Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman

Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

7.Übungsblatt

letztes Übungsblatt der ersten Semesterhälfte

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 5.12. bis zum 9.12.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Es sei $X = \mathbb{R}^n$, I ein Intervall, $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$. Wir betrachten ein Fundamentalsystem $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$ der Differentialgleichung

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0. \tag{1}$$

Zeige, daß eine Abbildung $\mathcal{V} \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$ genau dann ein Fundamentalsystem von (1) ist, wenn es eine reguläre Abbildung $C \in \mathcal{L}(X)$ gibt mit

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{U}(t)C, \qquad t \in I.$$

Ist $C \in \mathcal{L}(X)$ regulär und kommutiert C mit allen $A(t)$, $t \in I$, so ist auch $C\mathcal{U}$ ein Fundamentalsystem von (1).

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Löse das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0) = (1,1,0)^T \end{cases} .$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Vorgelegt sei das AWP für die partielle Integro-Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + \int_a^b \exp(t^\alpha - (x-y)^2) u(y,t) dy + x t^\alpha u(x,t) = x^2 + t^\alpha, \ \ x \in (a,b), \, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

wobei $\alpha = 1$ und u_0, v_0 gegeben sind. Gib eine geeignete Formulierung als AWP für eine lineare Operator-Differentialgleichung an und untersuche dieses auf Lösbarkeit. Gib eine explizite Formel für die Lösung an. Wie vereinfacht sich diese, wenn $\alpha = 0$ gilt?

Aufgabe 4: **3 Punkte**

In der Übung haben wir homogene Systeme mit periodischen Koeffizienten betrachtet, also Systeme

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0, \tag{2}$$

wobei $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ ω-periodisch sei, $\omega > 0$.

Ist $\mathcal{U}$ ein Fundamentalsystem von (2), so ist auch $\mathcal{U}(\cdot + \omega)$ ein Fundamentalsystem und aus Aufgabe 1 erhalten wir, daß es eine reguläre Matrix C gibt, so daß

$$\mathcal{U}(t + \omega) = \mathcal{U}(t)\, C$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Matrix C hängt im allgemeinen von der Wahl des Fundamentalsystems $\mathcal{U}$ ab. Dies gilt nicht für die Eigenwerte von C; diese heißen auch *charakteristische Multiplikatoren* von (2).

Zeige:

(i) Die Eigenwerte von C sind von der Wahl des Fundamentalsystems $\mathcal{U}$ unabhängig.

(ii) Es gibt genau dann eine nichttriviale Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung (2) mit

$$u(t + \omega) = \lambda u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

wenn λ ein charakteristischer Multiplikator von (2) ist. (Dies erklärt den Namen.)

(iii) Die charakteristischen Multiplikatoren kann man im allgemeinen nicht bestimmen, ohne bereits ein Fundamentalsystem zu kennen.
Wie kann man aber das Produkt aller charakteristischen Multiplikatoren bereits aus der Kenntnis von A berechnen?

Bemerkung: Die charakteristischen Multiplikatoren sind von Interesse, da sie das asymptotische Verhalten einer Lösung von (2) für $t \to \pm\infty$ bestimmen.

Aufgabe 5: Zusatzaufgabe **+3 Punkte**

Untersuche die folgenden Funktionenmengen auf gleichgradige Stetigkeit sowie Kompaktheit bzw. relative Kompaktheit im Raum der stetigen Funktionen:

(i) $F := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$

(ii) $F := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$, $x \in [0,1]$

(iii) $F := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp(-x/n)$, $x \in [0,\infty)$

(iv) $F := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\exp(-x/n)$, $x \in [0,1]$

Skizziere jeweils die Funktionenfolgen.