

Differentialgleichungen I

5. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 21.11. bis zum 25.11.

Aufgabe 1:

3 Punkte

Ist X ein unendlichdimensionaler BANACH-Raum, $u_0 \in X$ und $r > 0$, so ist die Kugel $\overline{B}(u_0, r) = \{v \in X : \|v - u_0\| \leq r\}$ nach dem RIESZschen Kompaktheitssatz nicht kompakt. Daher muß das Bild einer auf $\overline{B}(u_0, r)$ definierten stetigen Funktion nicht beschränkt sein.

Als Beispiel hierzu betrachten wir den Raum $X = l^2$ der quadratisch summierbaren Folgen $u = (u_1, u_2, \dots)$ mit

$$\|u\|_{l^2} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

und die auf der Einheitskugel $\overline{B}(0, 1) \subset l^2$ durch

$$f(u) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1 + 3^{-k} - u_k}, 0, 0, \dots \right)$$

definierte Abbildung f .

Zeige, daß f wohldefiniert ist, nach l^2 abbildet und stetig ist und daß das Bild von f unbeschränkt ist.

Aufgabe 2:

2 Punkte

Es sei f wie in Aufgabe 1 definiert. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u_1(0) = 2, u_2(0) = 19/9, u_k(0) = 3^{-k} \text{ für } k \geq 3 \end{cases}$$

auf einem geeigneten Zeitintervall I . Liegt diese Lösung in $\mathcal{C}^1(I; l^2)$?

Aufgabe 3:

3 Punkte

Es sei $X \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$, versehen mit der Supremumsnorm. Es sei $k \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$(Ku)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)u(s)ds, \quad u \in X, t \in \mathbb{R}.$$

- (i) Zeige, daß alle Funktionen $u \in X$ gleichmäßig stetig und beschränkt sind.
- (ii) Zeige, daß K eine Abbildung von X in sich, linear und beschränkt ist.
- (iii) Es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} |k(y)| dy < 1$. Zeige, daß es dann zu jedem $f \in X$ genau ein $u \in X$ gibt, so daß $u - Ku = f$ gilt.¹

Aufgabe 4:

2 Punkte

Das *MSC (2000)* (Mathematics Subject Classification) ist ein System zur Klassifizierung der mathematischen Fachgebiete, wobei jedem Gebiet eine Kombination aus fünf Ziffern und Buchstaben zugeordnet wird. Anhand dieses Codes kann recht leicht herausgefunden werden, in welche Gebiete ein Artikel oder ein Buch einzuordnen ist. Bei einem Artikel ist die MSC-Angabe meist am Anfang, nach dem Abstract, im Buch auf einer der ersten Seiten angegeben.

Welchen *MSC (2000)*-Code haben die folgenden mathematischen Themenbereiche?

- (i) Theorie der Wellengleichungen
- (ii) Nichtlineare Randwertprobleme
- (iii) Theorie der Banach-Räume stetiger Funktionen
- (iv) gewöhnliche Differentialgleichungen in Banach-Räumen

¹Wen es interessiert: Dies ist eine Hälfte der *Fredholmschen Alternative* für diesen konkreten Operator.