TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
E. Emmrich, C. Kreusler, J. Gagelman Wintersemester 2005/06

Differentialgleichungen I

8.Übungsblatt

Beginn der zweiten Hälfte

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 12.12. bis zum 16.12.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Wir wollen die (nichtlineare Fredholm-) Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_a^b f(x, y, u(y))dy, \qquad x \in [a, b], \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

lösen. Es sei mit einem festen $r > 0$

$$f : \{(x, y, v) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x, y \in [a, b], \, |v| \leq r\} =: Q \to \mathbb{R}$$

stetig und

$$M := \max_Q |f(x, y, v)|.$$

Zeige: Falls $|\lambda| \leq r/(M(b-a))$ ist, so hat die Gleichung (1) mindestens eine Lösung $u \in \mathcal{C}([a, b])$ mit $\|u\|_\infty \leq r$.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Beweise die folgende Form des Satzes von Arzelà- Ascoli.
Sei Z ein Banachraum und $A \subset Z$ kompakt. Sei X ein weiterer Banachraum. Zeige: Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(A; X)$ ist genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}(A; X)$, wenn sie gleichgradig stetig ist und für jedes $t \in A$ die Menge

$$\mathcal{M}(t) = \{v(t) \in X \, : \, v \in \mathcal{M}\}$$

relativ kompakt in X ist.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Sei H ein unendlich-dimensionaler, separabler Hilbertraum. Wir wollen zeigen, daß es eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}(0, 1)$ in sich gibt, welche keinen Fixpunkt besitzt. Kakutani hat 1943 eine solche konstruiert:

Sei hierzu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H. Jedes Element $x \in H$ läßt sich dann darstellen als eine verallgemeinerte Fourierreihe

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}.$$ [1]

[1] Es gilt dann die *Parsevalsche Gleichung*: $\|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

Wir definieren eine Abbildung $U : H \to H$ durch

$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}.$$

(i) Zeige, daß U linear und beschränkt (also stetig) ist.

(ii) Wir definieren nun die Abbildung

$$f(x) := \frac{1}{2}(1 - \|x\|)e_0 + U(x), \quad x \in \overline{B}(0,1).$$

Zeige, daß f stetig ist und $\overline{B}(0,1)$ in sich abbildet und weiter, daß f keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Wir wollen den folgenden Satz von Leray und Schauder beweisen[2] .

> Es sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung
>
> $$u = Au, \quad u \in X \tag{2}$$
>
> eine Lösung, falls folgende *A-priori-Abschätzung* gilt:
>
> > Es gibt ein $r > 0$ derart, daß
> >
> > $$\|u\| \leq r$$
> >
> > für jede Lösung u der Gleichung
> >
> > $$u = tAu, \quad u \in X, \quad 0 \leq t < 1$$
> >
> > gilt[3] .

Hierzu definieren wir die Menge $M := \{u \in X \,:\, \|u\| \leq 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au & \text{für } \|Au\| \leq 2r, \\ \frac{2rAu}{\|Au\|} & \text{für } \|Au\| > 2r. \end{cases}$$

Zeige, daß B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist. Folgere, daß es einen Fixpunkt für B geben muß und schließlich, daß dann auch eine Lösung von (2) existiert.

Benutze den Satz, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha \int_a^b \sin u(y) dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ im Raum $\mathcal{C}([a,b])$ zu zeigen.

Zum Abschluß noch ein Zitat des großen Funktionalanalytikers (seines Zeichens also ein echter „Theoretiker“) Paul Halmos aus dem Jahre 1985:

> Mathematics is not a deductive science - that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial-and-error, experimentation, and guesswork.

---

[2]Dies ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips: *A-priori-Abschätzung gibt Existenz.*

[3]Bemerkung: Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!