

Differentialgleichungen I

13. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 30.1. bis zum 3.2.

Aufgabe 1:

2 Punkte

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0,$$

wobei f eine stetige Funktion ist, die nicht schneller als exponentiell wächst, d.h. es gibt Konstanten $M > 0$, $t_0 > 0$ und $a > 0$, so daß

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Dann wächst keine Lösung dieser Differentialgleichung schneller als exponentiell, es gibt also für jede Lösung u Konstanten $K > 0$ und $b > 0$, so daß

$$|u(t)| \leq Ke^{bt} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Aufgabe 2:

3 Punkte

Für eine äquidistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ in N Teilintervalle der Länge $\Delta t = T/N$ betrachte man das folgende Schema

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1; u^0 \text{ gegeben,}$$

mit $t_{n+\frac{1}{2}} := \frac{t_n+t_{n+1}}{2}$ und $u^{n+\frac{1}{2}} := \frac{u^n+u^{n+1}}{2}$, zur Approximation der Lösung $u(t_n) \approx u^n$ des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Zeige die Wohldefiniertheit des Verfahrens, A-priori-Abschätzungen für $\{u^n\}$, $\{\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\}$ und, daß der Fehler sich wie $(\Delta t)^2$ verhält, wenn u''' existiert und geeignet integrierbar ist.

Hinweis: Für die Lösung ist u.a. zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} = \rho^n := & \frac{1}{2\Delta t} \left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (t - t_n)^2 u'''(t) dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^2 u'''(t) dt \right) \\ & + f(t_{n+\frac{1}{2}}, u(t_{n+\frac{1}{2}})) - f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 3:**2 Punkte**

Gegeben sei eine skalare autonome Differentialgleichung

$$u' = \gamma u^n, t \geq 0$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuche, ob die Nulllösung stabil (asymptotisch / exponentiell) bzw. attraktiv ist.

Aufgabe 4:**3 Punkte**

Bestimme alle Gleichgewichtspunkte der folgenden Systeme und untersuche deren Stabilität.

(i)

$$\begin{aligned}u' &= 5u - u^2 - uw \\w' &= -2w + uw,\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}u' &= u(1 - w) \\w' &= w(u - 1)\end{aligned}$$

(iii) Aus der Vorlesung bekannt ist das SIR-Modell zur Beschreibung von Krankheitsausbreitungen. Bestimme die Gleichgewichtspunkte des Modells und untersuche deren Stabilität:

$$\begin{aligned}S' &= -\alpha SI \\I' &= \alpha SI - \beta I \\R' &= \beta I.\end{aligned}$$