Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

12.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 23.1. bis zum 27.1.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

In der Vorlesung wurde das Lemma von Gronwall in der folgenden Form bewiesen:

> Sei $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $t_0 \in [0,T), a, b \in L^\infty(t_0,T)$ und $\lambda \in L^1(t_0,T), \lambda(t) \geq 0$ fast überall in $(t_0,T) \ni t$. Dann folgt aus
>
> $$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s)a(s)ds \qquad \text{f. ü. in } (t_0,T)$$
>
> für fast alle $t \in (t_0,T)$
>
> $$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)ds\,,$$
>
> wobei $\Lambda(t) := \int_{t_0}^t \lambda(\tau)d\tau$.

(i) Die Aussage, daß $\lambda(t) \geq 0$ f.ü. in (t_0,T) ist, ist wesentlich. Konstruiere ein Gegenbeispiel zu der Aussage des Gronwallschen Lemmas für den Fall, daß λ nicht der Vorzeichenbedingung genügt.

(ii) Zeige eine dem Lemma von Gronwall entsprechende Aussage für den Fall, daß $t < t_0$ ist.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Auch für den Fall, daß λ negativ ist, kann dennoch ein Resultat abgeleitet werden, wenn eine stärkere, nämlich differentielle, Voraussetzung erfüllt ist. Beweise die folgende Form des Lemmas von Gronwall:

Sei $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $t_0 \in [0,T), a$ auf $[t_0,T]$ absolut stetig und $g, \lambda \in L^1(t_0,T)$. Dann folgt aus

$$a'(t) \leq g(t) + \lambda(t)a(t) \qquad \text{f. ü. in } (t_0,T)$$

für fast alle $t \in (t_0,T)$

$$a(t) \leq e^{\Lambda(t)}a(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}g(s)ds,$$

wobei wieder $\Lambda(t) := \int_{t_0}^t \lambda(\tau)d\tau$ ist.

Wie ist der Zusammenhang zum klassischen Lemma von Gronwall (siehe Aufgabe 1)?

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Wir erinnern uns an die folgende Version des Satzes von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung:

> Sei X ein Banachraum. Die Funktion $f : [0,T] \times X \to X$ sei stetig und im zweiten Argument Lipschitz-stetig, so daß es ein $L > 0$ gibt und für alle $t \in [0,T]$ und alle $v, w \in X$
>
> $$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L\|v - w\|$$
>
> gilt. Dann besitzt das Anfangswertproblem
>
> $$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,T], \\ u(t_0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{1}$$
>
> auf dem gesamten Zeitintervall genau eine Lösung $u \in \mathcal{C}^1([0,T]; X)$.

In dieser Aufgabe soll es um die Stabilitätseigenschaften eines solchen Problems gehen. Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) Unter den Voraussetzungen des zitierten Satzes sei u die globale Lösung von (1) zum Anfangswert $u_0 \in X$. Dann gibt es auch eine globale Lösung v zum beliebigen Anfangswert $v_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|}\|u_0 - v_0\| \leq e^{LT}\|u_0 - v_0\|.$$

(ii) Seien für die rechten Seiten $f, g : [0,T] \times X \to X$ die Voraussetzungen des zitierten Satzes mit den Konstanten L_f und L_g erfüllt. Dann gibt es globale Lösungen u, v von (1) zu derselben Anfangsbedingung $u_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq |t - t_0| e^{\min\{L_f, L_g\}|t-t_0|} \sup_{t \in [0,T], w \in X} \|f(t,w) - g(t,w)\| \\ &\leq T e^{\min\{L_f, L_g\}T} \sup_{t \in [0,T], w \in X} \|f(t,w) - g(t,w)\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $D \subseteq X$ offen, sowie $f : J \times D \to X$ stetig.

Zeige: Ist f im zweiten Argument *linear beschränkt*, gibt es also Funktionen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(J; \mathbb{R}_0^+) \cap L^1(J)$, so daß für beliebige $(t,v) \in J \times D$

$$\|f(t,v)\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\|v\|$$

gilt, so ist jede Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J \\ u(t_0) = u_0 \in D, \quad t_0 \in J \end{cases}$$

beschränkt.