Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Sommersemester 2007

Differentialgleichungen II

9.Übungsblatt

abstrakte Funktionen / Bochner-Integral

Abgabe in der Übung am 3. Juli.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Zeige

$$C([0,T];C[a,b]) = C([a,b]\times[0,T]).$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei

$$u(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le t, \\ 0 & \text{für } t < x \le 1. \end{cases}$$

Wir betrachten u als abstrakte Funktion mit Werten in $L^2(0,1)$. Untersuche auf Bochner-Meßbarkeit, (absolute) Stetigkeit und (klassische) Differenzierbarkeit.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

(i) Sei H ein Hilbertraum. Zeige, daß die Regel der partiellen Integration

$$\int_s^t \big((u'(\tau),v(\tau)) + (u(\tau),v'(\tau))\big)\,d\tau = (u(t),v(t)) - (u(s),v(s)), \quad 0 \le s \le t \le T$$

für Funktionen $u,v \in \mathcal{C}^1([0,T];H)$ gilt.

(ii) Zeige, daß für $u \in \mathcal{C}^1([0,T];H)$ im klassischen Sinne gilt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = (u'(t),u(t)).$$

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \mu u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Die exakte Lösung lautet dann (vergleiche DGL I)

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(0) e^{-\mu j^2 t} \sin jx.$$

Es sei nun $V_0 := L^2(0,\pi)$ und für $r \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sei

$$V_r := \Big\{ v \in H_0^1(0,\pi) \ : \ \exists \frac{d^j v}{dx^j} \in L^2(0,\pi), j = 0,1,\ldots,r; \ \ \frac{d^{2l} v}{dx^{2l}}(0) = \frac{d^{2l} v}{dx^{2l}}(\pi) = 0, \\ l = 0,1,\ldots,\left[\frac{r-1}{2}\right] \Big\},$$

und $|v|_r := \left\| \frac{d^r v}{dx^r} \right\|_{0,2}$.

(i) Man überlege sich, daß $(V_r, |\cdot|_r)$ ein Banach-Raum ist und $V_{r+1} \hookrightarrow V_r$ für $r \in \mathbb{N}$ gilt, sowie daß

$$|v|_r^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} v_j^2, \quad v_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(x) \sin jx \, dx.$$

(ii) Man beweise die parabolische Glättungseigenschaft: Ist $u_0 \in V_r$ und $r \leq 2n + s$ für $r, n, s \in \mathbb{N}$, so folgt $u^{(n)} \in \mathcal{C}([0,T]; V_s)$ und[1]

$$\int_0^T |u^{(n)}(t)|_{s+1}^2 dt < \infty.$$

Es gilt insbesondere für alle $t > 0$

$$|u^{(n)}(t)|_s \leq const \ t^{-n-\frac{s-r}{2}} |u_0|_r.$$

[1] also $u^{(n)} \in L^2(0,T;V_{s+1})$.