Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

8.Übungsblatt

Mehrdimensionale Probleme

Abgabe in der Übung am 26. Juni.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Beweise die Poincaré-Friedrichssche Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das in einer Richtung beschränkt sei (Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß es ein $M > 0$ gibt mit $|x_1| \leq M$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$.). Dann gilt für alle $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\|D^\beta u\|_{0,p} \leq c|u|_{k,p}, \quad u \in W_0^{k,p}(\Omega),\ |\beta| \leq k,$$

wobei die Konstante c nur von M, β, k und p abhängt.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(i) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, daß

$$\|u\|_{0,4} \leq 2^{1/4} \|u\|_{0,2}^{1/2}\, |u|_{1,2}^{1/2}.$$

(ii) Sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, daß

$$\|u\|_{0,4} \leq \sqrt{2} \|u\|_{0,2}^{1/4}\, |u|_{1/2}^{3/4}.$$

(iii) Zeige, daß $H^1(\mathbb{R}^d)$ stetig eingebettet ist in $L^4(\mathbb{R}^d)$ für $d = 2, 3$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet. Zeige, daß für $2 \leq p < \infty$ der p-Laplace-Operator A, der durch

$$\langle Au, v \rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ gegeben ist, wohldefiniert ist, in $(W_0^{1,p}(\Omega))^* = W^{-1,q}(\Omega)$ $(1/p+1/q = 1)$, abbildet sowie strikt monoton, koerzitiv, beschränkt und radialstetig ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Genüge $f = f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(i) einer Carathéodory-Bedingung:

$$x \mapsto f(x, u_1, \ldots, u_n)$$

ist auf Ω Lebesgue-meßbar für alle $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ und

$$u_i \mapsto f(x, u_1, \ldots, u_n)$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig für fast alle $x \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$.

(ii) einer Wachstumsbedingung: Es gibt p_i, $q \in [1, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $b > 0$ und nichtnegatives $a \in L^q(\Omega)$, so daß

$$|f(x, u_1, \ldots, u_n)| \leq a(x) + b \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{p_i/q}.$$

Zeige, daß dann der Nemyzki-Operator F mit $(Fu)(x) := f(x, u_1(x), \ldots, u_n(x))$, wobei $u = (u_1, \ldots, u_n)$ bezeichne, eine Abbildung von $\prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ ist und als solche F stetig und beschränkt ist mit

$$\|Fu\|_{0,q} \leq const \left(\|a\|_{0,q} + \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{0,p_i}^{p_i/q} \right).$$