Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

6.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 28.11. bis zum 2.12.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Gegeben sei das AWP

$$\begin{cases} u_1'(t) = -u_1(t) + u_2(t)/t + t \\ u_2'(t) = (1-t)u_1(t) + u_2(t) - t^2, \qquad \text{für } t > 0, \\ u_1(1) = 1,\ u_2(1) = 2. \end{cases}$$

Schreibe das AWP in der Form einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung vom Typ $u'(t) + A(t)\,u(t) = f(t)$ und zeige, daß

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 1 + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung sind.
Löse das inhomogene AWP.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es seien $X = \mathbb{R}^n$ und $A, B : X \to X$ lineare Abbildungen (unabhängig von t). Zeige die folgenden Aussagen.

(i) Kommutieren A und B, so gilt $e^A\,e^B = e^{A+B} = e^B\,e^A$ und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Ist zusätzlich B invertierbar, so gilt auch $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.

(ii) Es gilt[1]

$$\lim_{n\to\infty} (I + B/n)^n = e^B = \lim_{n\to\infty} (I - B/n)^{-n}.$$

(iii) Es gilt

$$Bv = \lim_{t\searrow 0} \frac{e^{tB}v - v}{t}$$

für beliebige $v \in X$.

(iv) Angenommen, A läßt den Unterraum E invariant, für alle $v \in E$ ist also auch $Av \in E$. Ist dann u eine Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in E, \end{cases} \tag{1}$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist $u(t) \in E$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

[1]Hinweis: Binomische Formel und Bernoullische Ungleichung.

(v) Sei A nilpotent. Was kann man dann über die Lösungen des AWP (1) sagen?

(vi) Es habe A einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann gibt es mindestens eine Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$, für die

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$$

gilt.

Es gibt 2 Zusatzpunkte, wenn man diese Aufgabe nicht für $\mathbb{R}^n$ löst, sondern für einen allgemeinen (unendlichdimensionalen) BANACH-Raum X. In der Aufgabe muß dann „lineare Abbildung“ durch „lineare, beschränkte Abbildung“ und „Unterraum“ durch „abgeschlossener Unterraum“ ersetzt werden.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Bestimme mit Hilfe der Methode der Reduktion der Ordnung die allgemeine Lösung des Systems

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1/t & 1 \\ -1/t^2 & -2/t \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung ist $u_1(t) = (t^2, -t)^T$.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2/t^2 & -2/t \end{pmatrix}$ für $t > 0$. Löse das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = \binom{t^4}{t^3} & \qquad t > 0 \\ u(2) = \binom{1}{4}. \end{cases}$$