Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

10.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 9.1. bis zum 13.1.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei J ein offenes Intervall, $X = \mathbb{R}^d$ und $f : J \times X \to X$ stetig und beschränkt.
Zeige, daß es dann für alle $(t_0, u_0) \in J \times X$ mindestens eine auf ganz J definierte (globale) Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in J, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

gibt.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Bestimme einen geeigneten Folgenraum[1] X, in dem das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u^0 \in X \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

lösbar ist und löse es.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Wir betrachten in $X = \mathcal{C}([0,1])$ das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in [0,1], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit $(Av)(t) := \int_0^1 (s-t)v(s)ds$.
Zeige, daß der zugehörige Propagator durch

$$S(t) = e^{-tA} = I - \sqrt{12}\sin(\frac{t}{\sqrt{12}})A + 12\big(1 - \cos(\frac{t}{\sqrt{12}})\big)A^2$$

gegeben ist. (I bezeichnet die Identität in X.)

[1] typische Folgenräume sind z.B. l^p mit $1 \le p \le \infty$, c_0 (Raum der Nullfolgen), c (Raum der konvergenten Folgen) etc., jeweils ausgestattet mit passenden Normen.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Wählt man im Satz von Osgood für die Funktion $\omega = \omega(z)$ z.B. die Funktionen

$$Lz,\ Lz \ln \frac{1}{z},\ Lz \ln \frac{1}{z} \ln \ln \frac{1}{z}, \ldots,$$

so erhält man immer schwächere Einschränkungen an die rechte Seite $f = f(t, u)$. Zeige, daß es keinen „am meisten verschärften" Satz dieser Art gibt. Zeige also, daß es zu einer den Voraussetzungen des Satzes genügenden Funktion ω immer eine Funktion ω_1 gibt, die ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes genügt und die

$$\lim_{z \to 0} \frac{\omega(z)}{\omega_1(z)} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Wir betrachten für $J = [0, \infty)$, $D = (0, \infty)$ das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in J, \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

mit $f : J \times D \to \mathbb{R}$, $f(t, u) := -\frac{t}{u} \exp(t^2)$.

Bestimme eine maximal fortgesetzte Lösung dieses AWP. Ist diese eindeutig bestimmt?