Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

2.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 31.10. bis zum 4.11.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei j eine reelle Zahl. Zeige, daß $j \leq 4/9$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Randwertproblems [1]

$$\begin{cases} \phi''(x) = \frac{j}{\sqrt{\phi(x)}} & \text{für } x \in (0,1) \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 1 \end{cases}$$

ist.

(Hinweis: Mit ϕ' multiplizieren und zweimal geeignet integrieren.)

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Man kann eine partikuläre Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der *Methode von* Cauchy bestimmen. Dazu bestimmt man für s aus dem zugrundeliegenden Intervall die Koeffizienten c_1, c_2 aus der allgemeinen Lösung

$$u_{\text{hom}}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

der homogenen Gleichung derart, daß $u_{\text{hom}}(s) = 0$ und $u'_{\text{hom}}(s) = -f(s)$ ist. Dann wird mit der so gewonnenen Lösung $u_{\text{hom}}(x; s)$ durch

$$u_p(x) := \int_{x_0}^{x} u_{\text{hom}}(x; s) ds$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung konstruiert.

Finde jeweils eine partikuläre Lösung für die Differentialgleichung

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = 1/(x-1), \qquad x \in (0,1)$$

mit der Methode der Variation der Konstanten und der Methode von Cauchy.

Eine Lösung der homogenen Gleichung ist von der Form x^α, wobei α eine reelle Zahl ist, die aus der Differentialgleichung bestimmt werden kann. Eine weitere Lösung kann durch Reduktion der Ordnung gefunden werden.

[1] Dieses Randwertproblem ist eng verbunden mit dem Gesetz von Child-Langmuir, welches den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Spannung in einer Diode beschreibt, die aus zwei unendlichen, parallelen Platten in einem Vakuum besteht. Das Gesetz finden Anwendung z.B. in der Plasmaphysik.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Zeige, daß für stetige Koeffizienten A und b eine Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) + A(t)u(t) = b(t)$$

durch

$$u(t) = \exp\bigl(-\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\bigr)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp\bigl(-\int_{s}^{t} A(\tau)d\tau\bigr)b(s)ds$$

mit beliebigem t_0 gegeben ist.
Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y/x + \ln(x), \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

und gib das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Eine Differentialgleichung vom Typ $y' = f(y/x)$ kann durch Einführung einer neuen Variablen $u = y/x$ in eine Differentialgleichung vom Typ $u' = (f(u) - u)/x$ überführt werden.

Löse mit dieser Methode das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = (9x^2 + 3y^2)/2xy, \\ y(2) = 2. \end{cases}$$

Aufgabe 5: **1 Punkt**

Es sei T eine kontrahierende Abbildung eines metrischen Raumes (X, d) in sich. Zeige, daß auf die Existenz eines Fixpunktes nicht geschlossen werden kann, falls X nicht vollständig ist. Was ist mit der Eindeutigkeit?

Sei nun Vollständigkeit von X gegeben.
Zeige: Aus

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \qquad x, y \in X$$

folgt weder Existenz noch Eindeutigkeit eines Fixpunktes von T und aus

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \qquad x, y \in X,\ x \neq y$$

folgt zwar Eindeutigkeit, nicht aber die Existenz eines Fixpunktes von T.