktionen zu einer (äquidistanten) Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit Knoten $x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n+1,\ h = (b - a)/(n + 1)$, versteht man die Funktionen

$$\phi_j(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{für } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & \text{für } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei j von 1 bis n läuft.

[1] Diese sollten so gewählt sein, daß das Problem eine eindeutige Lösung besitzt.