

## Differentialgleichungen I

### 4. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 14.11. bis zum 18.11.05

#### Aufgabe 1:

3 Punkte

(Dies ist die Aufgabe, die bereits auf dem dritten Übungsblatt stand.)

Gib mindestens drei Literaturquellen an, in denen der Satz von MAZUR bewiesen wird und formuliere einen Beweis in eigenen Worten. Der Satz von MAZUR lautet:

*Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $A \subset X$  eine relativ kompakte Menge.  
Dann ist auch die konvexe Hülle  $co(A)$  von  $A$  relativ kompakt.*

Eine Menge heißt *relativ kompakt*, falls ihr Abschluß kompakt ist.

#### Aufgabe 2:

2 Punkte

Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $[a, b]$  ein Intervall.

Zeige, daß der in der Vorlesung definierte Raum  $\mathcal{C}^1([a, b]; X)$  der stetig differenzierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  mit Werten in  $X$ , versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1([a,b];X)} := \max_{t \in [a,b]} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|)$$

ein BANACH-Raum ist.

#### Aufgabe 3:

2 Punkte

Für  $u \in \mathcal{C}([a, b]; X)$  sei  $(u_n)$  die in der Vorlesung definierte Folge von Treppenfunktionen, also für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$\begin{aligned} u_n(t) &:= u(t_{k-1}^{(n)}) \quad \text{für } t \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}), k = 1, 2, \dots, n \\ u_n(b) &:= u(t_{n-1}^{(n)}), \end{aligned}$$

wobei  $t_k^{(n)} = a + k \frac{b-a}{n}$  ist.

Zeige, daß  $(u_n)$  punktweise gegen  $u$  konvergiert.

#### Aufgabe 4:

3 Punkte

Für  $u \in \mathcal{C}([a, b]; X)$  wird mit Hilfe der Folge  $(u_n)$  aus Aufgabe 3 das Integral über  $u$  definiert durch

$$\int_a^b u(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u(t_{k-1}^{(n)}) \cdot (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}).$$

Zeige, daß diese Definition unabhängig ist von der gewählten Zerlegungsfolge, daß also eine andere Zerlegungsfolge als jene aus Aufgabe 3 zum selben Integral führt.

## Wie Banach zu seinem Dokortitel kam<sup>1</sup>

Stefan Banach (1892-1945) wurde in Krakau geboren, verbrachte sein wissenschaftliches Leben jedoch in Lemberg (heute Lwiw in der Ukraine).

Ulam, einer seiner Schüler, hat über ihn geschrieben und ihn so geschildert<sup>2</sup>:

*Banach, by the way, was a very eccentric person in his habits and his personal life. He would not take any examinations at all, disliking them intensely. But he wrote so many original papers and proposed so many new ideas that he was granted a doctor's degree several years later without passing any of the regular exams.*

Schon am Anfang seiner Karriere zeigte er wenig Neigung, seine neuen Resultate auch aufzuschreiben. Als die Lemberger Professoren den Eindruck hatten, er habe genügend Material für eine Dissertation beisammen, schickten sie einen Assistenten aus, um Banach diskret nach dem Stand seiner Forschungen auszuhorchen. Dieser Assistent mußte dann die Sätze und Beweise, die Banach ihm erklärt hatte, zu Papier bringen, und nach geraumer Zeit blieb für letzteren nur noch die Aufgabe, den gesammelten Text zu redigieren; im Juni 1920 wurde die Dissertation eingereicht und zwei Jahre später erschien sie in *Fundamenta Mathematicae*. Aber es gab noch eine mündliche Prüfung, und wieder mußten die Professoren zu einem Trick greifen. Eines Tages bat einer von ihnen Banach in einen Seminarraum unter dem Vorwand, es seien gerade ein paar auswärtige Mathematiker da, die bei einem bestimmten Problem nicht weiterkämen; ob er mit ihnen vielleicht ein paar Fragen diskutieren wolle? Das tat Banach nur zu gerne, und als nach einiger Zeit alle Fragen zur Zufriedenheit der Gäste - man ahnt es bereits, es handelte sich um die Prüfungskommission - beantwortet waren, stand der Promotion nichts mehr im Wege. 1922 folgte die Habilitation; die prüfungstechnischen Details sind leider nicht überliefert.

Der Titel des oben genannte Buches von Mauldin spielt auf folgende Begebenheit an. Teil der Banachschen Exzentrizität war gewiß seine Vorliebe, im Café zu arbeiten statt in der Universität, und zwar zuerst im Café Roma („He used to spend hours, even days there, especially towards the end of the month before the university salary was paid.“<sup>3</sup>) und dann, als die Kreditsituation im Roma prekär wurde, im Schottischen Café direkt gegenüber. Dort haben endlose mathematische Diskussionen stattgefunden, hauptsächlich zwischen Banach, Mazur<sup>4</sup> und Ulam („It was hard to outlast or outdrink Banach during these sessions“, schreibt letzterer), deren wesentliche Punkte in einer vom Kellner des schottischen Cafés verwahrten Kladde festgehalten wurden; bevor sie angeschafft wurde, schrieb man - sehr zum Ärger des Personals - direkt auf die Marmortische. Diese Kladde ist heute allgemein als „das Schottische Buch“ bekannt, es ist, mit einleitenden Artikeln von Mauldin als Buch herausgegeben worden (s.u.). Im Schottischen Buch werden Probleme der Funktionalanalysis, der Theorie der reellen Funktionen und der Maßtheorie diskutiert; manche sind bis heute ungelöst geblieben. Für einige Probleme wurden Preise ausgesetzt, die von einem kleinen Glas Bier über eine Flasche Wein bis hin zu einem kompletten Abendessen und einer lebenden Gans<sup>5</sup> reichten.

---

<sup>1</sup>Nach: Werner, Funktionalanalysis, 4. Auflage, Springer, 2002, S. 42

<sup>2</sup>Mauldin, The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café, Birkhäuser, 1981, S.5

<sup>3</sup>Mauldin [1981], S. 7

<sup>4</sup>sic! Eben jener.

<sup>5</sup>Enflo löste das entsprechende Problem 1973 und bekam dafür in Warschau eine lebende Gans überreicht.