TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

15.Übungsblatt

Dieses Blatt zählt als Zusatzblatt für die zweite Hälfte.

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 13.2. bis zum 17.2.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Beweise die sogenannte LAGRANGE-Identität: Sei

$$(Lu)(x) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \quad x \in (a,b),$$

$p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $p(x) > 0$ für $x \in (a,b)$, $q \in \mathcal{C}[a,b]$, der das STURM-LIOUVILLE-Problem beschreibende Differentialausdruck. Dann gilt für zwei Funktionen $u, v \in \mathcal{C}^2[a,b]$

$$uLv - vLu = (p(u'v - uv'))' \,.$$

Gilt außerdem $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$, so folgt

$$(Lu, v)_2 = (u, Lv)_2 \,,$$

wobei $(\cdot,\cdot)_2$ das übliche $L^2(a,b)$-Skalarprodukt bezeichne.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Zeige, daß jede Lösung $u \in \mathcal{C}^1[a,b]$ der Integralgleichung

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi, \quad x \in (a,b),$$

eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x, u(x), u'(x)), & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

ist und umgekehrt, wobei $c, d \in \mathcal{C}[a,b]$ und $f \in \mathcal{C}([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ seien. Hier ist G die Greensche Funktion aus der Vorlesung. Wir setzen voraus, daß das zur homogenen Gleichung gehörende Randwertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen nur die Nulllösung besitzt.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Untersuche das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = -e^{u(x)}, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

auf Lösbarkeit.

Hinweis: Zeige zunächst, daß stets $u(x) \leq 0$ gilt. Reduziere dann das Randwertproblem auf ein Fixpunktproblem auf der Menge

$$\mathcal{M} := \{v \in \mathcal{C}[0,1] \, : \, v(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in [0,1]\}.$$

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Wir erinnern uns an die erste Aufgabe des zweiten Aufgabenblattes. (Die dortigen Ideen sind auch hier hilfreich ...)

Hier nehmen wir nun an, daß $0 < j < \frac{4}{9}$ sei. Zeige, daß dann für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} \phi''(x) = \frac{j}{\sqrt{\phi(x)+\varepsilon}}, & x \in (0,1), \\ \phi(0) = 0, \\ \phi(1) = 1, \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt.

Hinweis: Zeige zunächst, daß für jedes $\lambda \geq 0$ genau eine Lösung ϕ_λ der Differentialgleichung mit $\phi_\lambda(0) = 0$ und $\phi'_\lambda(0) = \lambda$ existiert. Zeige dann, daß für festes x $\lambda \mapsto \phi'_\lambda(x)$ streng monoton steigend ist, daß auch $\lambda \mapsto \phi_\lambda(x)$ dies ist und schließlich, daß $\lambda \mapsto \phi''_\lambda(x)$ streng monoton fällt. Zeige nun die Lipschitzstetigkeit von $\lambda \mapsto \phi_\lambda(1)$ und benutzte schließlich den Zwischenwertsatz.