

Differentialgleichungen I

1. Übungsblatt

Wiederholung¹

NEU: Die Punkte zählen als Zusatzpunkte (für die erste Hälfte)!

Aufgabe 1:

2 Punkte

Beweise den BANACHSchen Fixpunktsatz in der folgenden Form:

Es sei T eine Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes in sich und es sei T^N kontrahierend für eine natürliche Zahl N . Dann besitzt T genau einen Fixpunkt.

Dabei bezeichnet T^N die N -fache Nacheinanderausführung von T .

Aufgabe 2:

1 Punkt

Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y' = xy^{-1}(1 + y^2), \quad y(0) = 1;$

(ii) $y' + 2y = \sin x, \quad y(0) = 0.$

Aufgabe 3:

2 Punkte

Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

(i) $y'' = 2ay' - a^2y$ mit $a > 0;$

(ii) $y'' - 2y' + 5y = \exp(x);$

(iii) $y^{(4)} - 4y^{(2)} + 1 = 0.$

Aufgabe 4:

1 Punkt

Bestimme ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & 8 & -1 \end{pmatrix} y.$$

¹Wie einige von Euch uns gerade berichtet haben, ist der Stoff für viele von Euch keine Wiederholung. Man findet ihn aber trotzdem im Skript von Herrn Ferus (Ana II) oder im Forster (auch Ana II).

Aufgabe 5:**1 Punkt**

Wir betrachten die Differentialgleichung $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$. Durch $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x$, und $f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$, sind zwei Lösungen dieser Differentialgleichung gegeben. Welche der folgenden Paare bilden ein Lösungsfundamentalsystem?

- (a) $\{f_1, f_2\}$ (b) $\{f_1 - 2f_2, -2f_1 + 4f_2\}$ (c) $\{f_1 - f_2, 2f_1\}$

Aufgabe 6: Medikation**3 Punkte**

Ein Mensch besteht bekanntlich aus zwei Teilen: dem Verdauungsapparat und dem Blutkreislauf. Dieser Mensch, unser Patient, nimmt nun ein Medikament ein, z.B. den Blutdrucksenker Felodipin (einen Kalziumantagonisten), das zuerst in den Verdauungsapparat gelangt und von dort an den Blutkreislauf abgegeben wird. Für die Wirkung eines solchen Medikaments ist die Menge im Blut entscheidend; durch die orale Einnahme kann aber nur die Menge im Verdauungstrakt direkt beeinflußt werden.

Der Wirkstoff wird im Blut abgebaut. Die relative Änderung der Wirkstoffmenge im Blut durch diesen Abbau in einer gewissen Zeitspanne kann dabei als proportional zu dieser Zeitspanne angesehen werden, sofern diese kurz genug ist. Gleiches gilt für den Transport des Medikaments vom Verdauungsapparat in den Blutkreislauf.

- (i) Wir nehmen zuerst an, der Patient bekomme nur einmal eine Dosis Felodipin verabreicht. Wie sieht das Differentialgleichungssystem aus, das die Stoffmengen im Blut und in der Verdauung beschreibt? Löse das System und skizziere den Verlauf der Wirkstoffmenge im Blut.
- (ii) Ein Blutdrucksenker wird normalerweise nicht nur einmal, sondern in regelmäßigen Abständen in gleichen Dosen eingenommen. Was passiert mit dem Wirkstoffpegel im Blut auf lange Sicht?
- (iii) Nach Injektion direkt in die Blutbahn ist bei Felodipin nach 10 Stunden noch die Hälfte der injizierten Dosis im Blut nachweisbar. Bei einmaliger oraler Verabreichung ist nach 2 Stunden die Hälfte der Wirkstoffmenge ins Blut übergegangen².
Ein solches Medikament wird der Bequemlichkeit zuliebe häufig nur einmal täglich eingenommen. Unser Patient soll auf einen Wirkstoffspiegel von 100 mg „eingestellt“ werden. Wie hoch muß die tägliche Dosis sein?
Was passiert, wenn der Patient die Tablette teilt und die eine Hälfte morgens, die andere Hälfte zwölf Stunden später am Abend einnimmt?

²Diese Geschwindigkeit kann sich allerdings, z.B. bei der gleichzeitigen Einnahme von Grapefruit-saft, deutlich erhöhen!

Einige Informationen

- Die Daten der Vorlesung:

Mittwoch	10-12 Uhr	MA 041
Freitag	12-14 Uhr	MA 005

und die der Übung:

Montag	14-16 Uhr	MA 004
--------	-----------	--------

- Die Sprechzeiten:

Dr. Etienne Emmrich	Mittwoch	13 - 14.30 Uhr	MA 367
Hans-Christian Kreuzler	Montag	16 - 17.30 Uhr	MA 363
Dr. Jerry Gagelman	Dienstag	9 - 10.30 Uhr	MA 365

oder per email: *nachname*@math.tu-berlin.de.

- Diese Informationen (und noch viel mehr) findet Ihr auch auf der Internetseite zur Veranstaltung:

www.math.tu-berlin.de/~emmrich/DGL-I.htm

- **Die Tutorien und die Übung beginnen in der zweiten Woche.**
Die Termine der Tutorien werden in der ersten Vorlesung festgelegt. Dort findet auch die Einteilung in die Tutorien statt.
- Es wird 14 Übungsblätter geben, die Ihr jeweils ab Mittwoch von der DGL-Website herunterladen könnt. Die Abgabe erfolgt dann in der Folgewoche in den Tutorien (und nicht später!).
Die Abgabe erfolgt in festen Zweiergruppen, die Ihr bitte bis spätestens zur Abgabe des zweiten Übungsblattes bildet.
- Kriterien für einen unbenoteten Übungsschein sind erfolgreiche Mitarbeit in den Tutorien, regelmäßige Bearbeitung der Hausaufgaben, sowie 50% der Punkte aus den ersten sechs und 50% der Punkte aus den zweiten sieben Übungsblättern.
- Im Anschluß an die Vorlesungszeit und vor Beginn des Sommersemesters 2006 werden Termine für mündliche Prüfungen angeboten.