TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

14.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 6.2. bis zum 10.2.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

1. Löse das Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$-u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

mit

(i) homogenen Dirichlet-Randbedingungen
(ii) $u(0) = 0,\ u(1) = 1$

für die rechten Seiten

(a) $f(x) \equiv 0$
(b) $f(x) = 6(1 - 4x^2)e^{4x}$

und skizziere die Lösungen

2. Unter welchen Bedingungen ist die Aufgabe

$$-u''(x) = 0$$

mit Robinschen Randbedingungen lösbar?

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Lies den Artikel von PH. KORMAN [1] - der dritte Abschnitt ist für uns nicht wichtig - und bearbeite die folgenden Aufgaben:

(i) Fasse **(kurz: Wenige Sätze)** den Inhalt des Artikels zusammen (Worum geht es?).

(ii) Formuliere (Lemma 2.1 und das folgende Korollar) **oder** (Theorem 2.1) als eigenständige Aussagen und beweise sie.

Der Artikel ist über `http://www.emis.de/journals/PM/` zugänglich, kann aber auch bei uns (Kasten im Flur) abgeholt werden.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Beweise die folgende, schärfere Version eines Satzes aus der Vorlesung:

> Es sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, es also ein $L > 0$ gibt, so daß für alle $x \in [a,b]$ und alle $s,t \in \mathbb{R}$
>
> $$|f(x,s) - f(x,t)| \leq L|s-t|$$
>
> gilt. Ferner gelte
>
> $$L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\,. \tag{1}$$
>
> Dann gibt es genau eine Lösung des semilinearen Problems
>
> $$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u(x)), & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Betrachte dazu die Menge

$$\left\{ v \in \mathcal{C}[a,b] \,:\, |||f||| := \sup_{x \in (a,b)} \frac{|v(x)|}{\sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}} < \infty \right\}$$

und zeige, daß diese einen Banach-Raum bildet. Wende dann den Banachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkung: Die Bedingung (1) ist scharf, die Aussage des Satzes kann also nicht mehr aufrechterhalten werden, falls $L \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ ist.

---

[1] Korman, P. : Remarks on Nagumo's condition. In: *Port. Math.* 55 (1998), Nr. 1, S. 1–9