Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

11.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 16.1. bis zum 20.1.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Wir wissen, daß jede Lipschitz-stetige Funktion absolut stetig und jede absolut stetige Funktion stetig ist. Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht. Dies zu zeigen ist Sinn dieser Aufgabe.

(i) Zeige, daß $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $0 \neq t \mapsto g(t) := t \cos \frac{\pi}{2t}$, $g(0) = 0$, zwar stetig, nicht jedoch absolut stetig ist.

(ii) Finde eine Funktion, die absolut stetig, nicht jedoch Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Wir betrachten wieder das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Die Funktion $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung sowie eine Majorantenbedingung (es gebe also eine auf dem Intervall $[0,T]$ (L-)integrierbare Funktion $m = m(t)$ mit $|f(t,u)| \leq m(t)$ auf $[0,T] \times \mathbb{R}$).
Sei nun $l : (0,T) \to [0,\infty)$ eine nichtnegative, (L-)integrierbare Funktion und $\omega : (0,T) \to \mathbb{R}$ eine (L-)meßbare Funktion mit $\int_0^\delta 1/\omega(r)dr = \infty$ für jedes $\delta > 0$.
Zeige: Gilt nun für hinreichend kleine t und $|v - w|$

$$|f(t,v) - f(t,w)| \leq l(t)\omega(|v - w|),$$

so ist (in einer Umgebung von 0) die Lösung von (1) eindeutig bestimmt[1].

Bemerkung: In der Theorie der Differentialgleichungen nach Carathéodory ersetzen die Carathéodory- und eine Majorantenbedingung die Forderung der Stetigkeit der rechten Seite im Satz von Peano. Weiterhin wird im Satz von Picard-Lindelöf in der Lipschitzbedingung die Lipschitzkonstante L durch eine integrierbare Funktion $l = l(t)$ ersetzt. Die Aussage in der Aufgabe ist also eine natürliche Version des Satzes von Osgood für Carathéodory-Differentialgleichungen.

[1] Hinweis:Setzen wir $g(t,u) = l(t)\omega(v)$, dann zeige, daß $v \equiv 0$ einzige Lösung von $v'(t) = g(t, v(t))$, $v(0) = 0$ ist (in einer Umgebung von 0).

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Die Funktion $f : [0,T] \times M \to \mathbb{R}^d$ (mit $M \subseteq \mathbb{R}^d$) erfülle die Carathéodory-Bedingung und eine Majorantenbedingung. Zeige, daß der zugehörige Nemyzkij-Operator $F : L^1(0,T)^d \to L^1(0,T)^d$ stetig und beschränkt ist.

Aufgabe 4: **2 Zusatzpunkte**

Beweise das folgende Lemma von *Krasnosel'skij-Ladyzhenskij*:
Die Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung. Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es eine (L-)meßbare Funktion $v : [0,1] \to [a,b]$, so daß für fast alle $t \in [0,1]$

$$\max_{u \in [a,b]} |f(t,u)| = |f(t,v(t))| = |(Fv)(t)|$$

gilt.

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Die Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung. Es sei $1 \le p \le \infty$. Zeige[2][3]:

(i) Der durch f erzeugte Nemytskij-Operator F bildet genau dann $L^\infty(0,1)$ in $L^p(0,1)$ ab, falls es für jedes $r > 0$ eine Funktion $a_r \in L^p(0,1)$ gibt mit

$$|f(t,u)| \le a_r(t) \quad \text{für } |u| \le r, t \in [0,1].$$

(ii) In diesem Fall ist F automatisch beschränkt und für $p \neq \infty$ auch stetig, für $p = \infty$ jedoch im allgemeinen unstetig.

[2] Hinweis: Das Lemma von *Krasnosel'skij-Ladyzhenskij* kann benutzt werden.

[3] Für $1 \le p \le \infty$ besteht der Raum $L^p(0,1)$ aus den meßbaren Funktionen f mit $\|f\|_p < \infty$. Für $p \neq \infty$ ist hier $\|f\|_p := (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{1/p}$, für $p = \infty$ ist $\|f\|_\infty$ das wesentliche Supremum von f, also das Infimum der Zahlen K mit

$$|f(t)| \le K \quad \text{für fast alle } t \in [0,1].$$

($\|f\|_\infty$ ist also das „Supremum mit Ausnahme von Nullmengen")