DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

GEHALTEN VON DR. ETIENNE EMMRICH, WS 05/06, TU-BERLIN

- aufgeschrieben von Jan Witte (ohne Gewähr für die Richtigkeit) -

Inhaltsverzeichnis

Einführung: Anwendungsbeispiele und Typen von Differentialgleichungen

Die Theorie der Differentialgleichungen beschäftigt sich mit, wie der Name schon sagt, Gleichungen in denen Differentiale, also Ableitungen von Funktionen vorkommen. Die Theorie ist nun nicht einheitlich: Je nachdem wie die Differentialgleichung beschaffen ist, unterscheidet man verschiedene Typen und entwickelt diverse Theorien, welche jeweils die Besonderheiten des Typs berücksichtigen. Zunächst aber einige

Beispiele.

- Die **Durchbiegung einer kreisförmigen Platte** wird durch die Differentialgleichung
$$B \triangle \triangle u + Ku = f$$
beschrieben. Dabei bezeichnet u die Durchbiegung der Platte (u ist die gesuche Funktion), B, K sind konstante physikalische Kenngrößen und f ist die auf die Platte wirkende Kraft. Zur Anwendung kommen Platten hauptsächlich als Geschossdecken, Fundamentplatten aber auch bei Brücken und werden meist zwischen Auflagern gespannt. Die Auflager sind hierbei meist linienförmig (Wände) oder punktförmig (Stützen). Hieraus ergibt sich im ersten Fall noch eine zusätzliche Bedingung, eine Randbedingung, an u: Der Rand der Platte sei mit ∂P bezeichnet. Da sich die Platte am Rand nicht biegt, sie liegt ja fest auf, gilt $u\,|_{\partial P} = 0$. Hinzu kommen weitere Bedingungen an die Ableitungen von u.

- Aus der Strömungslehre sind die **Navier-Stokes-Gleichungen** bekannt:
$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{Re}\triangle u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f \\ \nabla\cdot u &= 0 \end{aligned}$$
Die Existenz einer Lösung kann nur in Spezialfällen nachgewiesen werden; eine allgemeine Lösung steht noch aus und ist eines der sieben Millenium-Probleme des Clay Mathematics Institute.[1]
Den Fall des reibungsfreien Fluids (im zweidimensionalen Fall) beschreiben die Euler-Gleichungen:
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E+p)u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)v \end{pmatrix} = 0$$
mit $p = (\gamma-1)(E - \frac{\rho}{2}(u^2+v^2))$ (algebraische Zustandsgleichung). Dabei bezeichnen u sowie v die Geschwindigkeit, p den Druck, f eine äußere Kraft, ρ die Dichte, E die innere Energie und γ den Adiabatenexponenten. Als praktische Anwendungen können durch Luft umströmte Flugzeuge und die

[1] siehe www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/Official_Problem_Description.pdf

Bekämpfung von Waldbränden genannt werden. Ähnliche Gleichungen spielen in der Modellierung von Operationen in der Gesichtschirurgie eine Rolle.

- Die **Black-Scholes-Gleichung** ist ein finanzmathematisches Modell zur Bewertung von Finanzoptionen:
$$f_t + rSf_S + 0{,}5\sigma^2 S^2 f_{SS} = rf.$$
Um diese Gleichung zu erklären benötigt man Begriffe der Warscheinlichkeitstheorie. Zur Herleitung der Gleichung wird der Begriff des *standardisierten Wiener-Prozesses* (ein stochastischer Prozess mit gewissen Eigenschaften, auch *Brownsche Bewegung* genannt) benötigt um die Renditeentwicklung eines Wertpapiers zu beschreiben. Weiterhin benötigt man hier einen neuen Integralbegriff, das Ito-Integral oder Stratonovich-Integral, damit man das Integral eines stochastischen Prozesses mit unendlicher Variation definieren kann. Soweit wollen wir hier nicht gehen, es sei nur gesagt, dass diese Gleichung zu den stochastischen Differentialgleichungen gehört und der Begriff des Wiener Prozesses oftmals in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften zur Simulation zufälliger Entwicklungen verwendet wird.

- Das **SIR-Modell**. Auch die Modellierung von biologisch-medizinischen Sachverhalten ist möglich, z.B. die Dynamik infektiöser Krankheiten. Ein einfaches Modell von Kermack-McKendrick betrachtet eine Population, bei der die Anzahl der Lebewesen konstant ist. Es unterteilt die Population in drei Teilpopulationen: die gesunden Lebewesen S, die infizierten Lebewesen I und die Lebewesen R, die aus dem Krankheitsprozess ausgeschieden sind (z.B. durch Genesung oder Tod), in Quarantäne genommen wurden oder die Krankheit nicht übertragen können (z.B. wegen Immunität). Demnach geben $S(t)$, $I(t)$ und $R(t)$ die Anzahl der zur Zeit t zu S, I und R gehörenden Lebewesen an und es gilt $S(t)+I(t)+R(t) = const.$ Das Modell lautet nun
$$\begin{aligned} S'(t) &= -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) &= \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) &= \beta I(t) \end{aligned}$$
für $t > 0$. Die Gleichungen geben das Änderungsverhalten der Größen der Teilpopulationen an. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit trifft ein $s \in S$ auf ein $i \in I$ und infiziert sich, s gehört nun zu I (erste Gleichung). Die Anzahl, die von S abwandert zählt dann zu I. Irgendwann hat ein Lebewesen den Krankheitsprozess überstanden, ist genesen oder stirbt gar, (zweite Gleichung) und zählt nun zu R (dritte Gleichung). Man kann nun mehrere Erweiterungen des Systems vornehmen, z.B. ist hier nicht berücksichtigt, dass ein $s \in S$ durch Impfung gleich nach R abwandern kann oder ein Lebewesen die Krankheit überstanden hat (also zu R gehört) und nach einiger Zeit wieder erkrankt und zurück zu I abwandert. Die dabei auftretenden Übergangsraten (hier α und β) müssen empirisch ermittelt werden. Unterstellt man eine Exponentialverteilung, so ist z.B. $\frac{1}{\beta}$ die mittlere Verweildauer in der Teilpopulation I. Praktische Anwendungen sind die Modellierung des

Schweren Akuten Atemwegssyndroms (SARS), einer Infektionskrankheit, die erstmals im November 2002 auftrat oder, mit ausgefeilteren Modellen, die Modellierung des Krankheitsverlaufs bei HIV und AIDS.[2]

Hat man ein Modell gefunden, so ist es die Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen folgende Fragen für Differentialgleichungsprobleme zu beantworten:

(1) Existiert eine Lösung?

(2) Existiert sogar genau eine Lösung?

(3) Stabilität: Hängt die Lösung stetig von ihren Anfangsdaten (Randdaten, ihrer rechten Seite oder Parametern) ab, d.h. ändert sich die Lösung nur wenig, wenn man die Anfangsdaten wenig stört?

(4) Regularität, qualitative Eigenschaften: Wie sieht das asymptotische Verhalten einer Lösung aus? Von welchem Grad ist die Glattheit einer Lösung?

(5) Wie kann man exakte Lösungen konstruieren?

(6) Wie kann man approximative Lösungen konstruieren? (Für diskrete Gleichungen kann man die Fragen (1) bis (5) noch einmal diskutieren.)

Wie erwähnt, werden diese Fragen für verschiedene Typen von Differentialgleichungen erörtert:

- **explizit vs. implizit**: Eine explizite DGL ist nach der höchsten Ableitung aufgelöst (z.B. $u''(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$). Ist dies nicht der Fall, so liegt die DGL in impliziter Form vor.

- **gewöhnlich vs. partiell**: Die gesuchte Funktion u hängt bei einer gewöhnlichen DGL nur von einer (z.B. $u'(x) = u(x) + c$, $x, c \in \mathbb{R}$), bei einer partiellen DGL von mehreren Variablen ab (z.B. $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0$, $t, x \in \mathbb{R}$), es treten also partielle Ableitungen auf.

- **Ordnung einer DGL**: Die Ordnung einer DGL richtet sich nach der höchsten Ableitung. (z.B. ist $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = 0$ eine partielle DGL zweiter Ordnung)

- **linear vs. nichtlinear** (semilinear, quasilinear, (echt) nichtlinear):

  linear: Die DGL ist in der Lösung und ihren Ableitungen linear. (z.B. $u'(t) = Au(t)$)

[2] zur Modellierung von HIV siehe Denise Kirschner, Using Mathematics to Understand HIV Immune Dynamics, Februar 1996, www.ams.org/notices/199602/kirschner.pdf

semilinear: Die höchste Ableitung kommt in der DGL linear vor, niedrigere Ableitungen können nichtlinear vorkommen. (z.B. $-\triangle u = u^2$)

quasilinear: Die höchste Ableitung der gesuchten Funktion kommt linear vor, kann aber nicht von niedrigeren Ableitungen getrennt werden, d.h. die DGL kann nicht in explizite Form gebracht werden. (z.B. $a(x,t,u(x,t))\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + b(x,t,u(x,t))\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0$)

nichtlinear: Die höchste Ableitung kommt nichtlinear vor. (z.B. $((u'(x))^{\frac{1}{2}}u'(x))' = f(x)$)

Wie im ersten Beispiel gesehen, kann es noch zusätzliche Bedingungen, die sog. Randbedinungen an die Lösung u einer Differentialgleichung geben. Auch hier unterscheidet man verschiedene Typen. Gegeben sei der Definitionsbereich dom u der reellen Funktion u. Seien a, $b \in \partial(\text{dom } u)$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ und c_a, $c_b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann heißen Randbedingungen der Gestalt

- $u(a) = \alpha$ und $u(b) = \beta$ Dirichletsche Randbedingungen,
- $u'(a) = \alpha$ und $u'(b) = \beta$ Neumannsche Randbedingungen,
- $c_a + u'(a) = \alpha$ und $c_b + u'(b) = \beta$ Robinsche Randbedingungen,
- $u(a) = u(b)$ und $u'(a) = u'(b)$ periodische Randbedingungen.
- Treten in $x = a$ und $x = b$ verschiedene Randbedingungen auf, so spricht man von gemischten Randbedingungen.

Beispiele. Wir betrachten noch einmal die einführenden Beispiele.

- Die Plattengleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung.
- Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System von semilinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
- Die Euler-Gleichungen sind ein System von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.
- Die Black-Scholes-Gleichung ist eine explizite lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- Das SIR-Modell ist ein nichtlineares gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

1. Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

In einfachen Fällen kann man die Lösung(en) einer Differentialgleichung explizit bestimmen und ausrechnen. Wir wollen hier die wichtigsten Lösungsmethoden und Ideen vorstellen.

1.1. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.

Zunächst betrachten wir einige

Beispiele.

- Seien u_0, t_0, $\lambda \in \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t), \quad t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

  gegeben, wobei die Funktion $u : [t_0, \infty] \mapsto \mathbb{R}$ gesucht ist. Die Lösung ist

$$u(t) = e^{\lambda(t-t_0)} u_0.$$

  Für $\lambda > 0$ kann man mit (1.1) das Wachstum von Bakterien im Anfangsstadium modellieren, für $\lambda < 0$ den radioaktiven Zerfall.

- Mit dem folgenden AWP kann man z.B. Schwingungen modellieren:

$$\begin{cases} u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases}$$

  wobei $p, q, u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Um eine Lösung zu finden, verwenden wir den e-Ansatz: Wir vermuten, dass die Lösung eine Linearkombination von Exponentialfunktionen ist. Dazu betrachten wir das charakteristische Polynom (wir setzen unseren Ansatz in die DGL ein)

$$(\lambda^2 + p\lambda + q) \cdot \underbrace{e^{\lambda t}}_{>0} = 0$$

  und erhalten für λ die Lösungen $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Nun haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

  (1) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Dann bilden $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ ein Fundamentalsystem von linear unabhängigen Lösungen. Die allgemeine Lösung ist damit durch

$$u(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

  gegeben, wobei die Konstanten A, B durch die Anfangswerte u_0, v_0 zu bestimmen sind.

  (2) $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$: Dann bilden $u_1(t) = e^{\lambda t}$ und $u_2(t) = te^{\lambda t}$ ein linear unabhängiges Fundamentalsystem. Die Lösung ist damit durch

$$u(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$$

gegeben, wobei A und B wieder durch die Anfangswerte zu bestimmen sind.

(3) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: Dann sind λ_1 und λ_2 konjugiert komplex zueinander, also $\lambda_1 = a + \mathbf{i}b$ und $\lambda_2 = a - \mathbf{i}b$, und wir erhalten mit $u_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{at}(\cos bt + \mathbf{i}\sin bt)$ und $u_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{at}(\cos(-bt) + \mathbf{i}\sin(-bt)) = e^{at}(\cos bt - \mathbf{i}\sin bt)$ ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist damit durch

$$u(t) = e^{at}((A+B)\cos bt + (A-B)\mathbf{i}\sin bt)$$

gegeben; A und B sind durch die Anfangswerte zu bestimmen.

Superpositionsprinzip. Für die Lösung des letzten Beispiels haben wir das Superpositionsprinzip benutzt: Seien X, Y lineare Räume über $\mathbb{R}$ und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung, $u \in X$ und $f \in Y$. Gegeben sei das Problem

$$Au = f, \tag{1.2}$$

wobei (1.2) für $f \equiv 0$ *homogenes Problem* und für $f \neq 0$ *inhomogenes Problem* genannt wird. Das Superpositionsprinzip besagt:

- Seien u, v Lösungen des homogenen Problems. Dann ist auch eine Linearkombination von u und v eine Lösung des homogenen Problems, denn $A(\lambda u + \mu v) = \lambda \underbrace{A(u)}_{=0} + \mu \underbrace{A(v)}_{=0} = 0$ für alle $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in X$.
- Seien u_{hom} eine Lösung des homogenen Problems und u_p eine (partikuläre) Lösung des inhomogenen Problems, dann ist auch $u_{hom} + u_p$ eine Lösung des inhomogenen Problems, denn $A(u_{hom} + u_p) = \underbrace{A(u_{hom})}_{=0} + \underbrace{A(u_p)}_{=f} = f$.

Reduktion der Ordnung. Eine weitere grundlegende Technik ist die folgende: Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + a_{n-2}u^{(n-2)} + ... + a_1 u^{(1)} + a_0 u = f$$

kann man in ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung überführen. Hierzu führen wir n neue Variablen ein, $v_0 := u$, $v_1 := u^{(1)}$, ...,$v_{n-1} := u^{(n-1)}$, und erhalten das System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix},$$

wir haben also ein System der Form

$$\frac{d}{dt}\vec{v} + A\vec{v} = \vec{b}$$

zu lösen, wobei eine Matrix der Form von A *Frobeniussche Begleitmatrix* heißt.

Die homogene Gleichung. Wir wollen uns nun intensiver mit dem homogenen Problem

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + a_{n-2}u^{(n-2)} + ... + a_1u^{(1)} + a_0u = 0$$

beschäftigen. Wie bemerkt, wird für das Lösen des homogenen Problems das Superpositionsprinzip verwendet. Wir suchen n linear unabhängige Lösungen $u_1, u_2, ..., u_n$. Dann ist $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes, ein sogenanntes *Fundamentalsystem.* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ heißt *linear unabhängig*, wenn gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \equiv 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \text{für alle } k \in \{1, ..., n\}.$$

Äquivalent dazu, kann man auch überprüfen, ob

$$W(x_0) := \det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1^{(1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(1)}(x_0) \\ \vdots & \cdots & \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

für ein beliebiges x_0. A heißt *Wronskideterminante.* Dann ist die allgemeine Lösung des homogegen Problems durch

$$u_{allg} = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$$

mit $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wie findet man nun ein solches Fundamentalsystem? Dazu haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

- **konstante Koeffizienten**. Es sei die Differentialgleichung

  $$u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + ... + a_1u^{(1)}(x) + a_0u(x) = 0,$$

  gegeben, wobei $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Durch das Auffinden der Nullstellen λ_i $(i = 1, ..., n)$des charakteristischen Polynoms

  $$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$

  erhält man ein Fundamentalsystem: Für einfache Nullstellen λ_i nimmt man die Funktion $e^{\lambda_i t}$ und für μ-fache Nullstellen λ_i nimmt man die Funktionen $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, t^2e^{\lambda_i t}, ..., t^{\mu-1}e^{\lambda_i t}$. Z.B. besitzt die DGL

  $$u'''(x) + 5u''(x) + 3u'(x) - 9u(x) = 0$$

  das Fundamentalsystem $\{e^{-t}, e^{3t}, te^{3t}\}$.

- **nichtkonstante Koeffizienten**. Zunächst betrachten wir eine DGL erster Ordnung:

  $$u'(t) + a(t)u(t) = 0.$$

  Diese können wir umstellen, $u'(x) = -a(x)u(x)$, und erhalten als Lösung

  $$u(t) = c \cdot \exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

  für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$.

Ist eine DGL höherer Ordnung gegeben, so verwendet man Das Reduktionsverfahren von D' ALEMBERT um die Ordnung der DGL zu reduzieren. Dazu benötigt man eine schon bekannte Lösung. Dies sei an einem Beispiel erklärt: Gegeben sei eine DGL 2. Ordnung

$$u''(x) + pu'(t) + qu(t) = 0 \tag{1.3}$$

und u_1 eine Lösung, die nicht die Null-Lösung ist, von (1.3). Um eine weitere Lösung $u_2(x)$ zu finden verwenden wir den Ansatz

$$u_2(x) = u_1(x) \cdot \int_{x_0}^{x} v(\xi) d\xi.$$

Setzt man dies in (1.3) ein so erhält man eine um eine Ordnung reduzierte DGL, eine DGL erster Ordnung.

Beispiel. Gegeben sei die Legendre-Differentialgleichung

$$u''(t) - \frac{2t}{1-t^2} u'(t) + \frac{2}{1-t^2} u(t) = 0, \quad t \in]0,1[. \tag{1.4}$$

Raten oder genaues Hinsehen liefert die Lösung $u_1(t) = t$ und der Ansatz

$$\begin{aligned} u_2(t) &= t \int_{t_0}^{t} v(\xi) d\xi \\ u_2'(t) &= \int_{t_0}^{t} v(\xi) d\xi + tv(t) \\ u_2''(t) &= v(t) + v(t) + tv'(t) \end{aligned}$$

in (1.4) eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} 0 &= 2v(t) + tv'(t) - \frac{2t}{1-t^2} \left(\int_{t_0}^{t} v(\xi) d\xi + tv(t) \right) + \frac{2}{1-t^2} \left(t \int_{t_0}^{t} v(\xi) d\xi \right) \\ &= tv'(t) + 2v(t) - \frac{2t^2}{1-t^2} v(t) \\ &= tv'(t) + \frac{2-4t^2}{1-t^2} v(t). \end{aligned}$$

Damit ist eine DGL erster Ordnung gegeben:

$$v'(t) = \left(\frac{2t}{1-t^2} - \frac{2}{t} \right) v(t)$$

und die können wir lösen:

$$\begin{aligned} v(t) &= c \cdot \exp \left(\int_{t_0}^{t} \left(\frac{2\xi}{1-\xi^2} - \frac{2}{\xi} \right) d\xi \right) \\ &= c \cdot \exp \left((-\ln(1-\xi) - 2\ln(\xi)) \big|_{t_0}^{t} \right) \\ &= c \cdot \exp \left(\ln(t^{-2}(1-t^2)^{-1}) \right) \\ &= \frac{c}{t^2(1-t^2)} \end{aligned}$$

Der obige Ansatz liefert weiter

$$u_2(t) = t \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\xi^2 (1-\xi^2)} d\xi$$

und mit Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$u_2(t) = -1 + \frac{t}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + ct.$$

Die inhomogene Gleichung (Variation der Konstanen/ Prinzip von Duhamel). Zunächst behandeln wir wieder eine DGL erster Ordnung

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t).$$

Die Lösung ergibt als

$$u(t) = \exp(-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau)u_0 + \int_{t_0}^t \exp(\int_s^t -a(\tau)d\tau)b(s)ds,$$

bei konstantem Koeffizient $a \equiv const$ ist

$$u(t) = e^{-a(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)}b(s)ds.$$

Beispiele.

- Betrachte das AWP erster Ordnung

$$\begin{cases} u'(t) - tu(t) = e^{\frac{1}{2}t^2+t} \\ u(0) = 2 \end{cases}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(\underbrace{+\int_0^t \tau d\tau}_{=\frac{1}{2}t^2})2 + \int_0^t \exp(\underbrace{+\int_s^t \tau d\tau}_{=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}s^2})\cdot\exp(\frac{1}{2}s^2+s)ds. \\ &= 2\exp(\frac{1}{2}t^2) + \int_0^t \exp(\frac{1}{2}t^2+s)ds \\ &= 2e^{\frac{1}{2}t^2} + e^{\frac{1}{2}t^2}(e^t-1) \\ &= (e^t+1)e^{\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

Warum heißt das Prinzip "Variation der Konstanten"? Die Lösung des homogenen Systems

$$u'(t) - tu(t) = 0.$$

ist durch

$$u_{hom}(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}c$$

gegeben. Benutze nun u_{hom} als Ansatzfunktion für das inhomogene System und betrachte die Konstante c als Funktion in t, also

$$u_p(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Setze u_p in das homogene System ein ($u_p' = c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + c(t)te^{\frac{1}{2}t^2}$):

$$c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + \underbrace{c(t)te^{\frac{1}{2}t^2} - c(t)te^{\frac{1}{2}t^2}}_{=0} = e^{\frac{1}{2}t^2+t} = e^{\frac{1}{2}t^2}e^t$$

Damit ist $c'(t) = e^t$, $c(t) = e^t + c$ und für die Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich

$$u(t) = (e^t+c)e^{\frac{1}{2}t^2}$$

und mit der Anfangsbedingung haben wir die Lösung des AWP:

$$u(t) = (e^t + 1)e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

- Betrachte die DGL zweiter Ordnung

$$u''(t) - 5u'(t) + 6u(t) = 1 + t^2.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und damit ist

$$u_{hom}(t) = ce^{2t} + de^{3t}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung u ergibt sich nun, indem man die Koeffizienen der Lösung der homogenen Gleichung als Funktion in t betrachtet (Variation der Konstanten):

$$\begin{aligned} u_p(t) &= c(t)e^{2t} + d(t)e^{3t} \\ u_p'(t) &= c'(t)e^{2t} + 2c(t)e^{2t} + d'(t)e^{3t} + 3d(t)e^{3t} \end{aligned}$$

Nun haben wir zwei Unbekannte, aber nur eine Gleichung, d.h. wir können eine Bedingung geschickt wählen: Es soll gelten

$$c'(t)e^{2t} + d'(t)e^{3t} = 0,$$

wir haben also $c'(t) = -d'(t)e^t$. Wir setzen

$$u_p''(t) = 2c'(t)e^{2t} + 4c(t)e^{2t} + 3d'(t)e^{3t} + 9d(t)e^{3t}$$

in die DGL ein:

$$\begin{aligned} 1 + t^2 &= 2c'(t)e^{2t} + 4c(t)e^{2t} + 3d'(t)e^{3t} + 9d(t)e^{3t} - \\ &\quad -5[c'(t)e^{2t} + 2c(t)e^{2t} + d'(t)e^{3t} + 3d(t)e^{3t}] + \\ &\quad +6[c(t)e^{2t} + d(t)e^{3t}] \\ \Rightarrow \quad 1 + t^2 &= -3c'(t)e^{2t} - 2d'(t)e^{3t} \end{aligned}$$

Mit der gewählten Bedingung ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 + t^2 &= 3d'(t)e^{3t} - 2d'(t)e^{3t} \\ &= d'(t)e^{3t} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} d'(t) &= \frac{1 + t^2}{e^{3t}}, \\ c'(t) &= -\frac{1 + t^2}{e^{2t}}. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{1}{27}e^{-3t}(9t^2 + 6t + 11) \\ c(t) &= \frac{1}{4}e^{-2t}(2t^2 + 2t + 3) \end{aligned}$$

also

$$u(t) = \frac{1}{6}t^2 + \frac{5}{18}t + \frac{37}{108}.$$

- **Ansatz der rechten Seite**: Wir lösen die letzte Aufgabe noch einmal auf eine andere Art. Idee: Die Lösung einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung sieht oft wie die rechte Seite aus. Hier ist die rechte Seite ein Polynom zweiten Grades, also wählen wir als Ansatzfunktion
$$u_p(t) = a + bt + ct^2.$$
Einsetzen von u_p in die DGL ergibt
$$6ct^2 + (6b - 10c)t + 2c - 5b + 6a = 1 + t^2.$$
Ein Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite liefert die Bedingungen $6c = 1$, $6b - 10c = 0$, $2c - 5c + 6a = 1$ also $c = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{8}$, $a = \frac{37}{108}$.

- **Potenzreihenansatz**. Wir nehmen an, dass sich die Lösung der DGL
$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t) = r(t)$$
in eine Potenzreihe entwickeln lässt, also
$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k.$$
Konkret sei das AWP
$$\begin{cases} u''(t) + (t^2 + 1)u(t) = 0 \\ u(1) = 1 \\ u'(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
gegeben. Wir entwickeln in $t_0 = 1$, da wir wollen, dass die Potenzreihe der Differentialgleichung in einer Umgebung von 1 konvergiert (Beachte die AB!). Den Koeffizienten entwickeln wir ebenfalls in eine Potenzreihe
$$(t^2 + 1) = 2 + 2(t - 1) + (t - 1)^2.$$
Die Ableitungen
$$\begin{aligned} u'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (t - t_0)^{k-1} \\ u''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k^2 (t - t_0)^{k-2} \end{aligned}$$
setzen wir in die DGL ein und formen um (Indexverschiebung). Dann haben wir
$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{\infty} (t-1)^k [a_{k+2}(k+2)(k+1) + 2a_k + 2a_{k-1} + a_{k-2}] + \\ &\qquad + \underbrace{2a_2 + 2a_0}_{(*)} + (t-1)\underbrace{(6a_3 + 2a_1 + 2a_0)}_{(**)} = 0 \end{aligned}$$
Wir haben nur eine Gleichung aber mehrere Unbekannte: zwei Koeffizienten erhalten wir durch die Anfangsbedingungen
$$\begin{aligned} u(1) &= a_0 = 1, \\ u'(1) &= a_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

und mit $(*)$ haben wir $a_2 = -a_0 = -1$, mit $(**)$ $a_3 = ...$ Nun können weitere Koeffizienten rekursiv berechnen werden und man bekommt eine beliebig gute Approximation an die Lösung.

1.2. Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen.

Lösungsmethoden: Raten, Bücher, Trennung der Veränderlichen.

Trennung der Veränderlichen. Die Methode "Trennung der Veränderlichen" funktioniert nicht für beliebige nichtlineare DGL, sie muss von der Form

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

sein. Zusätzlich fordern wir, dass $g(y(x)) \neq 0$ für alle x für die die Lösung definiert sein soll. Dann können wir umstellen

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx &= \int_{x_0}^{x} f(t)dt \\ \Rightarrow_{z=y(x)} \quad \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{g(z)} &= \int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{aligned}$$

und haben die Lösung in impliziter Form gegeben.

Beispiel. Betrachte das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{|u(t)|} & t > 0 \\ u(t_0) = u_0 & u_0 > 0 \end{cases}$$

also $f(t) \equiv 1$, $g(u(t)) = \sqrt{|u(t)|} > 0$ und

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{dz}{\sqrt{|z|}} = \int_{t_0}^{t} dx.$$

In einer Umgebung von $u_0 > 0$ ist $z > 0$ und es gilt

$$2\sqrt{z}\ |_{u_0}^{u(t)} = x\ |_{t_0}^{t}$$

und damit

$$u(t) = \frac{1}{4}(t + 2\sqrt{u_0} - t_0)^2.$$

Exakte Differentialgleichungen. Ein weiterer spezieller Typ einer Differentialgleichung ist die exakte Differentialgleichung:

Definition 1.1. (exakte DGL) Die Differentialgleichung

$$y'(t) = -\frac{f(t,y)}{g(t,y)} \tag{1.5}$$

heißt exakt, falls es eine Funktion $z(t,y)$ gibt mit $f(t,y) = \frac{\partial}{\partial t} z(t,y)$ und $g(t,y) = \frac{\partial}{\partial y} z(t,y)$.

Eine einfache notwendige Bedingung, dass eine DGL exakt ist, bekommt man wie folgt: Wir suchen glatte Lösungen, die gemischten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial t \partial y}$, $\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial y \partial t}$ sind damit gleich. Die Bedingung lautet damit

$$(\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial t \partial y} =) \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(t,y)}{\partial t} \; (= \frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial y \partial t}).$$

Eine implizite Lösung ist dann durch $z(t,y) = c = const$ gegeben.

Beispiel. Gegeben sei das AWP

$$\begin{aligned} y'(x,y) &= -\frac{2xy^3}{3x^2y^2-2} \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist exakt, denn mit $f(x,y) := 2xy^3$, $g(x,y) := 3x^2y^2 - 2$ ist $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(t,y)}{\partial t} = 6xy^2$. Wir integrieren $\frac{\partial z}{\partial x} = f$ nach x: $z(x,y) = x^2y^3 + c(y)$, und setzen z in $\frac{\partial z}{\partial y} = g$ ein:

$$(\frac{\partial z}{\partial y} =) \quad 3x^2y^2 + c'(y) =_! 3x^2y^2 - 2 \quad (= g)$$

also $c'(y) = -2$, $c(y) = -2 + c$ und mit

$$z(x,y) = x^2y^3 - 2y = c$$

haben wir eine implizite Darstellung einer Lösung gegeben. Dies überprüfen wir noch:

$$z'(x, y(x)) = 2xy(x)^3 + 3x^2y(x)^2y'(x) - 2y'(x) = 0$$

und umstellen ergibt

$$y'(x) = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2-2}.$$

Ist die DGL $y'(t) = -\frac{f(t,y)}{g(t,y)}$ nicht exakt und kann man $\mu(x,y)$ finden, so dass

$$y'(t) = -\frac{\mu(x,y)}{\mu(x,y)}\frac{f(t,y)}{g(t,y)} \tag{1.6}$$

exakt ist, so heißt $\mu(x,y)$ *integrierender Faktor*. Notwendige Bedingung für die Exaktheit von (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial y}\mu &= \frac{\partial \mu}{\partial x} g + \frac{\partial g}{\partial x} = \mu \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} f - \frac{\partial \mu}{\partial x} g + \mu(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}) &= 0 \end{aligned}$$

Die Bedingung ergibt eine partielle Differentialgleichung, die i.A. schwieriger zu lösen ist als eine gewöhnliche DGL.

Beispiel.

$$y'(x,y) = -\frac{x^2-y}{x^2y^2+x} \tag{1.7}$$

ist nicht exakt. Einsetzen von $f(x,y) := x^2 - y$ und $g(x,y) := x^2y^2 + x$ in die notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)(x^2-y) - \frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y) + \mu(-1-2xy^2-1) = 0.$$

Nun versuche aus dieser Bedingung ein μ zu konstruieren, so dass (1.7) exakt wird. Um es einfacher zu machen nehmen wir an, dass $\frac{\partial\mu}{\partial y}x^2y = 0$. Dann ist $\frac{\partial\mu}{\partial x}(x^2y^2+x) = \mu(-2-2xy^2)$ und

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial x} &= \mu(x)\frac{-2(1+xy^2)}{x+x^2y^2}\\ &= \mu(x)\frac{-2(1+xy^2)}{x(1+xy^2)}\\ &= \mu(x)(-\frac{2}{x}).\end{aligned}$$

Wir haben also $\mu'(x) = -\frac{2}{x}\mu(x)$. Dies können wir mit der Formel von Duhamel lösen:

$$\mu(x) = \exp(-\int_{x_0}^{x}\frac{2}{\tau}d\tau) = \frac{1}{x^2}\tilde{c}.$$

Die Konstante wählen wir beliebig $\tilde{c} = 1$. Damit haben wir dann eine exakte Differentialgleichungen

$$y'(x,y) = \frac{1-\frac{y}{x^2}}{y^2+\frac{1}{x}}.$$

1.3. **Das Charakteristikenverfahren für quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.**

Wir betrachten alles zweidimensional, damit wir auch geometrische Überlegungen anstellen können. Sei das Cauchy-Problem

$$\begin{cases}u_t + a(x,t,u)u_x = g(x,t,u) & x \in \mathbb{R}, t > 0\\ u(x,0) = u_0(x)\end{cases}$$

gegeben. Betrachte nun die Lösungen des Cauchy-Problems enlang einer Kurve $x_c(t)$: $\mathcal{U}(t) = u(x_c(t),t)$ (Ansatz), $x_c(t)$ heißt *Charakteristik*. Dann ist

$$\mathcal{U}'(t) = (u(x_c(t),t))' = u_t + u_x x_c'(t) =_! g(x,t,u).$$

Damit haben wir ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{cases}x_c'(t) = a(x,t,u) = a(x_c(t),t,\mathcal{U})\\ \mathcal{U}'(t) = g(x,t,u) = g(x_c(t),t,\mathcal{U}(t))\end{cases} \tag{1.8}$$

Beispiele.

- $u_t + 4u_x = 0$. Einsetzen in (1.8) ergibt $x_c'(t) = 4$ und $\mathcal{U}'(t) = 0$. Damit $x_c(t) = 4t + c = 4t + x_c(0)$, $\mathcal{U}(t) = \tilde{c} = \mathcal{U}(0)(= u(x_c(0),0) = u_0(x_c(0)))$. Die Lösung ist also auf der Kurve $x_c(t)$ konstant. Für beliebige (x,t) suchen wir $u(x,t)$. (x,t) liegt auf genau einer Charakteristik x_c. Also $x = x_c(t) = 4t + x_c(0) \Rightarrow x_c(0) = x - 4t$. Für die Lösung ergibt sich

$$u(t,x) = u(x_c(t),t) = \mathcal{U}(t) = u_0(x_c(0)) = u_0(x-4t).$$

1.4. Grundtypen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Eine partielle Differentialgleichung hängt nunmehr von zwei Variablen ab, damit auch die gesuchte Funktion u. Eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat im zweidimensionalen Fall die Form

$$\begin{cases} \underbrace{a(x,y)u_{xx}(x,y) + 2b(x,y)u_{xy}(x,y) + c(x,y)u_{yy}(x,y)}_{\text{Hauptteil der partiellen DGL}} + \\ \quad +d(x,y)u_x(x,y) + e(x,y)u_y(x,y) + g(x,y)u(x,y) = f(x,y) \end{cases} \tag{1.9}$$

Mit der Gestalt des Hauptteils der partiellen Differentialgleichung entscheidet sich, von welchem Typ sie ist: Für

$$D(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) \quad \begin{cases} > 0 & \text{heißt (1.9) hyperbolisch} \\ = 0 & \text{heißt (1.9) parabolisch} \\ < 0 & \text{heißt (1.9) elliptisch} \end{cases}$$

Beispiele.

- Die Laplace-Gleichung
$$-\triangle u = 0,$$
die Poisson-Gleichung
$$-\triangle u = f$$
und die Helmholtz-Gleichung
$$-\triangle u + ku = f$$
sind wegen $-\triangle u = -u_{xx} - u_{yy}$ und damit $a \equiv -1$, $b \equiv 0$ und $c \equiv -1$ elliptisch.

- Die Wärmeleitungs-/ Diffusionsgleichung
$$u_t - \mu\triangle u = 0, \quad \mu > 0$$
ist wegen $a \equiv -\mu$ und $b \equiv c \equiv 0$ parabolisch.

- Die Wellengleichung
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
ist wegen $a \equiv -c^2$, $b \equiv 0$ und $c \equiv 1$ hyperbolisch.

Die schwingende Saite. Wir wollen uns jetzt mit der Wellengleichung in einer Raumdimension genauer auseinandersetzen und erweitern sie zu einem Anfangs-Randwertproblem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in]0, L[, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]0, L[\\ u_t(x,0) = v_0(x) & x \in]0, L[\end{cases} \tag{1.10}$$

Die Homogenität in der Wellengleichung bedeutet, dass keine äußere Kraft auf die Saite wirkt; andernfalls wäre $f \neq 0$. Die Randbedingungen modellieren, dass die Saite der Länge L am rechten und linken Ende fest eingespannt ist (die Auslenkund u ist für alle Zeiten $t > 0$ gleich 0). Die erste Anfangsbedingung gibt die Anfangsauslenkung und die zweite die Anfangsgeschwindigkeit der Saite an.

Wir wollen das Problem (1.10) lösen und verwenden dazu den Separationsansatz, d.h. wir vermuten die Lösung von der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$, und das Prinzip der Superposition. Dazu setzen wir den Separationsansatz in die Wellengleichung ein,

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0,$$

und erhalten

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = const = -\lambda^2.$$

Daraus ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T''(t) = -\lambda^2 T(t),$$
$$X''(t) = -\lambda^2 X(t)$$

mit den für unser Problem sinnvollen Lösungen

$$\begin{aligned} T(t) &= A\sin(\lambda t) + B(\cos\lambda t), \\ X(x) &= C\sin(\lambda x) + D(\cos\lambda x). \end{aligned}$$

So haben wir

$$u(t,x) = \left(C\sin(\lambda x) + D(\cos\lambda x)\right)\left(A\sin(\lambda t) + B(\cos\lambda t)\right).$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen beziehen wir die Randbedingungen mit ein:

$$u(0,t) = D\left(A\sin(\lambda t) + B(\cos\lambda t)\right) =_! 0, \quad \text{für alle } t > 0.$$

Dabei ist $A\sin(\lambda t) + B(\cos\lambda t) \neq 0$, falls $A, B \neq 0$. Wenn $A = B = 0$ gelten soll, würde die Lösung nicht mehr von der Zeit t abhängen; das wäre physikalisch unsinnig, deshalb $D = 0$. Für die zweite Randbedingung ergibt sich mit derselben Überlegung, dass

$$C\sin(\lambda L) =_! 0.$$

Ist $C = 0$, so wäre wegen $D = 0$ die Lösung nicht mehr vom Ort abhängig. Auch dies wäre für unser Problem unsinnig, deshalb $\sin(\lambda L) = 0$, also $\lambda = \frac{k\pi}{L}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nun haben wir als Lösung die Überlagerung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{k\pi}{L}x)\left(\underbrace{\tilde{A}_k}_{=A\cdot C}\sin(\frac{k\pi}{L}t) + \underbrace{\tilde{B}_k}_{=B\cdot C}\cos(\frac{k\pi}{L}t)\right)$$

Die $\tilde{A}_k$ und $\tilde{B}_k$ bestimmen wir noch mit den Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) =_! u_0(x)$$

ergibt

$$\tilde{B}_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx$$

und

$$u'(x,0) = \frac{\pi}{L}\sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{A}_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) =_! v_0(x)$$

ergibt

$$\tilde{A}_k = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{L}{k\pi} v_0(x)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx.$$

Wärmeleitgleichung. Auch hier interessieren wir uns für eine Lösung und erweitern sie zu einem Anfangs-Randwertproblem:

$$\begin{cases} u_t - \mu u_{xx} = 0 & x \in]0,L[,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{für alle } t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]0,L[\end{cases} \tag{1.11}$$

wobei die Randbedingung bedeutet, dass der Körper für alle Zeiten $t > 0$ auf konstante Temperatur gehalten wird. Die Anfangsbedingung beschreibt die Anfangswärmeverteilung. Die homogene Wärmeleitgleichung modelliert, dass keine äußere Wärmequelle vorhanden ist. Mit diesem Modell wird lediglich die Veränderung der Wärmeverteilung in einem Körper unersucht, ohne dass äußere Faktoren wie Außentemperatur, Kühlung durch Wasser oder Erhitzen durch Schweißen eine Rolle spielen.

Zur Lösung von (1.11) verwenden wir wieder den Separationsansatz: Der Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ führt zu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = const = -\lambda$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-\lambda t}, \\ X(x) &= A\sin(\lambda x) + B(\cos\lambda x). \end{aligned}$$

Die Einarbeitung der Randbedingungen führt auf die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \mu t\right) \tilde{A}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

und mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) =_! u_0(x)$$

werden wieder die $\tilde{A}_k$ bestimmt.

2. Existenz- und Einzigkeitsaussagen bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen

Vereinbarung: In dieser Vorlesung werden nur Banachräume über dem Körper der reellen Zahlen betrachtet.

2.1. Integral für stetige Funkionen einer reellen Veränderlichen mit Werten in einem Banachraum.

Sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum und $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, ein abgeschlossenes Intervall. Betrachte $u : [a,b] \to X$, $t \mapsto u(t) \in X$.[3]

Beispiele (für Banachräme).

- $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$.
- $X = C([c,d])$. $u(t) \in C([c,d])$, d.h. $u(t) = \tilde{u}(t,x)$.
- $X = l^1$ - Raum der summierbaren Zahlenfolgen, d.h. $v = (v_1, v_2, ...) \in l^1$, falls $||v||_{l^1} := \sum_{i=1}^{\infty} |v_i| < \infty$.

  Sei $u(t) = (1, t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}, ..., \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}, ...)$, also $u_i(t) = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}$. Offenbar gilt $u(t) \in l^1$für alle $t \in [0,T]$, $T > 0$ beliebig, denn
  $$||u(t)||_{l^1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = e^t \leq e^T < \infty.$$
  Sei $T > 0$. Dann ist $u : [0,T] \to l^1$ auf $[0,T]$ stetig, denn
  $$\begin{aligned} ||u(\bar{t}) - u(\bar{\bar{t}})||_{l^1} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\bar{t}^{i-1} - \bar{\bar{t}}^{i-1}|}{(i-1)!} \\ &\leq |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{|\bar{\bar{\bar{t}}}^{i-2}|}{(i-2)!}}_{=e^{\bar{\bar{\bar{t}}}} \leq e^T} \to 0 \text{ für } \bar{t} \to \bar{\bar{t}}. \end{aligned}$$

Sei $u : [a,b] \to X$ auf $[a,b]$ stetig, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $t_k^{(n)} = a + k\frac{b-a}{n}$ eine äquidistante Zerlegung von $[a,b]$. Definiere nun eine Treppenfunktion[4] , $u^{(n)} : [a,b] \to X$ durch
$$u^{(n)}(t) := \begin{cases} u(t_k^{(n)}) & t \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}[, \ k = 0, 1, ..., n-1 \\ u(t_{n-1}^{(n)}) & t = b \end{cases}$$

[3]zur Erinnerung: u ist in $\bar{t} \in [a,b]$ stetig, falls gilt
$$\forall_{\epsilon > 0} \quad \exists_{\delta = \delta(\epsilon, \bar{t})} \quad \forall_{\bar{\bar{t}} \in [a,b] : |\bar{\bar{t}} - \bar{t}| < \delta} : \quad ||u(\bar{\bar{t}}) - u(\bar{t})||_X < \epsilon.$$
Dabei soll $||.||_X$ die Norm des Banachraumes X sein. Da $[a,b]$ kompakt, folgt aus der Stetigkeit von u für alle $\bar{t} \in [a,b]$ die gleichmäßige Stetigkeit von u auf $[a,b]$.

[4]Beachte, dass die Definition von $u^{(n)}$ so nur wegen u auf $[a,b]$ stetig geht.

Lemma 2.1. *Sei $u \in C([a,b],X)$. Die Folge zugehöriger Treppenfunktionen $\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben definiert, konvergiert punktweise gegen u, d.h.*

$$\forall_{t\in[a,b]}:\ u^{(n)}(t) \to u(t) \text{ in } X,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} ||u^{(n)}(t) - u(t)|| = 0.$$

Beweis. ... als Übungsaufgabe. □

Lemma 2.2. *(Definition des Integrals) Sei $u \in C([a,b],X)$. Es existiert ein $g \in X$, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} ||\sum_{k=1}^{n} u(t_{k-1}^{(n)}) \cdot (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) - g||_X = 0.$$

Der Grenzwert $g \in X$ heißt Integral von $t = a$ bis $t = b$ über $u(t)$. Notation $g := \int_a^b u(t)dt = -\int_b^a u(t)dt$.

Beweis. Sei $g_n := \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} u(t_{k-1}^{(n)}) \in X$. Wir wollen zeigen: $\{g_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in X (dann haben wir wegen der Vollständigkeit von X, dass $\lim g_n = g \in X$ existiert).

O.B.d.A. sei $m > n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
g_m - g_n &= \frac{b-a}{mn}\Big(n\sum_{k=1}^{m} u(t_{k-1}^{(m)}) - m\sum_{k=1}^{n} u(t_{k-1}^{(n)})\Big) \\
&= \frac{b-a}{mn}\Big[\underbrace{u(t_0^{(m)}) + ... + u(t_0^{(m)})}_{n\text{-mal}} + ... + \underbrace{u(t_{m-1}^{(m)}) + ... + u(t_{m-1}^{(m)})}_{n\text{-mal}} - \\
&\quad -(\underbrace{u(t_0^{(n)}) + ... + u(t_0^{(n)})}_{m\text{-mal}}) - ... - (\underbrace{u(t_{n-1}^{(n)}) + ... + u(t_{n-1}^{(n)})}_{m\text{-mal}})\Big].
\end{aligned}$$

Wir nummerieren nun von $l = 0$ bis $m \cdot n - 1$ um, sodass an der l-ten Stelle die Differenz $u(t_{[l/n]}^{(m)}) - u(t_{[l/m]}^{(n)})$ auftaucht. Dabei ist

$$\begin{aligned}
|t_{[l/n]}^{(m)} - t_{[l/m]}^{(n)}| &= |\frac{b-a}{m}[l/n] - \frac{b-a}{n}[l/m]| \\
&= \frac{b-a}{nm}|[l/n]n - [l/m]m| \\
&\le \frac{b-a}{nm}(l - (l-1)) \\
&= \frac{b-a}{nm}.
\end{aligned}$$

Da u auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $m, n \ge n_0$ gilt

$$|t_{[l/n]}^{(m)} - t_{[l/m]}^{(n)}| < \frac{b-a}{mn}\ (< \delta) \ \Rightarrow\ ||u(t_{[l/n]}^{(m)}) - u(t_{[l/m]}^{(n)})||_X < \epsilon.$$

Davon gibt es $m \cdot n$ Differenzen und damit ist

$$||g_m - g_n||_X \le \frac{b-a}{mn} mn\epsilon = (b-a)\epsilon.$$

□

Bemerkungen.

- Wegen der Stetigkeit von u kann man auch jede andere Zerlegung von $[a, b]$ wählen; das Integral ist unabhängig von der Zerlegung.
- Beachte, dass das Integral wieder in X liegt!
- Man kann das Integral auch weiter fassen, d.h. auch für nicht gleichmäßig stetige Funktionen definieren. Dieser Integralbegriff (Bochner-Integral) wird in der Vorlesung Differentialgleichungen II vorgestellt.

Beispiel. Wir betrachten noch einmal das Beispiel oben. Sei $u(t) = (1, t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}, ..., \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}, ...)$. Wir vermuten, dass

$$g := \int_0^T u(t)dt = (T, \frac{T^2}{2}, \frac{T^3}{6}, ..., \frac{T^i}{(i)!}, ...).$$

Dies beweisen wir. Definiere die Treppenfunktion

$$u^{(n)}(t) := (1, t_{k-1}^{(n)}, \frac{(t_{k-1}^{(n)})^2}{2}, ...), \quad t \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}[$$

mit $t_k^{(n)} = \frac{T}{n}k$. Dann ist

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{k=1}^{n} (1, \frac{T}{n}k, \frac{1}{2}(\frac{T}{n})^2 k^2, \frac{1}{6}(\frac{T}{n})^3 k^3, ...) \cdot \frac{T}{n} \\ &= (T, \frac{T^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k, \frac{1}{2}\frac{T^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2, \frac{1}{6}\frac{T^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3, ...) \\ &= (T, \frac{T^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}, \frac{1}{2}\frac{T^3}{n^3}\frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \frac{1}{6}\frac{T^4}{n^4}(\frac{n(n+1)}{2})^2, ...) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $||g_n - g||_{l^1} \to 0$, denn für die einzelnen Komponenten gilt $g_{n,i} \to g_i$.

Das so definierte Integral besitzt alle schönen Eigenschaften, die man von einem Integral erwartet:

Theorem 2.3. *(Eigenschaften des Integrals) Seien $u, v \in C([a, b], X)$. Dann gilt*

(1) *(Linearität)* $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} : \int_a^b (\alpha u(t) + \beta v(t))dt = \alpha \int_a^b u(t)dt + \beta \int_a^b v(t)dt$

(2) *(Dreiecksungleichung)* $|| \int_a^b u(t)dt|| \leq \int_a^b ||u(t)||dt$

(3) $\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)dt \in \overline{co}\{u(t) \in X : t \in [a, b]\}$,

(4) *Für alle $A : X \to Y$ linear und beschränkt, X, Y Banachräume gilt:*

$$A \int_a^b u(t)dt = \int_a^b Au(t)dt.$$

Bemerkungen.

- co ist die konvexe Hülle, also $co\{u(t) \in X : t \in [a,b]\} = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i u(t_i), n \in \mathbb{N}, t_i \in [a,b], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0,1]\}$. $\overline{co}$ ist der Abschluss von co bzgl. $||.||_X$, d.h. $\overline{co}$ enthält auch alle Grenzwerte von Folgen in co.

- $\overline{co}\{u(t) \in X : t \in [a,b]\} = co\{u(t) \in X : t \in [a,b]\}$. Da u stetig, ist $u([a,b])$ kompakt und nach dem Satz von Mazur[5] auch $co\ u([a,b])$.

- Ein Operator $A : X \to Y$ heißt beschränkt, wenn das Bild einer in X beschränkten Menge unter A in Y beschränkt ist. Ist A linear, so ist A beschränkt, genau dann wenn gilt

$$\exists_{c>0}\, \forall_{x \in X} : \ ||Ax||_Y \le c||x||_X .$$

Beweis. ad1) klar.

ad2) Es gilt

$$|| \int_a^b u(t)dt|| \le || \int_a^b u(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n u(t_{k-1}^{(n)})|| + \underbrace{||\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n u(t_{k-1}^{(n)})||}_{\le \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n ||u(t_{k-1}^{(n)})||} .$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich

$$0 \le || \int_a^b u(t)dt|| \le 0 + \int_a^b ||u(t)dt||.$$

(Wir haben benutzt: Falls $u : [a,b] \to X$ stetig, dann ist auch $t \mapsto ||u(t)||$ stetig.)

ad 3) Nach Definition des Integrals gilt

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)dt = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(t_{k-1}^{(n)})}_{\in \overline{co}\{u(t) \in X : t \in [a,b]\}} .$$

ad 4) Aus $u \in C([a,b],X)$ folgt $Au \in C([a,b],Y)$, denn

- $(Au)(t) := A(u(t))$ (punktweise definiert)
- $||Au(t) - Au(s)||_Y =_{A \text{ linear}} ||A(u(t) - u(s))||_Y \le_{A \text{ beschränkt}} c||u(t) - u(s)||$.

5

Theorem 2.4. *(Mazur) Sei $M \subset X$ eine relativ kompakte Menge. Dann ist auch $co\, X$ relativ kompakt.*

Also

$$\begin{aligned} A\int_a^b u(t)dt &= A\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n u(t_{k-1}^{(n)}) \\ &=_{A \text{ stetig}} \lim_{n\to\infty} A\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n u(t_{k-1}^{(n)}) \\ &=_{A \text{ linear}} \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n Au(t_{k-1}^{(n)}) \\ &= \int_a^b Au(t)dt. \end{aligned}$$

□

Theorem 2.5. *Sei $u \in C([a,b],X)$ für einen Banachraum $(X,||.||)$. Dann gilt*

(1) $\forall_{t\in[a,b]} : \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds = u(t)$, *wobei für $t=a$ der rechtsseitige und für $t=b$ der linksseitige Grenzwert zu nehmen ist.*

(2) $\forall_{t\in[a,b]} : \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} ||u(s)-u(t)||ds = 0$, *wobei u außerhalb von $[a,b]$ mit 0 fortgesetzt sei.*

(3) $\lim_{h\to 0}\int_a^b ||u(t+h)-u(t)||dt = 0.$

Beweis. ad 1) Es gilt

$$\begin{aligned} ||\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds - u(t)|| &= ||\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(u(s)-u(t))ds|| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{\min(t,t+h)}^{\max(t,t+h)} ||u(s)-u(t)||ds. \end{aligned}$$

Aus 2) folgt dann die Aussage.

ad 2) Wegen der Stetigkeit von u gilt

$$\forall_{t\in[a,b]}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{s\in[a,b]:|t-s|<\delta} :\ ||u(t)-u(s)|| < \epsilon.$$

Wähle $|h|\le\delta$. Dann ist

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} ||u(s)-u(t)||ds < \epsilon.$$

ad 3) Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von u gilt

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{s,t\in[a,b]:|t-s|<\delta} :\ ||u(t)-u(s)|| < \epsilon.$$

Wähle $s=t+h$ für $|h|<\delta$. Dann ist

$$\int_{a-\min(0,h)}^{b-\max(0,h)} ||u(t+h)-u(t)||dt < \epsilon(b-a).$$

Sei $h>0$. Dann verbleibt noch

$$\int_{b-h}^b ||\underbrace{u(t+h)}_{=0} - u(t)||dt \le \max_{t\in[a,b]} ||u(t)||h$$

und zusammen ergibt sich

$$\int_a^b ||u(t+h)-u(t)||dt < \underbrace{\epsilon(b-a)+2|h|\max_{t\in[a,b]}||u(t)||}_{=:\tilde{\epsilon}}.$$

Sei $\tilde{\epsilon} > 0$ beliebig. Dann wähle $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{2(b-a)}$ und wähle h so, dass $|h| < \delta$ und $2|h|\max_{t\in[a,b]}||u(t)|| < \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$. Sodann folgt

$$\int_a^b ||u(t+h)-u(t)||dt < \frac{\tilde{\epsilon}}{2}+\frac{\tilde{\epsilon}}{2} = \tilde{\epsilon}.$$

Der Fall $h < 0$ ist entsprechend. □

Definition 2.6. (differenzierbar) $u : [a,b] \to X$ heißt in $t \in [a,b]$ differenzierbar, wenn gilt

$$\exists_{v\in X}: \quad \lim_{h\to 0} ||\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - v|| = 0$$

(h wird so gewählt, dass $t+h \in [a,b]$). v wird dann mit $u'(t)$ bezeichnet. Ist $t \to u'(t)$ auf $[a,b]$ stetig, so ist $u \in C^1([a,b],X)$ und $||u||_{C^1([a,b],X)} := \max_{t\in[a,b]}(||u(t) + ||u'(t)||)$.

Bemerkung. $C^1([a,b];X)$ mit $||u||_{C^1([a,b];X)}$ ist wieder ein Banachraum.

Theorem 2.7. *(Mittelwertsatz) Sei $u \in C([a,b],X)$ und existiert für alle $t \in [a,b]$ die Ableitung $u'(t) \in X$. Dann gilt für beliebige c,d mit $a \le c \le d \le b$*

(1) $||u(c)-u(d)|| \le (c-d)\sup_{t\in[c,d]}||u'(t)||$.

(2) $u(d)-u(c) = \int_c^d u'(t)dt$, *falls* $u' \in C([c,d],X)$.

Beweis. siehe E. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis, Vol. I, S. 76 f. □

Theorem 2.8. *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Sei $v \in C([a,b],X)$ und sei*

$$u(t) := \int_a^t v(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Dann existiert für alle $t \in [a,b]$ die Ableitung $u'(t)$(in $t = a$ bzw. $t = b$ die rechts- bzw. linksseitige Ableitung) und es gilt $u'(t) = v(t)$.

Beweis. O.B.d.A. sei $h > 0$. (Für $h < 0$ entsprechend) Es gilt

$$\begin{aligned} ||\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - v(t)|| &= ||\frac{1}{h}(\int_a^{t+h} v(s)ds) - \int_a^t v(s)ds) - v(t)|| \\ &= ||\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(v(s)-v(s))ds|| \\ &\le \frac{1}{h}\int_t^{t+h}||v(s)-v(s)||ds \to 0 \text{ für } h \to 0 \end{aligned}$$

Also ist $v(t) = u'(t)$. □

2.2. Der Satz von Picard-Lindelöf: Lokale und globale eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator - Differentialgleichungen.

Im folgenden sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum. Beispiele sind $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^d, l^1, C(\bar{\Omega})$ für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Vorgelegt sei folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & , t \in]0, T[\\ u(t_0) = u_0 & , t_0 \in [0, T], u_0 \in X \end{cases}.$$

Dabei ist $u : [0, T] \to X$, $t \mapsto u(t)$ gesucht.

Bemerkungen.

(1) Wir wählen der Einfachheit halber das Intervall $[0, T]$; allg. wählt man das Intervall $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Als "Anfangswert" könnte man auch $u(T) = u_T$ wählen.
(2) Das AWP heißt

- skalar für $X = \mathbb{R}$,
- endliches System für $X = \mathbb{R}^d$,
- gewöhnliche Operatordifferentialgleichung für beispielsweise $X = l^1$, $X = C(\bar{\Omega})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Ist X ein Folgenraum, so heißt das AWP abzählbar unendlich.

Beispiele.

- $X = \mathbb{R}$. $u'(t) = 2\sqrt{|u(t)|} + t^5$, $u(0) = 0$.
- $X = \mathbb{R}^3$. SIR-Modell.
- X Folgenraum. Wärmeleitungsgleichung: Gesucht sei $u : [0, T] \times [0, \pi] \to X$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ mit

$$\begin{cases} u_t - \mu u_{xx} = f & , (t, x) \in (0, T) \times (0, \pi) \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{(homogene Dirichlet-Randbedingungen)} \end{cases}$$

Um die Wärmeleitungsgleichung zu lösen verwenden wir den Fourierreihen-Ansatz: Wir nehmen an, dass u_0 und f folgendermaßen entwickelt werden können:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} u_{0j} \sin(jx), \\ f(t, x) &= \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) \sin(jx). \end{aligned}$$

Dann ist
$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)\sin(jx).$$
Für die Bestimmung der u_j haben wir ein abzählbar unendliches System zu lösen:
$$u_j'(t) + u_j^2 u_j(t) = f_j(t) \quad , t \in (0,T), j = 1,2,...$$
Hier ist $X = l^2$ mit $||v||_{l^2} = (\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Wegen der Orthogonalität der "$\sin jx$" folgt
$$u_j(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x)\sin jx\,dx$$
und für $f = 0$ folgt
$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(0)e^{-\mu j^2 t}\sin jx,$$
wobei $\int_0^{\pi} |u(t,x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty} u_j(0)^2 e^{-2\mu j^2 t} = \frac{\pi}{2}||\{u_j(t)\}||_{l^2}^2$.

- Wir betrachten nochmals die Wärmeleitungsgleichung: Jetzt sei $X = C([a,b])$ und wir suchen die abstrakte Funktion $u : [0,T] \to X$, so dass $u'(t) + Au(t) = f(t)$ mit $u(0) = u_0$. Dabei ist $Av := -\frac{d^2}{dx^2}v$. Mit den Methoden aus der Vorlesung Differentialgleichungen I können wir dieses Problem leider nicht behandeln, denn A ist nur auf einem Unterraum von X definiert.

Definition 2.9. Die Funkion $f = f(t,v) : [0,T] \times M \subset [0,T] \times X \to X$ genügt auf M einer Lipschitz - Bedingung, wenn sie bezüglich t gleichmäßig im zweiten Argument Lipschitzstetig auf M ist, d.h.
$$\exists_{L\geq 0}\ \forall_{t\in[0,T],\, v,w\in M\subset X}: \quad ||f(t,v) - f(t,w)|| \leq L||v-w||.$$

Definition 2.10. (Nemyzki - Operator) Sei $f : [0,T] \times M \subset [0,T] \times X \to X$ und $v : [0,T] \to M \subset X$. Die durch f erzeugte Abbildung
$$F : v \Rightarrow (Fv)(t) := f(t, v(t))$$
heißt Nemyzki - Operator.

Theorem 2.11. *Sei $(X, ||.||)$ ein Banach - Raum.*

(1) *Sei $f : [0,T] \times X \to X$ stetig. Dann bildet der zugehörige* Nemyzki *- Operator den Raum $C([0,T];X)$ in sich ab.*
(2) *Sei $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0,r) \to X$ stetig. Dann bildet der* Nemyzki *- Operator $C([0,T];\bar{B}(u_0,r))$ in $C([0,T];X)$ ab.*

Beweis. ... als Übung. □

Bemerkungen.

- $f : [0,T] \times X \to X$ heißt stetig, wenn gilt

$$\forall_{t\in[0,T],v\in X}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta=\delta(t,v,\epsilon)>0}\ \forall_{s\in[0,T],w\in X} : |t-s|+||v-w|| < \delta \Rightarrow ||f(t,v)-f(s,w)|| < \epsilon$$

  (entsprechende Definition für $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \to X$)

- Ist $\dim X < \infty$, so ist $[0,T] \times \bar{B}(u_0, r)$ kompakt und mit der Stetigkeit von f auf $[0,T] \times \bar{B}(u_0, r)$ folgt die Kompaktheit von $f([0,T] \times \bar{B}(u_0, r))$ (und damit die Beschränktheit und gleichmäßige Stetigkeit von f auf $[0,T] \times \bar{B}(u_0, r)$).

- Ist $\dim X = \infty$, so ist $\bar{B}(u_0, r)$ nicht kompakt und f muss weder gleichmäßig stetig noch muss $f([0,T] \times \bar{B}(u_0, r))$ beschränkt sein.

Zur Erinnerung das

Theorem 2.12. *(Rieszscher Kompaktheitssatz) Sei X ein normierter Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(1) *X ist endlichdimensional.*

(2) *Jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(3) *Die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{B}(0, 1)$ ist kompakt.*

Beweis. ... siehe Werner, Funktionalanalysis, Springer. □

Es gilt jedoch das

Lemma 2.13. *Sei $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \to X$ stetig und genüge einer Lipschitzbedingung auf $\bar{B}(u_0, r)$. Dann ist $f([0,T] \times \bar{B}(u_0, r))$ beschränkt, d.h.*

$$\exists_{M>0}\ \forall_{(t,v)\in[0,T]\times\bar{B}(u_0,r)} : \ ||f(t,v)|| \leq M.$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto f(t, u_0)$ auf $[0,T]$ gilt

$$\begin{aligned} ||f(t,v)|| &\leq ||f(t,v) - f(t,u_0)|| + ||f(t,u_0)|| \\ &\leq L||v - u_0|| + ||f(t,u_0)|| \\ &\leq Lr + \max_{t\in[0,T]} ||f(t,u_0)|| \end{aligned}$$

□

Nun kommen wir zum Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & , t \in]0,T[\\ u(t_0) = u_0 & , t_0 \in [0,T], u_0 \in X \end{cases}.$$

Im einfachsten Fall haben wir

$$\begin{cases} u'(t) = f(t) & , t \in]0,T[\\ u(t_0) = u_0 & , t_0 \in [0,T], u_0 \in X \end{cases}$$

und die durch die Formel von Duhamel gegebene Lösung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau,$$

was sofort aus den Eigenschaften von Integral und Ableitung (und insbesondere dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz ??) folgt. Zudem ist $u \in C^1([0,T];X)$, wenn $f \in C([0,T];X)$.

Theorem 2.14. *(Picard-Lindelöf, lokale Lösbarkeit) Sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum, $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \to X$ stetig und genüge auf $\bar{B}(u_0, r)$ einer Lipschitz-Bedingung, d.h.*

$$\exists_{L\geq 0}\ \forall_{t\in[0,T],w,v\in\bar{B}(u_0,r)} : \ ||f(t,v) - f(t,w)|| \leq L||v - w||.$$

Dann ist f nach Lemma 2.13 beschränkt, d.h.

$$\exists_{M>0}\forall_{t\in[0,T],v\in\bar{B}(u_0,r)} : \ ||f(t,v)|| \leq M.$$

und das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

besitzt auf $I := [0,T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$ mit $a := \min\{\frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\}$ genau eine Lösung.

Beweis. Betrachte

$$(Tv)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds$$

für $t \in I$, $v \in C(I, \bar{B}(u_0, r))$ (da f nur auf $[0,T] \times \bar{B}(u_0, r)$ definiert). Dann ist $Tv \in C^1(I, X)$ und es gilt

$$\begin{aligned} (Tv)'(t) &= f(t, v(t)) \\ (Tv)(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

Es ist $C(I, X)$ ein Banachraum. Definiere

$$\mathcal{A} := \{v \in C(I, X) : v(t) \in \bar{B}(u_0, r)\}.$$

- $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen, denn sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit

  $$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in I} ||v_n(t) - v(t)|| = 0$$

  für ein $v \in C(I, X)$. Dann gilt

  $$\begin{aligned} ||v(t) - u_0|| &\leq ||v(t) - v_n(t)|| + ||v_n(t) - u_0|| \\ &\leq r, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

- Das Bild von T liegt wieder in der Kugel, denn

$$\begin{aligned}||(Tv)(t)-u_0|| &= ||\int_{t_0}^{t} f(s,v(s))ds|| \\ &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \underbrace{||f(s,v(s))||}_{\leq M} ds \\ &\leq M|t-t_0| \leq Ma \leq M\frac{r}{M} = r.\end{aligned}$$

- Tv ist stetig, denn

$$\begin{aligned}||(Tv)(s)-(Tv)(t)|| &= ||\int_{s}^{t} f(\tau,v(\tau))d\tau|| \\ &\leq \int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} \underbrace{||f(\tau,v(\tau))||}_{\leq M} d\tau \\ &\leq M|s-t|.\end{aligned}$$

- T ist kontrahierend, denn

$$\begin{aligned}\max_{t\in I}||(Tv)(t)-(Tw)(t)|| &= \max_{t\in I}||\int_{t_0}^{t} f(s,v(s))-f(s,w(s))ds|| \\ &\leq \max_{t\in I}\int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \underbrace{||f(s,v(s))-f(s,w(s))||}_{\leq L||v(s)-w(s)||} ds \\ &\leq \max_{t\in I}\int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} Lds \max_{s\in I}||v(s))-w(s)|| \\ &\leq \underbrace{L\max_{t\in I}|t_0-t|}_{\leq a\leq\frac{1}{2L}} ||v-w||_{C(I,X)} \\ &\leq \frac{1}{2}||v-w||_{C(I,X)}.\end{aligned}$$

Wenden wir den Banachschen Fixpunktsatz auf T an, so folgt die Behauptung. (Beachte, dass jede Lösung des AWP auch Lösung der Fixpunktgleichung ist und umgekehrt.)

□

Theorem 2.15. *(globale Lösbarkeit) Sei $(X,||.||)$ ein Banachraum, $f:[0,T]\times X\to X$ stetig und genüge auf X einer Lipschitzbedingung. Dann besitzt das AWP*

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t)) & t\in[0,T] \\ u(t_0)=u_0 & t_0\in[0,T], u_0\in X\end{cases}$$

genau eine Lösung $u\in C^1([0,T],X)$.

Beweis. Definiere $\mathcal{X} := C([0,T],X)$ mit $||v||_{\mathcal{X}} := \max_{t\in[0,T]} e^{-L|t-t_0|}||v(t)||_X$. Dann ist $||.||_{\mathcal{X}}$ äquivalent zur üblichen Norm $\max_{t\in[0,T]}||v(t)||$. Betrachte $T: C([0,T],X)\to$

$C([0,T],X)$ wie in Satz (?.?) . Dann ist T kontrahierend bezüglich $||.||_{\mathcal{X}}$, denn

$$\begin{aligned}
||(Tv)(t)-(Tw)(t)|| &\leq \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} ||f(s,v(s))-f(s,w(s))||ds \\
&\leq L\int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} e^{L|t_0-s|}e^{-L|t_0-s|}||v(s)-w(s)||ds \\
&\leq L\int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} e^{L|t_0-s|}ds||v-w||_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Berechnung des Integrals für $t \geq t_0$ ergibt

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{L(s-t_0)}ds &= \frac{1}{L}e^{L(s-t_0)}\,|_{t_0}^{t} = \frac{1}{L}(e^{L(t-t_0)}-1) \\
\Rightarrow \quad \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} e^{L|t_0-s|}ds &= \frac{1}{L}(e^{L|t_0-t|}-1)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
||Tv-Tw||_{\mathcal{X}} &= \max_{t\in[0,T]} e^{-L|t_0-t|}||(Tv)(t)-(Tw)(t)|| \\
&\leq \underbrace{\max_{t\in[0,T]} e^{-L|t_0-t|}L\frac{1}{L}(e^{L|t_0-t|}-1)}_{\max_{t\in[0,T]}(1-e^{-L|t_0-t|})}||v-w||_{\mathcal{X}} \\
&\leq (1-e^{-LT})\cdot||v-w||_{\mathcal{X}}
\end{aligned}$$

und $1-e^{-LT}<1$. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Behauptung. □

Die Voraussetzung der globalen Lipschitzbedingung kann zu einer lokalen Lipschitzbedingung abgeschwächt werden.

Theorem 2.16. *(Globale Lösbarkeit bei lokaler Lipschitz-Bedingung) Sei $f:\mathbb{R}\times X\to X$ stetig und gelte*

- *f genüge auf X einer lokalen Lipschitz-Bedingung, d.h.*

$\forall_{(t,v)\in\mathbb{R}\times X}\ \exists_{a,r>0,L\geq 0}\ \forall_{s\in[t-a,t+a],(w_1,w_2)\in\bar{B}(v,r)}: ||f(s,w_1)-f(s,w_2)||\leq L||w_1-w_2||$

(f ist Lipschitz auf einem Rechteck).

- *Es gebe ein $M>0$, so dass für alle $t\in\mathbb{R}$, für die eine Lösung $u=u(t)$ existiert, gilt*

$$||f(t,u(t))||\leq M.$$

Dann existiert für das AWP

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t)) & t\in\mathbb{R} \\ u(t_0)=u_0 & t_0\in\mathbb{R}, u_0\in X \end{cases}$$

genau eine Lösung $u\in C^1(\mathbb{R},X)$

Beweis. Sei $(t_0,u_0)\in\mathbb{R}\times X$ beliebig aber fest. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es zumindest lokal eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem festen Intervall $[t_0-a,t_0+a]$.

Angenommen, diese Lösung exisiert nicht auf ganz $\mathbb{R}$. Sei hierzu $J := (\alpha, \beta), -\infty < \alpha < \beta \leq \infty$ das größte offene Intervall auf dem u existiert. Dann gilt

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

für $t \in J$. Für beliebige $t_1, t_2 \in J$ gilt dann

$$||u(t_2) - u(t_1)|| \leq \int_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)} \underbrace{||f(s, u(s))||}_{\leq M} ds \leq M|t_2 - t_1|.$$

Sei $\{t_n\} \subset J$ mit $t_n \to \alpha$. Dann gibt es ein $y \in X$ mit $u(t_n) \to y \in X$ für $n \to \infty$, denn $\{u(t_n)\}$ ist eine Cauchy-Folge in X. Fortsetzungsargument: Betrachte

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(\alpha) &= y. \end{aligned}$$

Lösung auf einem Intervall um α. □

Corollary 2.17. *Sei $A(t) : X \to X$ für jedes $t \in [0, T]$ ein linearer, beschränkter Operator. Desweiteren sei die Abbildung $t \mapsto A(t)$ auf $[0, T]$ stetig. Dann besitzt das AWP*

$$\begin{aligned} u'(t) + A(t)u(t) &= f(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

für $t \in [0, T]$ genau eine Lösung $u \in C^1([0, T], X)$, falls $f \in C([0, T], X)$.

Beweis. (Skizze) Betrachte $f(t, v) := \tilde{f}(t) - A(t)$ (wohldefiniert). f ist Lipschitz-stetig, denn

$$\begin{aligned} ||f(t, v) - f(t, w)|| &= ||A(t)v - A(t)w|| \\ &= ||A(t)(v - w)|| \\ &\leq C||v - w||. \end{aligned}$$

Wende Satz 2.15 an. □

2.3. **Lineare Systeme mit beschränkten Operatoren.**
Sei wieder $(X, ||.||)$ ein Banachraum.

Bemerkungen.

- $\mathcal{L}(X)$ - der Raum der linearen, beschränkten Abbildungen $B : X \to X$ - mit $||B||_{\mathcal{L}(X)} := \sup_{v\in X, v\neq 0} \frac{||Bv||}{||v||}$ ist ein Banachraum.
- Eine Familie $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$von Operatoren heißt gleichmäßig beschränkt, wenn gilt
$$\exists_{c>0}\ \forall_{t\in[0,T], v\in X} :\ ||A(t)v|| \leq c||v||.$$
(Dies folgt hier mit der Stetigkeit von $t \mapsto A(t)$, da $[0, T]$ kompakt ist.)
- Die Abbildung $t \mapsto A(t)$ heißt auf $[0, T]$ stetig, wenn gilt
$$\forall_{t\in[0,T]} :\ |t - s| \to 0 \ \Rightarrow\ ||A(t) - A(s)||_{\mathcal{L}(X)} \to 0.$$
- Für einen Operator gilt i.A. $(Au)(t) \neq A(t)u(t)$ (Vorgeschichte wird wohlmöglich berücksichtigt, s. Volterra-Gleichungen)
- Beachte: Für $\dim X < \infty$ sind lineare Abbildungen stets beschränkt, für $\dim X = \infty$ gilt dies nicht immer.

Betrachte den Fall $X = \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} u'(t) + a(t)u(t) &= f(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$
Die Lösung der homogenen Gleichung kann einfach mit der Formel von Duhamel (Variation der Konstanten) berechnet werden:
$$u_{hom}(t) = c\exp(-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau)$$
Wir betrachten die Konstante wieder als in t variabel:
$$u(t) = c(t)\exp(-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau).$$
Weiter folgt
$$\begin{aligned} u'(t) &= c'(t)\exp(-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau) + c(t)\exp(-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau)(-a(t)) \\ &= c'(t)\exp(-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau) - a(t)u(t) \end{aligned}$$
und
$$c'(t)\exp(-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau) = f(t)$$
$$\Rightarrow \qquad c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^t \exp(-\int_{t_0}^s a(\tau)d\tau)f(s)ds$$

Damit ergibt sich dann für die Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= (u_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau) f(s)ds) \exp(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau) \\ &= \underbrace{u_0 \exp(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau)}_{u_{hom}} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\exp(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau) f(s)}_{\text{Lösung von: } v'(t)+a(t)v(t)=0, v(s)=f(s)} ds \end{aligned}$$

Wir schreiben die Lösung noch anders auf :

$$u(t) = \mathcal{U}(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{U}(t, s) f(s)ds,$$

wobei $\mathcal{U}(t, s) = \exp(-\int_s^t a(\tau)d\tau)$.

Theorem 2.18. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(X, ||.||)$ ein Banachraum. Ferner sei $\{A(t)\}_{t\in I} \subset \mathcal{L}(X)$ und es gelte: $t \to A(t)$ ist bzgl. $||.||_{\mathcal{L}(X)}$stetig auf I. Schließlich sei $f \in C(I, X)$.*
Dann gibt es zu beliebigen Anfangsdaten $(t_0, u_0) \in I \times X$ genau eine Lösung $u \in C^1(I, X)$ des AWP

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = f(t), & t \in I \\ u(t_0) = u_0, & u_0 \in X \end{cases}.$$

Beweis. Ist I abgeschlossen und beschränkt, so ergibt sich mit Korollar ?.? die Behauptung. Ist I nicht abgeschlossen oder unbeschränkt, so haben wir die eindeutige Lösbarkeit auf jedem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $J \subset I$. Mit der Fortsetzbarkeit der Lösung folgt die Behauptung. $\square$

Definition 2.19. (Propagator) Sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ mit $(X, ||.||)$ Banachraum. Die durch die eindeutig bestimmten Lösungen $u = u(t)$ des homogenen AWP

$$\begin{aligned} u'(t) + A(t)u(t) &= 0 \\ u(s) &= u_0 \end{aligned}$$

erzeugte Abbildung

$$\mathcal{U}(t, s) : X \to X, \ u_0 \mapsto u(t)$$

heißt Propagator (Evolutionsoperator/ Fundamentallösung). Man spricht auch von einer zweiparametrigen Familie.

Theorem 2.20. *(Eigenschaften des Propagators) Sei $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. Dann gilt*

(1) $\forall_{t,s\in\mathbb{R}} : \mathcal{U}(t, s) \in \mathcal{L}(X)$ *und* $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)$ *ist stetig auf* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(2) $\mathcal{U}(t, t) = id$ *auf* $\mathcal{L}(X)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

(3) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, r) = \mathcal{U}(t, r)$ *und damit* $\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{U}(s, t)^{-1}$*für alle* $t, s, r \in \mathbb{R}$.

(4) $(t,s) \mapsto \mathcal{U}(t,s)$ *ist die eindeutig bestimmte Lösung des AWP*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,s) + A(t)\mathcal{U}(t,s) = 0 \\ \mathcal{U}(s,s) = id \qquad\qquad\qquad in\ \mathbb{L}(X) \end{cases}.$$

(5) *Für den autonomen Fall* $A(t) \equiv A$ *gilt* $\mathcal{U}(t,s) = \mathcal{U}(t-s,0) =: S(t-s)$ *für alle* $s,t \in \mathbb{R}$.

(6) *Für die partiellen Ableitungen von* $\mathcal{U}(t,s)$ *für alle* $s,t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,s) &= -A(t)\mathcal{U}(t,s), \\ \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s) &= \mathcal{U}(t,s)A(s). \end{aligned}$$

(7) $\forall_{t>s}: \quad ||\mathcal{U}(t,s)||_{\mathcal{L}(X)} \leq \exp(+\int_s^t ||A(\tau)||_{\mathcal{L}(X)} d\tau)$

Beweis. **ad1)** Dass $\mathcal{U}(t,s)$ linear ist, folgt unmittelbar aus dem Superpositionsprinzip: Seien $u = u(t)$ und $v = v(t)$ die eindeutig bestimmten Lösungen des homogenen AWP zu den Anfangsbedingungen $u(s) = u_0$ und $v(s) = v_0$. Dann ist $w := \alpha u + \beta v$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Lösung des homogenen AWP mit der Anfangsbedingng $w(s) = \alpha u_0 + \beta v_0$, also gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t,s)(\alpha u_0 + \beta v_0) &= w(t) \\ &= \alpha u(t) + \beta v(t) \\ &= \alpha \mathcal{U}(t,s)u_0 + \beta \mathcal{U}(t,s)v_0. \end{aligned}$$

Dass $\mathcal{U}(t,s)$ für alle $t,s \in \mathbb{R}$ bechränkt ist, ist nichts anderes als (7).
Zur Stetigkeit: Sei $(\bar{t},\bar{s}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Dann gilt für alle $t,s \in \mathbb{R}$

$$||\mathcal{U}(\bar{t},\bar{s}) - \mathcal{U}(t,s)|| \leq ||\mathcal{U}(\bar{t},\bar{s}) - \mathcal{U}(t,\bar{s})|| + ||\mathcal{U}(t,\bar{s}) - \mathcal{U}(t,s)||.$$

Betrachte für alle $u_0 \in X$ mit $u(\bar{s}) = u_0$

$$\begin{aligned} ||(\mathcal{U}(\bar{t},\bar{s}) - \mathcal{U}(t,\bar{s}))u_0|| &= ||\mathcal{U}(\bar{t},\bar{s})u_0 - \mathcal{U}(t,\bar{s})u_0|| \\ &= ||u(\bar{t}) - u(t)|| \\ &\to 0 \text{ für } t \to \bar{t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} ||\mathcal{U}(t,\bar{s}) - \mathcal{U}(t,s)|| &= ||\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\bar{s}) - \mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(\bar{s},\bar{s})|| \\ &= ||\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\bar{s}) - \mathcal{U}(\bar{s},\bar{s})|| \\ &\leq ||\mathcal{U}(t,s)|| \underbrace{||\mathcal{U}(s,\bar{s}) - \mathcal{U}(\bar{s},\bar{s})||}_{\to 0 \text{ für } s \to \bar{s}} \to 0 \end{aligned}$$

denn $||\mathcal{U}(t,s)|| \leq \exp(\int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} ||A(\tau)||d\tau)$ nach (7).

ad 2) $\mathcal{U}(t,t)u_0$ ist Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0 \\ u(t) = u_0 \end{cases}$$

und daher $\mathcal{U}(t,t)u_0 = u(t) = u_0$.

ad 3) Da $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,t) = \mathcal{U}(t,t) = id$ auf $\mathcal{L}(X)$, ist $\mathcal{U}(t,s) = \mathcal{U}(s,t)^{-1}$. Sei $\mathcal{U}$ Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0 \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

Dann gilt $\mathcal{U}(t,s)u_0 = u(t)$. O.B.d.A. sei $t > s > r$. Betrachte

$$\begin{cases} v'(s) + A(s)v(s) = 0 \\ v(r) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Dann gilt $\mathcal{U}(s,r)u_0 = v(s)$. Nimm nun für (2.1) als Anfangswert $u(s) = v(s)$, wobei v die Lösung des zweiten Systems ist. Dann ist $t \mapsto \mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,t)u_0$ die Lösung zur Anfangsbedingung $u(r) = u_0$, also $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,r)u_0 = \mathcal{U}(t,r)u_0$.

ad 4) folgt aus 6) und 2).

ad 5) Sei u Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0 \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

und definiere $v(t) := u(t+s)$ und damit

$$\begin{cases} v'(t) + A(t+s)v(t) = 0 \\ v(s) = u_0 \end{cases} .$$

Jetzt beachte, dass A nicht von t abhängt:

$$\mathcal{U}(t-s,0)u_0 = v(t-s) = u(t) = \mathcal{U}(t,s)u_0$$

ad 6) $u(t) = \mathcal{U}(t,s)u(s)$. Nun ist

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,s)u(s) \\ &= -A(t)u(t) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,s)u(s) = -A(t)\mathcal{U}(t,s)u(s).$$

Und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s} id \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(s,s) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,t) + \mathcal{U}(t,s)\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(s,t)}_{-A(s)\mathcal{U}(s,t)} \end{aligned}$$

und damit $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,t) = \mathcal{U}(t,s)A(s)\mathcal{U}(s,t)$, also $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s) = \mathcal{U}(t,s)A(s)$.
ad 7) Es genügt zu zeigen, dass

$$||u(t)|| \leq \exp(\int_s^t ||A(\tau)||_{\mathcal{L}(X)} d\tau)||u_0||,$$

was für kompakte Intervalle die Beschränktheit von u nach sich zieht. Es gilt $u(t) = u_0 - \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau$, so dass wegen der Eigenschaften des Integrals

$$||u(t)|| \leq ||u_0|| + \int_s^t ||A(\tau)||_{\mathcal{L}(X)}||u(\tau)||d\tau. \tag{2.2}$$

Schon hier könnte man das später behandelte Gronwallsche Lemma anwenden, oder direkt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}\int_s^t ||A(\tau)||||u(\tau)||d\tau\right\} &= e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}\cdot(-||A(t)||)\cdot\int_s^t ||A(\tau)||||u(\tau)||d\tau \\
&\quad + e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}||A(t)||||u(t)|| \\
&\leq e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}||A(t)||||u_0|| \\
&= -\frac{d}{dt}\left\{e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}\right\}||u_0||
\end{aligned}$$

Integration von s bis t ergibt

$$e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}\int_s^t ||A(\tau)||||u(\tau)||d\tau = e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}||u_0|| + ||u_0||.$$

Zusammen ergibt sich wegen (2.2)

$$||u(t)|| \leq ||u_0|| - ||u_0|| + e^{-\int_s^t ||A(\tau)||d\tau}||u_0||,$$

also die Behauptung. □

Bemerkung. Weiß man mehr über die Struktur von A (z.B. A positv definit), so kann man die Abschätzung verbessern.

Theorem 2.21. *Die Voraussetzungen seien wie im Satz zuvor. Kommutieren alle Operatoren $A(.)$ miteinander, gilt also $A(t)A(r) = A(r)A(t)$ für alle $t, r \in \mathbb{R}$, so gilt*

$$\mathcal{U}(t,s) = e^{-\int_s^t A(\tau)d\tau}.$$

Für $B \in \mathcal{L}(X)$ definiert man

$$e^B := \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}B^\nu \text{ mit } B^0 = id.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $t > s$.
(a) $\exp(\int_s^t ||A(\tau)||d\tau)$ ist wohldefiniert, denn $A(t) \in \mathcal{L}(X)$ und $t \to A(t)$ stetig (und damit $t \to ||A(t)||$ stetig).
(b) Die Reihe $\sum_{\nu=0}^\infty \frac{1}{\nu!}(-\int_s^t A(\tau)d\tau)^\nu$ ist konvergent, denn die Folge der Partialsummen ist eine Cauchy-Folge:

$$||\sum_{\nu=n}^m \frac{1}{\nu!}(-\int_s^t A(\tau)d\tau)^\nu|| \leq \sum_{\nu=n}^m \frac{1}{\nu!}(\int_s^t ||A(\tau)||d\tau)^\nu \to 0, \quad n,m\to\infty,$$

da $\exp(\int_s^t ||A(\tau)||d\tau)$ existiert.

Da das Integral $\int_s^t A(\tau)d\tau$ der Grenzwert endlicher Summen der Gestalt $\triangle t \sum_i A(t_i)$ ist, folgt: $A(t)$ kommutiert mit $\int_s^t A(\tau)d\nu$ (eigentlich reicht diese schwächere Voraussetzung für den Satz aus)

Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{-\int_s^t A(\tau)d\tau} &= \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(-\int_s^t A(\tau)d\tau)^{\nu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\nu(-\int_s^t A(\tau)d\tau)^{\nu-1}(-A(t)) \\
&= -A(t)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu-1)!}\nu(-\int_s^t A(\tau)d\tau)^{\nu-1} \\
&= -A(t)e^{-\int_s^t A(\tau)d\tau}
\end{aligned}$$

Damit ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\underbrace{e^{-\int_s^t A(\tau)d\tau}u_0}_{u(t)} + A(t)e^{-\int_s^t A(\tau)d\tau}u_0 &= 0 \\
u(s) &= u_0
\end{aligned}$$

für $t = s$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des homogenen Anfangswertproblems gilt

$$\mathcal{U}(t,s)u_0 = e^{-\int_s^t A(\tau)d\tau}u_0, \quad \forall_{u_0 \in X}$$

□

Bemerkungen:

(1) Die Einschränkung auf $\mathbb{R}_0^+$ oder $I \subset \mathbb{R}$ ist möglich (Dies ist wichtig, wenn der Operator nicht auf dem ganzen Raum definiert oder stetig ist.)

(2) Liegt der autonome Fall, also $A(t) \equiv A$, vor, so gilt

$$\mathcal{U}(t,s) = \mathcal{U}(t-s,0) = S(t-s) = e^{-(t-s)A}$$

und die Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
u'(t) + Au(t) &= 0 \\
u(0) &= u_0
\end{aligned}$$

lautet

$$u(t) = e^{-tA}u_0, \quad \forall_{t\in\mathbb{R}, u_0 \in X}.$$

(3) Dabei ist $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}} = \{e^{-tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$eine einparametrige abelsche Gruppe, denn es gilt

- $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist assoziativ: $(S(t)S(r))S(s) = S(t)(S(r)S(s)) \quad \forall_{t,r,s\in\mathbb{R}}$,
- $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ besitzt ein Einselement: $S(0) = id \quad$ in $\mathcal{L}(X)$,

- $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ besitzt ein inverses Element: $S(t)^{-1} = S(-t)$,
- $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist kommuativ: $S(t)S(s) = S(t+s) = S(s+t) = S(s)S(t)$, wobei wir die erste Gleichheit schon allgemeiner für Propagatoren bewiesen haben.

(4) $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist gleichmäßig stetig, d.h. $t \mapsto S(t)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ bzgl. $||.||_{\mathcal{L}(X)}$.

(5) Wenn $\{S(t)\}$ nur für $t \geq 0$ erklärt ist, so heißt $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ Halbgruppe (d.h. es gibt kein inverses Element). Dies tritt insbesondere dann auf, wenn A nicht auf ganz X erklärt ist, also $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ (unbeschränkter Operator). Ist $A : X \to X$ linear und beschränkt, so ist e^{-tA} stets für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt, und $\{e^{-tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine Gruppe.

(6) $-A$ heißt auch infinitesimaler Erzeuger (Generator) von $\{e^{-tA}\}$ und es gilt für $u_0 \in X$

$$-Au_0 = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t} \quad \text{in } X.$$

(Mehr dazu wird in der Vorlesung Differentialgleichungen III, welche auch die Theorie der Halbgruppen behandelt, gesagt werden.)

(7) Propagatoren $\mathcal{U}(t,s)$ beschreiben Kausalprozesse, die nicht homogen in der Zeit sind. Einparametrige Gruppen beschreiben dagegen Prozesse, die in der Zeit homogen, d.h. $\forall_{s,t,h\in\mathbb{R}} : \mathcal{U}(t+h, s+h) = \mathcal{U}(t,s)$, und reversibel, d.h. $S(t)^{-1} = S(-t)$, sind. Halbgruppen wiederum beschreiben homogene irreversible Prozesse ($S(t)^{-1}$ existiert nicht), z.B. bei Wärmeleitung, Wachstumsprozessen, Diffusion, Energiedissipation.

(8) Ist $S(t)$ kompakt (stetig, beschränkte Mengen werden in relativ kompakte Mengen abgebildet) und $\dim X = \infty$, so kann es keine beschränkte Inverse $S(t)^{-1}$geben, denn dann wäre $S(t)S(t)^{-1} = id$ kompakt. Das ist aber ein Widerspruch zum Rieszschen Kompaktheitssatz: Die abgeschlossene Einheitskugel ist in X nicht kompakt.

Lemma 2.22. *(Eigenschaften von e^B) Sei $B \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt*
i) $e^B = \lim_{n\to\infty}(id - \frac{1}{n}B)^{-n} = \lim_{n\to\infty}(id + \frac{B}{n})^n$,

ii) Kommutieren B und C, so gilt

$$e^B e^C = e^{B+C} = e^C e^B$$

und falls C^{-1}in $\mathcal{L}(X)$ existiert, so ist

$$e^{CBC^{-1}} = Ce^B C^{-1},$$

iii) $Bv = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tB}v - v}{t}, \quad \forall_{v\in X}$.

Beweis. ...Übung. □

Theorem 2.23. *Sei $A : X \to X$ linear und beschränkt. Dann gilt für $S(t) = e^{-tA}, t \in \mathbb{R}$:*

i) $u(t) = S(t)u_0$ ist Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ii) $\forall_{t\in\mathbb{R}} : ||S(t)|| \leq e^{|t|||A||}$,

iii) $S^{(m)}(t) \in \mathcal{L}(X)$, wobei

$$S^{(m)}(t)v := \frac{d^m}{dt^m}(S(t)v), \quad \forall_{t\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}}$$

wohldefiniert und es gilt $S^{(m)}(t) = (-A)^m S(t)$, $||S^{(m)}(t)|| \leq ||A||^m ||S(t)||$.

iv) $S(t)S(s) = S(t+s)$.

Beweis. ... Übung. □

Wir kommen nun zum inhomogenen Problem

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Theorem 2.24. *(Prinzip von Duhamel) Sei X ein Banachraum und $A \in C(I, \mathcal{L}(X))$, für ein Intervall $I \in \mathbb{R}$.Sei $f \in C(I, X)$. Die nach Satz ?? eindeutig bestimmte Lösung von (2.3) lässt sich darstellen als*

$$u(t) = \mathcal{U}(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{U}(t, s)f(s)ds. \tag{2.4}$$

Insbesondere gilt im autonomen Fall ($A(t) \equiv A$)

$$u(t) = e^{-(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)A}f(s)ds.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass (2.4) tatsächlich eine Lösung von (2.3) ist (und zwar aus $C^1(I, X)$).

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0)u_0 + \mathcal{U}(t, t)f(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, s)f(s)ds \\ &=_{(*)} -A(t)\mathcal{U}(t, t_0)u_0 + f(t) + \int_{t_0}^{t} -A(t)\mathcal{U}(t, s)f(s)ds \\ &= -A(t)u(t) + f(t) \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt $u(t_0) = u_0$. □

Bemerkungen.

- Das Prinzip von Duhamel gilt auch für semilineare Probleme
$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
Dann hat die Lösung die Form
$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s, u(s))ds.$$
(Fixpunktgleichung)

- Die Voraussetzungen an f können "abgeschwächt" werden und man spricht dann von einer milden Lösung $u \in C(I, X)$. Dies ermöglicht die Behandlung vieler semilinearer, parabolischer Gleichungen wie etwa die NAVIER-STOKES-Gleichungen.

Im autonomen Fall gilt die folgende Regularitätsaussage:

Theorem 2.25. *Sei $u = u(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung des AWP*
$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & , t \in [0, T] \\ u(t_0) = u_0 & , t_0 \in [0, T], u_0 \in X \end{cases}$$
für ein $A \in \mathcal{L}(X)$.
Dann folgt aus $f \in C^m([0, T]; X)$ auch $u \in C^{m+1}([0, T]; X)$ und insbesondere aus $f \in C^\infty([0, T]; X)$ auch $u \in C^\infty([0, T]; X)$.

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$. $u'(t) = f(t) - Au(t)$, $u''(t) = f'(t) - Au'(t)$, ... und mit $u \in C^m([0, T]; X)$ gilt auch $Au \in C^m([0, T]; X)$ für alle m und damit $u^{(m+1)} = f^{(m)} - Au^{(m)}(t) \in C([0, T]; X)$, also $u \in C^{(m+1)}([0, T]; X)$ (bootstrap-Argument). $\square$

Bemerkung. Im nichtautonomen Fall wird die Situation wegen
$$\begin{aligned} u''(t) &= (f(t) - A(t)u(t))' \\ &= f'(t) - \underline{\underline{A'(t)}}u(t) - A(t)u'(t) \end{aligned}$$
komplizierter.

Beispiele.

(1) $X = \mathbb{R}$, $u'(t) - 3t^2u(t) = t^2$, $u(0) = 1$. Die Lösung dieses AWP ergibt sich durch die Formel von Duhamel:
$$u(t) = \mathcal{U}(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{U}(t, s)f(s)ds.$$
Hier ist
$$\mathcal{U}(t, s) = \exp(-\int_s^t (-3\tau^2)d\tau) = e^{t^3 - s^3}$$

und mit

$$\begin{aligned}
\int_0^t (e^{t^3-s^3}s^2)ds &= -\frac{1}{3}e^{t^3}\int_0^t -3e^{-s^3}s^2 ds \\
&= -\frac{1}{3}e^{t^3}(e^{-t^3}-1)
\end{aligned}$$

ist

$$u(t) = e^{t^3} - \frac{1}{3}e^{t^3}(e^{-t^3}-1) = \frac{4}{3}e^{t^3} - \frac{1}{3}.$$

(2) $X = \mathbb{R}^2$. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{t^2} & -\frac{2}{t^2} \end{pmatrix}$ für $t > 0$ und $u(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Die $\{A(t)\}$ kommutieren nicht! Wir bestimmen $\mathcal{U}(t,s)$ als Lösung des Systems

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{U}(t,s) + A(t)\mathcal{U}(t,s) = 0 \\ \mathcal{U}(s,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} ;$$

genauer lösen wir also zwei Systeme, um die beiden Spalten von $\mathcal{U}(t,s)$ zu bestimmen. Wir lösen für die erste Spalte von $\mathcal{U}(t,s)$

$$\begin{cases} u'(t) - v(t), & u(s) = 1 \\ v'(t) + \frac{2}{t^2}u(t) - \frac{2}{t}v(t), & v(s) = 0 \end{cases}$$

und für die zweite Spalte dasselbe System mit den Anfangsbedingungen $u(s) = 0$ und $v(s) = 1$. Einsetzen der abgeleiteten ersten Gleichung in die zweite Gleichung liefert

$$u''(t) - \frac{2}{t^2}u'(t) + \frac{2}{t^2}u(t) = 0.$$

Wählen wir ein Polynom zweiten Grades als Lösungsansatz ($u(t) = at^2 + bt$, $u'(t) = 2at + b$, $u''(t) = 2a$), so erhalten wir

$$2a - 4a - \frac{2b}{t} + 2a + \frac{2b}{t} = 0$$

und die Anfangsbedingungen liefern $u(s) = as^2 + bs = 1$ (0), also $a = -\frac{1}{s^2}$ $(\frac{1}{s})$, und $v(s) = 2as + b = 0$ (1), also $b = \frac{2}{s}$ (-1). Nun haben wir die Lösung des homogenen Systems:

$$\mathcal{U}(t,s) = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{s^2} + 2\frac{t}{s} & \frac{t^2}{s} - t \\ -\frac{2t}{s^2} + \frac{2}{s} & \frac{2t}{s} - 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{U}(t,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4}^2 - 3t \\ \frac{7}{2}t - 3 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des inhomogenen Systems zu berechnen sei als Übungsaufgbe gegeben.

(3) $X = \mathbb{R}^3$. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ und $u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir benötigen

$$e^{-tA} = I + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!}(-t)^{\mu} A^{\mu}.$$

Wir bestimmen leicht, dass für $\mu = 1, 2, ...$ gilt

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 1 - te^{-t} - e^{-t} & 1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich für die Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-tA} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -te^{-t} \\ -1 + te^{-t} + e^{-t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -te^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) Vorgelegt sei die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \int_a^b k(x,\xi,t) u(\xi,t) d\xi = f(x,t) \qquad \text{für } (x,t) \in (a,b) \times (0,T)$$

mi dem Integralkern $k : [a,b] \times [a,b] \times [0,T] \to \mathbb{R}$. Wir führen die abstrakte Funktion $\tilde{u}$ ein:

$$\tilde{u} : [0,T] \to X, \ [\tilde{u}(t)](x) = u(t,x)$$

und bezeichnen diese wieder mit u. Das neue System lautet dann

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases},$$

wobei $(A(t)v)(x) := \int_a^b k(x,\xi,t)v(\xi)d\xi$. Wir wählen z.B. $X = C[a,b]$. Dann gilt $A(t) : X \to X$, wenn $k \in C([a,b]^2 \times [0,T])$, denn

$$\begin{aligned} ||A(t)v||_{C[a,b]} &\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,\xi,t)||v(\xi)|d\xi \\ &\leq \max_{t\in[0,T]} \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,\xi,t)|d\xi \cdot ||v||_{C[a,b]}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $t \mapsto A(t)$ stetig auf $[0,T]$. Damit wissen wir, dass eine Lösung $u \in C([0,T]; C[a,b])$ existiert.
Im autonomen Fall $k(x,\xi,t) = k(x,\xi)$ könnten wir z.B. auch lediglich $k \in L^2((a,b)\times(a,b))$ verlangen und $X = L^2(a,b)$ wählen.

(5) Wir wollen nun ein abstraktes AWP zweiter Ordnung betrachten:

$$\begin{cases} u''(t) + Au'(t) + Bu(t) = f(t), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases}$$

(Wellenphänomene, Elektrizitätstheorie, ...)
Sei $\underline{u}(t) := (u(t), u'(t))^T$. Das Differentialgleichungssystem lautet dann

$$\underline{u}'(t) + \mathcal{A}\underline{u}(t) = \underline{f}(t),$$

wobei $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B & A \end{pmatrix}$, $\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$.
Mit X ist auch $X \times X$ (mit $||(u,v)||_{X\times X} := ||u||_X + ||v||_X$) ein Banachraum und sind $A, B \in \mathcal{L}(X)$, so gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X \times X)$, denn

$$\begin{aligned} ||\mathcal{A}\underline{v}||_{X\times X} &= ||(-v_2, Bv_1 + Av_2)^T||_{X\times X} \\ &= ||v_2||_X + ||Bv_1 + Av_2||_X \\ &\leq ||v_2||_X + ||B|| \cdot ||v_1||_X + ||A|| \cdot ||v_2||_X \\ &\leq \max(||B||, 1 + ||A||) \cdot (||v_1|| + ||v_2||) \end{aligned}$$

Nach DUHAMEL lautet die Lösung

$$\underline{u}(t) = e^{-t\mathcal{A}}\underline{u}_0 + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}\underline{f}(s)ds,$$

wobei $e^{-t\mathcal{A}}$ noch ausgerechnet werden kann (s. EMMRICH, Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen, S.).

Wir kommen nun zu linearen Systemen in $X = \mathbb{R}^d$.

Theorem 2.26. *Sei $X = \mathbb{R}^d$ und $A \in C(I, \mathbb{R}^{d\times d})$ für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$.Dann gilt*

(1) *Die Menge aller homogenen Lösungen*

$$V := \{u = u(t) \in C^1(I;X) : \ u'(t) + A(t)u(t) = 0\}$$

ist ein linearer Teilraum von $C^1(I;X)$ mit $\dim V = d$.

(2) *Für $f \in C(I;X)$ ist die Menge aller inhomogenen Lösungen*
$$V_f := \{u = u(t) \in C^1(I;X) : \; u'(t) + A(t)u(t) = f(x)\}$$
zu V affin und es gilt $V_f = V \oplus u_p$, wobei u_p eine beliebige partikuläre Lösung ist.

(3) *Seien $u_1, u_2, ..., u_m \in V$ mit $m \leq d$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*
- *$u_1, u_2, ..., u_m$ sind linear unabhängige Funktionen.*
- *Für jedes $s \in I$ sind $u_1(s), u_2(s), ..., u_m(s)$ linear unabhängige Vektoren.*
- *Für ein $\bar{t} \in I$ sind $u_1(\bar{t}), u_2(\bar{t}), ..., u_m(\bar{t})$ linear unabhängige Vektoren.*

Bemerkung. Die linear Unabhängigkeit von Funkionen ist im Allgemeinen etwas anderes als die lineare Unabhängigkeit einzelner Funktionswerte.

Beweis. zu (1) Dass es sich um einen linearen Teilraum handelt, folgt unmittelbar aus dem Superpositionsprinzip. Für die Dimensionsaussage könnten wir sogleich ein Fundamentalsystem konstruieren und (2) benutzen, doch dazu später.
Jedenfalls ist die Abbildung
$$S : \mathbb{R}^d \to V, \; u_0 \mapsto u$$
wobei $u = Su_0$ die eindeutig bestimmte Lösung von
$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
sei, linear, injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus.

zu (2) ... klar wegen des Superpositionsprinzips.

zu (3) Es gilt wegen $u_i \in V$ stets $u_i = Su_{0i}$ für irgendwelche u_{0i}. Da S ein Isomorphismus ist, folgt aus der linearen Unabhängigkeit von u_i auch jene von u_{0i} und umgekehrt. Es ist nun $u_{0i} = u_i(t_0)$ mit $t_0 \in I$ beliebig, aber fest, was die Äquivalenz der drei Aussagen nach sich zieht. □

Definition 2.27. (Wronski-Determinante) Die Voraussetzngen seien wie zuvor und $u_1, u_2, ..., u_d \in V$. Dann heißt
$$W(t) := \det(u_1, u_2, ..., u_d), \quad t \in I$$
Wronski-Determinante von $u_1, u_2, ..., u_d$.

Lemma 2.28. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Entweder $W(t) = 0$ oder $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.*

(2) *$u_1, u_2, ..., u_d$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.*

(3) *Es gilt die Formel von Liouville:*
$$W'(t) + trA(t) \cdot W(t) = 0$$
so dass $W(t) = \exp(-\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau)W(t_0)$ *für* t_0, t.

Bemerkung. $trA(t)$ ist die Spur der Matrix $A(t)$, also die Summe der Diagonalelemente.

Beweis. ... zur Übung. □

2.4. **Der Satz von Peano über die lokale Lösbarkeit von Anfangswertproblemen für endlichdimensionale Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen und eine Verallgemeinerung auf Operatordifferentialgleichungen.**

Im Satz von Picard-Lindelöf wurde für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines AWP (unter anderem) die Lipschitzstetigkeit der rechten Seite im zweiten Argument gefordert. Hat man die Lipschitzstetigkeit nicht gegeben, so kann man - allerdings nur in Endlichdimensionalen - bei stetiger rechter Seite wenigstens noch die Existenz einer Lösung sichern; die Eindeutigkeit geht dann verloren.

Beispiel. Das AWP $u'(t) = \sqrt[3]{u(t)}$, $u(0) = 0$ besitzt unendlich viele Lösungen, nämlich $u(t) = 0$ für $t \leq \alpha$ und $u(t) = \frac{2}{3}(t-\alpha)^{\frac{3}{2}}$ für $t > \alpha$.

Theorem 2.29. *(*Peano*, 1890) Sei $X = \mathbb{R}^d$ versehen mit der Norm $||.||$ und sei für ein $r > 0$ und ein $u_0 \in X$ $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \to \mathbb{R}^d$ stetig.*
Dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

auf dem Intervall $I := [0,T] \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$ mit $M := \max_{(t,v)\in[0,T]\times\bar{B}(u_0,r)} ||f(t,x)||$ mindestens eine Lösung $u : I \to \bar{B}(u_0, r) \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir noch einige Hilfsmittel, die wir zum Teil ohne Beweis angeben wollen.

Theorem 2.30. *(*Arzelà-Ascoli*) Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von auf $[0,T]$ gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funkionen, die in den $\mathbb{R}^d$ abbilden. Dann gibt es eine auf $[0,T]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{u_{n'}\}$ von $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. ... in der UE. □

Bemerkungen. Seien $u_n : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen.

(1) Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig beschränkt, wenn gilt
$$\exists_{K\geq 0}\forall_{n\in\mathbb{N}} : ||u_n||_{C([0,T],\mathbb{R}^d)} = \max_{t\in[0,T]} ||u_n(t)||_{\mathbb{R}^d} \leq K.$$

(2) Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichgradig stetig, wenn gilt
$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{s,t\in[0,T]:|s-t|<\delta} : ||u_n(s) - u(t)|| < \epsilon.$$

(3) Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn gilt
$$\exists_{u\in C([0,T],\mathbb{R}^d)} : \max_{t\in[0,T]} ||u_n(t) - u(t)||_{\mathbb{R}^d} \to_{n\to\infty} 0.$$

(4) Der Satz gilt so nur in $\mathbb{R}^d$.

(5) Es gilt schärfer in $\mathbb{R}^d$: Eine Familie von Funktionen aus $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Theorem 2.31. *(Fixpunktsatz (FPS) von Brouwer, 1930) Jede setige Abbildung von einer abgeschossenen Kugel im $\mathbb{R}^d$ in sich selbst besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Für $d = 1$ ist die Aussage nichts anderes als der Zwischenwertsatz.
Einen allgemeinen Beweis findet man in Zeidler, Applied Functional Analysis, aber auch im Skript von Ferus, Analysis III. □

Bemerkung. "abgeschlossene Kugel" kann ersetzt werden durch $\mathcal{A} \neq \emptyset$ kompakt, konvex.

Theorem 2.32. *(Fixpunktsatz von Schauder, 1930) Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines Banachraumes X und sei $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt T mindestens einen Fixpunkt in $\mathcal{A}$.*

Bemerkungen.

(1) Für $X = \mathbb{R}^d$ sagt der FPS von Schauder dasselbe wie der FPS von Brouwer.

(2) Eine Menge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ heißt konvex, wenn gilt
$$\forall_{\mu\in[0,1]} : \quad u, v \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu u + (1-\mu)v \in \mathcal{A}.$$

(3) Sei X Banachraum und $\mathcal{A} \subset X$. Falls $\dim X < \infty$, so gilt: Ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen und beschränkt, dann ist $\mathcal{A}$ kompakt.

(4) Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $F : \mathcal{D}(F) \subset X \to Y$ heißt kompakt, falls gilt

- F ist stetig.
- F bildet beschränkte Mengen aus $\mathcal{D}(F)$ in relativ kompakte Mengen in Y ab. (anders: Aus jeder beschränkten Folge $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(F)$ kann eine Teilfolge $\{u_{n'}\}$ derart ausgewählt werden, so dass die Bildfolge $\{F(u_{n'})\} \subset Y$ konvergiert.)

Beweis. ... findet man in der einschlägigen Literatur: Brézis, Werner, Yosida, Ruzicka. Achtung! Der Begriff der kompakten Abbildung wird nicht einheitlich verwendet. □

Theorem 2.33. *(Approximationssatz für kompakte Abbildungen) Seiein X, Y Banachräume und $F : M \subset X \to Y$ kompakt, $M \neq \emptyset$ beschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Abbildung $F_n : M \subset X \to Y$, so dass*

- $\sup_{v\in M} ||Fv - F_n v||_Y \leq \frac{1}{n}$,
- $\dim spanF_n(M) < \infty$,
- $F_n(M) \subset coF(M)$.

Beweis. Wir zeigen nacheinander, dass F_n die Eigenschaften erfüllt. Zur ersten Eigenschaft:

(1) Da F kompakt und M beschränkt, ist $F(M)$ relativ kompakt. Demnach gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein endliches $\frac{1}{n}$-Netz von $F(M)$, d.h. es gibt Elemente $v_1, v_2, ..., v_m \in F(M)$, so dass jedes Bildelement$F_n(u), u \in M$ in einer Kugel mit Radius $\frac{1}{n}$ um eins dieser v_j liegt, also

$$\min_{j=1,\dots,n} ||Fu - v_j|| < \frac{1}{n}.$$

(2) Sei $a_j(u) := \max\{\frac{1}{n} - ||Fu - v_j||, 0\} \geq 0$. Für ein j gilt $a_j(u) > 0$ und es ist $F_n : M \subset X \to Y$

$$F_n(u) := \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j(u)}{\underbrace{\sum_{l=1}^{m} a_l(u)}_{>0,\text{ da ein } a_l>0}} v_j.$$

wohldefiniert. F_n heißt Schauder-Operator. (F_n hängt von n ab, da a_j durch $\frac{1}{n}$-Netz gegeben ist.)

(3) $F_n$ist stetig, denn $u \mapsto ||Fu - v_j||$ ist stetig. Es gilt

$$|\ ||Fu_1 - v_j||_Y - ||Fu_2 - v_j||_Y\ | \leq ||Fu_1 - Fu_2||_Y \to_{F \text{ kompak, also stetig}} 0 \quad \text{für } ||u_1 - u_2||_X \to 0.$$

(4) Wir überprüfen noch die Approximationseigenschaft: Es gilt

$$\begin{aligned} ||F_n u - Fu|| &= ||\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j(u)}{\sum_{l=1}^{m} a_l(u)} v_j - Fu|| \\ &= (\sum_{l=1}^{m} a_l(u))^{-1} \sum_{j=1}^{m} (a_j(u)||v_j - Fu||) \\ &\leq (\sum_{l=1}^{m} a_l(u))^{-1} \sum_{j=1}^{m} a_j(u) \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Zur zweiten Eigenschaft. Es gilt $F_n u \in span\{v_1, ..., v_m\}$ mit $v_j \in F(M)$, also $\dim spanF_n(M) < \infty$.

Zur dritten Eigenschaft. Es gilt

$$F_n u = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j(u)}{\sum_{l=1}^{m} a_l(u)} v_j \in co\{v_1, ..., v_m\} \subset F(M).$$

□

Nun können wir den Fixpunktsatz von SCHAUDER beweisen:

Beweis.

(1) O.B.d.A. können wir $0 \in \mathcal{A}$ annehmen, denn es existiert ein $u_0 \in \mathcal{A}$ und wir können überall u durch $u - u_0$ersetzen:

$$T(\bar{u} - u_0 + u_0) - u_0 = \bar{u} - u_0.$$

Wir definieren die Abbildung $\tilde{T} : \mathcal{A} - u_0 \to \mathcal{A} - u_0$, $v \mapsto T(v + u_0) - u_0$ und es gilt: Wenn T kompakt ist, dann auch $\tilde{T}$.

(2) Nach dem Approximtionssatz gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $T_n : \mathcal{A} \to X_n$, wobei X_n ein endlichdimensionaler Unterraum von X ist und für den stetigen Operator T_n gilt $||T_n v - Tv|| \leq \frac{1}{n}$ für alle $v \in \mathcal{A}$.
Sei $\mathcal{A}_n := \mathcal{A} \cap X_n$. Es gilt $0 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist konvex, abgeschlossen und beschränkt und

$$T_n(\mathcal{A}) \overset{\text{Approx.-Satz}}{\subset} T(\mathcal{A}) \overset{T:\mathcal{A}\to\mathcal{A}}{\subset} co\mathcal{A} \overset{A \text{ konvex}}{=} \mathcal{A}.$$

Also ist $T_n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ und insbesondere $T_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ (da $T_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ und $T_n : \mathcal{A} \to X_n$ und $\mathcal{A}_n := \mathcal{A} \cap X_n$). $\mathcal{A}_n := \mathcal{A} \cap X_n$ ist endlichdimensional und kompakt und es folgt mit dem FPS von Brouwer

$$\exists_{u_n \in \mathcal{A}} : T_n u_n = u_n.$$

(3) $u_n \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist beschränkt, also ist $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da T kompakt, kann eine konvergente Teilfolge von $\{Tu_n\}$ ausgewählt werden, so dass gilt

$$\exists_{w \in X} : Tu_{n'} \to w \quad \text{für } n' \to \infty.$$

Da $\mathcal{A}$ abgeschlossen, ist $w \in \mathcal{A}$. Für die Teilfolge gilt

$$\begin{aligned} ||u_{n'} - w|| &\leq ||u_{n'} - Tu_{n'}|| + ||Tu_{n'} - w|| \\ &= \underbrace{||T_{n'}u_{n'} - Tu_{n'}||}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{||Tu_{n'} - w||}_{\to 0} \\ &\to 0 \quad \text{für } n' \to \infty \end{aligned}$$

Da T stetig ist, haben wir mit $Tu_{n'} \to w$ und $u_{n'} \to w$

$$Tw = w.$$

($w \in \mathcal{A}$ ist der gesuchte Fixpunkt.)

□

Jetzt haben wir alles zusammen um den Satz von PEANO zu beweisen. Zur Übersichtlichkeit wiederholen wir ihn noch einmal:

Theorem 2.34. *(PEANO, 1890) Sei $X = \mathbb{R}^d$ versehen mit der Norm $||.||$ und sei für ein $r > 0$ und ein $u_0 \in X$ $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \to \mathbb{R}^d$ stetig.*
Dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

auf dem Intervall $I := [0,T] \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$ mit $M := \max_{(t,v) \in [0,T] \times \bar{B}(u_0,r)} ||f(t,x)||$ mindestens eine Lösung $u : I \to \bar{B}(u_0, r) \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Beweis.

(1) Wie im Beweis des Satzes von PICARD -LINDELÖF betrachten wir das äquivalente Fixpunktproblem

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \quad (= (Tu)(t)).$$

(2) Sei $\mathcal{A} := \{v \in C(I, \mathbb{R}^d) : v(t) \in \bar{B}(u_0, r)\}$. Dann ist $\mathcal{A} \neq \emptyset$,
- $\mathcal{A}$ abgeschlossen, denn für eine Folge $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ gilt für $u_n \to w$

$$||w(t) - u_0|| \leq \underbrace{||w(t) - u_n(t)||}_{\to 0} + \underbrace{||u_n(t) - u_0||}_{\leq r}.$$

  Also ist $w(t) \in \bar{B}(u_0, r)$ und damit $w \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ ist konvex, denn für $v, w \in \mathcal{A}$, $\mu \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} ||\mu v(t) + (1-\mu)w(t) - u_0|| &= ||\mu(v(t) - u_0) + (1-\mu)(w(t) - u_0)|| \\ &\leq \mu||v(t) - u_0|| + (1-\nu)||w(t) - u_0|| \\ &\leq \mu r + (1-\mu)r \\ &= r \end{aligned}$$

  Also ist $\mu v + (1-\mu)w \in C(I, \mathbb{R}^d)$.

(3) $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, denn für $v \in \mathcal{A}$ ist Tv stetig (wie im Beweis von P.-L.) und

$$\begin{aligned} ||(Tv)(t) - u_0|| &= ||\int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds|| \\ &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} ||f(s, v(s))||ds \\ &\leq |t - t_0|M \\ &\leq \frac{r}{M} M = r \end{aligned}$$

Also ist $Tv \in \mathcal{A}$.

(4) T überführt beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen. Sei $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$. da $\mathcal{A}$ beschränkt, ist auch $\{u_n\}$ gleichmäßig beschränkt und damit wegen $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ auch $\{Tu_n\}$. Schließlich ist $\{Tu_n\}$ gleichgradig stetig, denn zu $\epsilon > 0$ existiert $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s, t \in I$ mit $|s - t| < \delta$

gilt

$$\begin{aligned}
||(Tu_n)(t) - (Tu_n)(s)|| &= ||\int_s^t f(\tau, u_n(\tau))d\tau|| \\
&\leq \int_{\min(s,t)}^{\max(s,t)} ||f(\tau, u_n(\tau))||d\tau \\
&\leq |t-s|M \\
&\leq \frac{\epsilon}{M}\underbrace{M}_{*} = \epsilon
\end{aligned}$$

Nun existiert nach dem Satz von Arzelá-Ascoli* eine gleichmäßig konvergene Teilfolge $\{Tu_{n'}\} \subset \mathcal{A}$. Also ist $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ kompakt.

(5) Damit sind alle Voraussetzungen des FPS von Schauder erfüllt, d.h. es existiert ein $u \in \mathcal{A}$ mit $Tu = u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds = u$. Dieser Fixpunkt u ist eine Lösung unseres AWP. Insbesondere ist u stetig differenzierbar.

□

Bemerkungen.

(1) An den Stellen * haben wir benutzt, dass X endlichdimensional ist. (Sonst wäre die abgeschlossene und beschränkte Einheitskugel nicht kompakt.)

(2) Literatur ... : u.a. DEIMLING, ODE in Banachspaces schließt Lücke zwischen f stetig und f kompakt.

(3) Für den Fall $\dim X = \infty$ geben wir ein Gegenbeispiel: Betrachte $X = c_0$, den Raum der Nullfolgen, mit der Norm $||u|| := \sup_{i\in\mathbb{N}} |u_i|$ und das AWP

$$\begin{aligned}
u_i'(t) &= 2\sqrt{u_i(t)}, \quad t \in [0,T], i = 1, 2, ... \\
u_i(0) &= \frac{1}{i^2}
\end{aligned}$$

Jedes einzelne AWP besitzt die eindeutig bestimmte Lösung $u_i(t) = (t + \frac{1}{i})^2$. Lösbakeit in c_0: $u_0 = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ..., \frac{1}{i^2}, ...)$, $f(u) = (2\sqrt{u_1(t)}, 2\sqrt{u_2(t)}, ...)$. $f : c_0 \to c_0$ ist stetig. Für jedes $t > 0$ ist jedoch $u(t) \notin c_0$, d.h. u kann nicht in c_0 abbilden.

Theorem 2.35. *(verallgemeinerter Satz von* ARZELÀ-ASCOLI*) Eine Menge $\mathcal{M}$ von auf dem Intervall $[0,T]$ stetigen Funktionen mit Werten in einem Banachraum X ist genau dann relativ kompakt in $C([0,T],X)$, wenn sie*

- *gleichgradig stetig ist und*
- *für alle $t \in [0,T]$ die Menge $\mathcal{M}(t) := \{v(t) : v \in \mathcal{M}\} \subset X$ relativ kompakt in X ist.*

Beweis. ... Übungsaufgabe. □

Theorem 2.36. *(verallgemeinerter Satz von* Peano*) Sei $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \to X$ kompakt, wobei $(X, ||.||)$ ein Banachraum ist. Sei $t_0 \in [0,T]$, $u_0 \in X$. Dann gibt es ein $M > 0$, so dass gilt*

$$\forall_{t \in [0,T], v \in \bar{B}(u_0,r) \subset X} : ||f(t,v)|| \leq M$$

und das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

besitzt auf $I = [0,T] \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$ mindestens eine Lösung $u : I \to \bar{B}(u_0, r)$ in $C^1(I, X)$.

Beweis.

(1) Da $[0,T] \times \bar{B}(u_0, r)$ beschränkt und T kompakt, ist $T([0,T] \times \bar{B}(u_0, r))$ relativ kompakt und somit beschränkt. Die Existenz von M ist somit gesichert.

(2) Der Beweis des klassischen Satzes von Peano überträgt sich bis auf
- die Existenz von M,
- die Anwendung des Satzes von Arzelá-Ascoli.

(3) ...

(4) (alles nochmal...) fast alles wie beim klassischen Peano.

(5) Die Existenz von M ist wegen der Kompaktheit von f gesichert.

(6) Ist

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, (Tv)(t) := u_0 + \int_0^t f(s, v(s)) ds$$

kompakt? Ja, denn T ist stetig (wie klassischer Peano) und T bildet beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen ab: Für $M \subset \mathcal{A}$ (beschränkt, bedeutet keine Einschränkung, da $\mathcal{A}$ beschränkt ist) ist $T(M)$ gleichgradig stetig. Untersuche $T(\mathcal{A})$ auf relative Kompaktheit: Sei $v \in \mathcal{A}$. Betrachte $\mathcal{M}(t) := \{v(t) : v \in \mathcal{M}\} \subset X$. Hierzu

$$(Tv)(t) := u_0 + (t - t_0) \underbrace{\frac{1}{t - t_0} \int_0^t f(s, v(s)) ds}_{*}.$$

f ist stetig für $v \in \mathcal{A}$ (Verkettung stetiger Funktionen, der zugehörige Nemytzki-Operator bildet stetige Funktionen in stetige Funktionen ab). Nun ist

$$\begin{aligned} * &\in u_0 + (t - t_0)\overline{co}\{f(s, v(s) : s \in I, v \in \mathcal{A})\} \\ &\subset u_0 + (t - t_0)\overline{co} \underbrace{\{f(s, w) : s \in I, w \in \bar{B}(u_0, r)\}}_{**}. \end{aligned}$$

Da f kompakt, ist $f(I \times \bar{B}(u_0, r))$ relativ kompakt. Nach dem Satz von Mazur (Satz ?.?) ist $\overline{co}(**)$ kompakt. Also ist $\mathcal{M}(t)$ relativ kompakt. Der verallgemeinerte Arzelà-Ascoli liefert die Kompaktheit von T und mit dem Schauderschen FPS erhalten wir die Behauptung.

□

Theorem 2.37. *Unter den Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Peano ist die Lösungsmenge kompakt.*

Beweis. Jede Lösung ist Fixpunkt von T und liegt in $\mathcal{A}$. Sei $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ eine Folge von Lösungen, d.h. $Tu_n = u_n$. Da T kompakt, gibt es eine konvergente Teilfolge $\{Tu_{n'}\}$. Dann aber konvergiert auch $\{u_{n'}\} \in \mathcal{A}$. □

Die Lösungsmenge ist i.A. nicht kompakt, wenn (im Fall $\dim X = \infty$) f nur stetig ist. Wir geben ein

Beispiel. Berachte $X = l^\infty$ mit der Supremumsnorm. Sei $u = (u_1, u_2, ...)$ und

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{2u}{\sqrt{||u||}} \text{ für } ||u|| \neq 0, \quad u'(t) = 0 \text{ für } ||u|| = 0. \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist stetig. Lösungen sind z.B. $u^{(0)}(t) \equiv (0,0,0,...)$, $u^{(1)}(t) \equiv (t^2,0,0,...)$, $u^{(2)}(t) \equiv (0,t^2,0,...)$, ... Die Menge dieser Lösungen ist nicht relativ kompakt (wäre die Menge aller Lösungen, wir kennen sie nicht, kompakt, dann wäre diese Teilmenge kompakt), denn es gibt keine konvergente Teilfolge: Für $m \neq n$ ist $||u^{(m)} - u^{(n)}|| = t^2 \neq 0$ für $t > 0$.

2.5. **Einzigkeitsaussagen.**

Theorem 2.38. *Sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum und seien $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $D \subset X$ offen. Genügt die stetige Funktion $f : J \times D \subset \mathbb{R} \times X \to X$ auf $J \times D$ einer lokalen Lipschitzbedingung, so besitzt das AWP*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

mit $(t_0, u_0) \in J \times D$ höchstens eine Lösung $u \in C^1(J; D)$.

Beweis. Angenommen, es gibt zwei verschiedene Lösungen $u = u(t)$ und $v = v(t)$ auf einem gemeinsamen Intervall $\overline{J} \ni t_0$ ($\overline{J}$ muss ja nicht ganz J sein). Es sei $\bar{t} \in \overline{J}$ die erste Stelle, nach der sich u und v unterscheiden (o.B.d.A. sei $\bar{t} \geq t_0$). Es gilt also $u(\bar{t}) = v(\bar{t}) =: \bar{u} \in D$ und $u(\bar{t} + \delta) \neq v(\bar{t} + \delta)$(und wegen der Stetigkeit für alle $\delta \in (0, \bar{\delta})$ mit einem $\bar{\delta} > 0$). Wegen der lokalen Lipschitzbedingung gibt es ein $L = L(\bar{t}, \bar{u}) \geq 0$, ein $\tau = \tau(\bar{t}, \bar{u})$ und ein $r = r(\bar{t}, \bar{u})$, so dass gilt:

$$\forall_{t \in [\bar{t}-\tau, \bar{t}+\tau],\, v,w \in \bar{B}(\bar{u}, r)} : \; ||f(t, v) - f(t, w)|| \leq L||v - w||.$$

Sei $t > \bar{t}$. Es gilt sodann

$$\begin{aligned} ||u(t) - v(t)|| &= ||\int_{\bar{t}}^{t} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))ds|| \\ &\leq \int_{\bar{t}}^{t} ||(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))||\, ds \\ &\leq L \int_{\bar{t}}^{t} ||u(t) - v(t)||\, ds \end{aligned}$$

Nach dem Gronwallschen Lemma bzw. dem üblichen Trick mit dem integrierenden Faktor folgt $||u(t) - v(t)|| \leq 0$, was ein Wiederspruch zur Annahme ist. □

Theorem 2.39. *Sei $(H, (.,.), |.|)$ ein Hilbertraum, $(t_0, u_0) \in [0, T] \times H$ und sei $f : [0, T] \times H \to H$ stetig und genüge einer einseitigen Lipschitzbedingung:*

$$\exists_{L \in \mathbb{R}} \forall_{t \in [0,T],\, v,w \in H} : \quad (f(t, v) - f(t, w), v - w) \leq L|v - w|^2.$$

Dann gibt es für $t \geq t_0$ höchstens eine Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}.$$

Bemerkung. An L ist keine Vorzeichenbedingung gestellt.

Beweis. Angenommen u und v sind zwei verschiedene Lösungen rechts von t_0. Dann gilt für alle $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2 &= (u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)) \\ &= (f(t, u(t)) - f(t, v(t)), u(t) - v(t)) \\ &\leq L|u(t) - v(t)|^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

und daher

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(e^{-2L(t-t_0)}|u(t)-v(t)|^2\right) \\ = \quad & e^{-2L(t-t_0)}\left\{\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|^2 - 2L|u(t)-v(t)|^2\right\} \\ \le \quad & 0 \end{aligned}$$

Integration von t_0 bis t führt auf

$$0 \le |u(t)-v(t)|^2 \le \left\{e^{2L(t-t_0)} \cdot |u_0 - v_0|\right\} = 0$$

was im Widerspruch zur Annahme steht. □

Dabei haben wir in (2.5) von folgendem Lemma Gebrauch gemacht:

Lemma 2.40. *Sei $(H,(.,.),|.|)$ ein Hilbertraum und $u \in C^1([0,T];H)$. Dann gilt für alle $t \in [0,T]$*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = (u'(t), u(t)).$$

Beweis. Seien $t, t+h \in [0,T]$. Es ist

$$\frac{1}{h}(|u(t+h)|^2 - |u(t)|^2) = \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t), u(t+h)) + \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t), u(t)).$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \left|(u'(t),u(t)) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t),u(t))\right| &= \left|(u'(t) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)), u(t))\right| \\ &\le \left|u'(t) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t))\right| |u(t)| \\ &\le \left|\underbrace{u'(t) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t))}_{\to 0 \text{ für } h \to 0}\right| ||u||_{C([0,T];H)}, \end{aligned}$$

so dass

$$\frac{1}{h}(u(t+h)-u(t),u(t)) \to (u'(t),u(t)) \text{ für } h \to 0.$$

Ähnlich gilt

$$\begin{aligned} & \left|(u'(t),u(t)) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t),u(t+h))\right| \\ = \quad & \left|(u'(t),u(t)-u(t+h)) + (u'(t) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)), u(t+h))\right| \\ \le \quad & |u'(t)||u(t+h)-u(t)| + \left|u'(t) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t))\right| |u(t+h)| \\ \le \quad & |\underbrace{u(t+h)-u(t)}_{\to 0}| \cdot ||u'||_{C([0,T];H)} + \left|\underbrace{u'(t) - \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t))}_{\to 0}\right| ||u||_{C([0,T];H)}. \end{aligned}$$

Wegen der Setigkeit und der stetigen Differenzierbarkeit von u folgt

$$\frac{1}{h}(u(t+h)-u(t), u(t+h)) \to (u'(t), u(t)) \text{ für } h \to 0.$$

Zusammen ergibt sich die Behauptung. □

Theorem 2.41. *(Einzigkeitssatz von* NAGUMO*) Sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum, $(t_0, u_0) \in [0,T] \times X$ und sei $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \in [0,T] \times X \to X$ für ein $r > 0$ stetig und genüge der* NAGUMO*-Bedingung:*

$$\forall_{t \in [0,T], v, w \in \bar{B}(u_0, r)} \ : \ |t-t_0| \cdot ||f(t,v) - f(t,w)|| \leq ||v-w||.$$

Dann gibt es auf jedem Intervall $J \subset [0,T]$ höchstens eine Lösung $u \in C^1(J; X)$ des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & , t \in J \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}.$$

Beweis.

(1) Angenommen, u und v seien zwei verschiedene Lösungen im gemeinsamen Intervall $J \ni t_0$. Wegen der Stetigkeit gibt es $\underline{t}, \bar{t}$ mit

$$\inf J < \underline{t} \leq t_0 \leq \bar{t} < \sup J,$$

so dass

$$u(t) = v(t) \text{ für alle } t \in [\underline{t}, \bar{t}] \text{ und } u(t) \neq v(t)$$

zumindest in einer gewissen Umgebung links von $\underline{t}$ bzw. rechts von $\bar{t}$.

(2) Sei

$$m(t) := \begin{cases} \frac{||u(t)-v(t)||}{|t-t_0|} & \text{für } t \neq t_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen zeigen, dass - im Widerspruch zur Annahme - $m(t) = 0$ für alle $t \in J$. Wegen $m(t) \geq 0$ und (für $t \neq t_0$)

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{|t-t_0|} ||u(t) - u_0(v(t) - u_0)|| \\ &= \frac{1}{|t-t_0|} \left\| \int_{t_0}^{t} (u'(s) - v'(s)) ds \right\| \\ &= \frac{1}{|t-t_0|} \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{|t-t_0|} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} ||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|| ds \\ &\to ||f(t_0, u(t_0)) - f(t_0, v(t_0))|| = 0 \text{ für } t \to t_0. \end{aligned}$$

(3) Sei $h > 0$ beliebig. Dann gilt (beachte $\bar{t} \geq t_0$) analog

$$
\begin{aligned}
m(\bar{t}+h) &= \frac{||u(\bar{t}+h) - v(\bar{t}+h)||}{\bar{t}+h-t_0} \\
&\leq \frac{h}{\bar{t}+h-t_0} \cdot \frac{1}{h} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+h} ||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|| ds \\
&\leq_{\text{Nagumo}} \underbrace{\frac{h}{\bar{t}+h-t_0}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{h} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+h} \underbrace{\frac{||u(s)-v(s)||}{|s-t_0|}}_{=m(s)} ds \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+h} m(s) ds.
\end{aligned}
$$

Sei $a(h) := \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+h} m(s)ds$, so gilt also $a'(h) = m(\bar{t}+h) \leq \frac{1}{h}a(h)$ und mithin

$$\left(\ln \frac{a(h)}{h}\right)' = \frac{h}{a(h)} \cdot \frac{a'(h)h - a(h)}{h^2} = \frac{a'(h)}{a(h)} - \frac{1}{h} \leq 0.$$

(Ist $a(h) = 0$, so folgt ohnehin $m(\bar{t}+h) = 0$.) Integration liefert für beliebiges $0 < \tau < h$

$$\frac{a(h)}{h} \leq \frac{a(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\tau} m(s)ds \to m(\bar{t}) = 0 \text{ für } \tau \to 0.$$

Es folgt schließlich

$$0 \leq m(\bar{t}+h) \leq \frac{1}{h} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+h} m(s)ds = \frac{a(h)}{h} \leq 0$$

was im Widerspruch zur Annahme $m(\bar{t}+h) \neq 0$ (denn $u(t+h) \neq v(t+h)$) steht.

(4) Der Fall $t - h < \underline{t} \leq t_0$ ist analog.

□

Beispiel. Seien $X = \mathbb{R}$, $f(t,v) = \sqrt{|t|+|v|}$ und $t_0 = 0$, $u_0 = 0$. f genügt keiner Lipschitzbedingung, aber

$$|t| \cdot |f(t,v) - f(t,w)| \leq |v-w|$$

für $\frac{1}{2}\sqrt{|t|} \leq 1$, also $|t| \leq 4$. Zusammen mit dem Satz von Peano ergibt sich die eindeutige Lösbarkeit.

Theorem 2.42. *(Eindeutigkeitssatz von* Osgood*) Sei* $(X, ||.||)$ *ein Banachraum,* $(t_0, u_0) \in [0,T] \times X$ *und sei* $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0,r) \to X$ *für ein* $r > 0$ *stetig und genüge der* Osgood*-Bedingung:*

$$\forall_{t\in[0,T], v,w \in \bar{B}(u_0,r)} : \quad ||f(t,v) - f(t,w)|| \leq \omega(||v-w||)$$

wobei $\omega : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *stetig ist und die Bedingungen* $\omega(0) = 0$, $\omega(z) > 0$ *für* $z > 0$, $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$ *(*ω *ist monoton wachsend) und* $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dz}{\omega(z)} = \infty$

erfüllt. Dann gibt es auf jedem Intervall $J \subset [0,T]$ *höchstens eine Lösung* $u \in C^1(J; \bar{B}(u_0,r))$ *des AWP*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)) & t \in J \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}.$$

Beweis. ... Originalartikel von Osgood, Petrowski: Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 100 *ff.* □

Beispiel. $\omega(z) = Lz$ (L - Lipschitzkonstante, $L > 0$), $\omega(z) = Lz \cdot \ln \frac{1}{z}$, $\omega(z) = Lz \cdot \ln \frac{1}{z} \ln \ln \frac{1}{z}$, ...

2.6. **Verlauf der Lösungen im Großen und maximal fortgesetzte Lösungen.**

Einige Aussagen über die globale Lösbarkeit und damit auch über die maximale Lösbarkeit hatten wir bereits. Mit maximal fortgesetzter Lösung/ Lösung im Großen meint man das Auffinden eines maximalen Intervalls, in dem eine Lösung existiert, und die Untersuchung derselben.

Beispiele.

(1) Gegeben sei das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} \\ u(1) = 2 \end{cases},$$

welches nach dem Satz von Picard-Lindelöf auf $[0,T] \cap [1-a, 1+a]$, $a = \min(\frac{r}{M}, \frac{1}{2L})$ genau eine Lösung besitzt. Um die Lipschitzbedingung zu garantieren, ist $r < 2$ zu wählen (so dass $u_0 - r > 2 - 2 = 0$). Dann ist $\sqrt[3]{v} \leq \sqrt[3]{2+r} =: M$, $|\sqrt[3]{v} - \sqrt[3]{w}| = \frac{1}{3}(\bar{v})^{-\frac{2}{3}}|v-w|$ und $\frac{1}{3}(\bar{v})^{-\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}(2-r)^{\frac{2}{3}}$. Wähle nun r geeignet, so dass a maximal wird. Suche also einen Schnittpunkt von $r \mapsto r(2+r)^{-\frac{1}{3}}$, $r \mapsto \frac{3}{2}(2-r)^{\frac{2}{3}}$, etwa $r = 1,476$ und damit $a \approx 0,974$. Wir erhalten als Existenzintervall ungefähr $[1 - 0,974, 1 + 0,974]$. Die Lösung kann jedoch fortgesetzt werden, etwa so:

$$u(t) = (\frac{2}{3}(t-1) + 2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \text{ für } t > 1 - \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \approx -1,38.$$

Man kann diese Lösung sogar noch weiter fortsetzen, denn $u(t) \to 0$ für $t \to t^* := 1 - \frac{3}{2} - 2^{\frac{2}{3}}$ und $u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} \to 0$ für $t \to t^*$. Sei daher

$$u(t) = \begin{cases} (\frac{2}{3}(t-1) + 2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} & t > t^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Lösung ist nun maximal, da sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(2) Gegeben sei das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}.$$

Die Lösung $u(t) = \frac{1}{1-t}$ kann auf $]-\infty, 1[$ fortgesetzt werden.

Definition 2.43. (Graph, (maximale) Fortsetzung)

(1) Sei $u = u(t)$ eine auf einem Intervall $J_u \ni t_0$ gegebene Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & t \in J_u, u \in C^1(J_u; X) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}. \tag{2.6}$$

Dann ist der Graph von u definiert als

$$\text{graph } u := \{(t, u(t)) : t \in J_u\} \subset J_u \times X.$$

(2) Eine auf einem Intervall J_u gegebene Lösung von (2.6) heißt Fortsetzung einer auf einem Intervall J_v gegebenen Lösung v von (2.6), falls

$$\text{graph } u \supseteq \text{graph } v,$$

falls also $J_u \supseteq J_v$ und $u(t) = v(t)$ für alle $t \in J_v \subseteq J_u$.

(3) Eine auf einem Intervall J_u gegebene Lösung von $(*)$ heißt maximal fortgesetzt, falls sie keine echte Fortsetzung besitzt, falls also aus graph $v \supseteq$ graph u stets graph $v =$ graph u (und mithin $v = u$ auf $J_v = J_u$) folgt.

Beispiel. Betrachte das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases}.$$

Für jedes $0 \leq \alpha \leq \infty$ ist

$$u_\alpha = \begin{cases} 0 & t \leq \alpha \\ \frac{(t-\alpha)^2}{4} & t \geq \alpha \end{cases}, \qquad u_\infty \equiv 0$$

für $t \in \mathbb{R}$ eine maximal fortgesetzte Lösung der Lösung $u \equiv 0$, $J_u =]-\infty, 0[$. (Achtung: Zur Lösung gehört eine Intervallangabe!)

Theorem 2.44. *(globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz) Sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum und seien $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $D \subset X$ offen. Ferner sei $f : J \times D \subset \mathbb{R} \times X \to X$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitzbedingung. Dann existiert zu jedem Paar $(t_0, u_0) \in J \times D$ genau eine maximal fortgesetzte Lösung des AWP*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}.$$

Das maximale Existenzintervall $J_{max} = J_{max}(t_0, u_0) \subset J$ ist offen: $J_{max}(t_0, u_0) = (\alpha, \beta)$ mit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Dabei gilt - sofern im Falle $\dim X = \infty$ f auf beschränkten Teilmengen von D, die positven Abstand zu ∂D haben, beschränkt ist - entweder

$$\alpha = \inf J \textit{ bzw. } \beta = \sup J$$

oder

$$\lim_{t \to \alpha+(\beta-)} \min(\mathit{dist}(u(t), \partial D), ||u(t)||^{-1}) = 0.$$

Bemerkungen.

- $\operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} ||y - x||$ für $M \subset X$, $\operatorname{dist}(x, \emptyset) := \infty$

- Ist f auf D stetig und $D' \subset D$ eine echte beschränkte Teilmenge von D mit $\operatorname{dist}(D', \partial D) > 0$ und $\dim X < \infty$ dann gilt $\overline{D'} \subset D$, so dass f auf der kompakten Menge $\overline{D'}$ stetig ist, also f auf $\overline{D'} \subset D$ beschränkt ist.

- Für das Existenzintervall sind also folgende Fälle möglich: $(\alpha, \beta) = J$ (globale Lösbarkeit), $\alpha = \inf J$ und $\beta \neq \sup J$ und $\lim_{t \to \beta-} ||u(t)|| = \infty$ oder $\alpha = \inf J$ und $\beta \neq \sup J$ und $\lim_{t \to \beta-} \operatorname{dist}(u(t), \partial D) = 0$ sowie entsprechende Fälle für $\alpha \neq \inf J$.

- Beachte: Ohne die zusätzliche Forderung im Falle $\dim X = \infty$ muss $\lim ||u(t)||$ überhaupt nicht existieren! (s. Deimling, S. 7 *ff.*)

Beweis.

(1) Sei $(t_0, u_0) \in J \times D$ beliebig, aber fest gewählt. Da J und D offen, gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöf ein $a_1 > 0$, so dass das AWP genau eine Lösung u_1 im Intervall $[t_0 - a_1, t_0 + a_1] \subset J$ besitzt. Diese Lösung kann nach rechts fortgesetzt werden. Dann wiederum gibt es ein $a_2 > 0$, so dass das AWP

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_0 + a_1) = u_1(t_0 + a_1) \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt, die wir mit $u_2$bezeichnen wollen, und die auf $[t_0 + a_1 - a_2, t_0 + a_1 + a_2] \subset J$ existiert.

(2) Wegen des Satzes über die Einzigkeit bei lokaler Lipschitzbedingung gilt für alle $t \in [t_0 + a_1 - a_2, t_0 + a_1 + a_2]$ $u_1(t) = u_2(t)$ und mit

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & t \in [t_0 - a_1, t_0 + a_1] \\ u_2(t) & t \in [t_0 + a_1, t_0 + a_1 + a_2] \end{cases}$$

ist eine echte Fortsetzung von u_1(sowie u_2) gegeben.

(3) Wir können u_1 entsprechend auch nach links fortsetzen und wir können dies beliebig oft wiederholen, da J und D offen sind. (Beachte: Die Funkionswerte liegen wegen Picard-Lindelöf stets in D!)

(4) Seien

$$\alpha = \alpha(t_0, u_0) := \inf\{t \in J : \text{ Das AWP besitzt eine Lösung auf } [t, t_0]\}$$
$$\beta = \beta(t_0, u_0) := \sup\{t \in J : \text{ Das AWP besitzt eine Lösung auf } [t_0, t]\}$$

(wegen (3) und der Eigenschaften der reellen Zahlen existieren α, β). Dann gibt es nach dem Satz über die Einzigkeit genau eine Lösung $u :]\alpha, \beta[\to D$ des AWP. Das Lösungsintervall $]\alpha, \beta[$ ist offen, denn sonst könnte obiges Fortsetzungsargument auf $(\alpha, u(\alpha))$ bzw. $(\beta, u(\beta))$ noch einmal angewandt werden.

(5) Nach Konstruktion ist $]\alpha, \beta[$ maximal und die Lösung ist <u>die</u> maximal fortgesetzte Lösung: Wegen der Lipschitzbedigung und der daraus folgenden Einzigkeitsaussage gibt es stets nur genau eine Fortsetzung auf einem gegebenen Lösungsintervall.

Für den Rest des Beweises (Randverhalten der Lösung) sei auf AMANN, S. ... verwiesen.

□

.

Definition 2.45.

- Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige Menge und $\leq$ eine durch eine Menge $\mathbb{R}_{\leq} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ erklärte Relation. Diese heißt Halbordnung auf $\mathcal{M}$, falls gilt

  (1) $x \leq x$ (Reflexivität, d.h. $(x,x) \in \mathbb{R}_{\leq}$)
  (2) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)
  (3) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

- Ist für je zwei Elemente $x, y \in \mathcal{M}$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ erfüllt, so heißt $\mathcal{M}$ geordnet (alle Elemente aus $\mathcal{M}$ sind miteinander vergleichbar)

- Ein Element z heißt maximales Element, wenn für alle $x \in \mathcal{M}$ aus $z \leq x$ folgt $z = x$ (es gibt kein x mit $z < x$)

- Ein Element y einer halbgeordneten Menge $\mathcal{M}$ heißt obere Schranke der Teilmenge $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, wenn für alle $x \in \mathcal{M}'$ gilt: $x \leq y$.

- Eine Teilmenge $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ einer halbgeordneten Menge heißt Kette, wenn je zwei Elemente aus $\mathcal{M}'$ vergleichbar sind (wenn also $\mathcal{M}'$ mit der Halbordnung auf $\mathcal{M}$ geordnet ist)

Lemma 2.46. *(von ZORN (1935)) Besitzt jede Kette einer halbgeordneten Menge $\mathcal{M}$ eine obere Schranke, so gibt es mindestens ein maximales Element in $\mathcal{M}$.*

Bemerkung. Das Lemma von Zorn ist eines der elementaren - nicht aber trivialen - Aussagen der Mathematik und kommt aus der Mengenlehre. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Satz von ZERMELO (s. EBBINGHAUS, Einführung in die Mengenlehre).

Lemma 2.47.

(1) *Die Menge aller Lösungen von*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ist vermöge $u \leq v :\Leftrightarrow$ graph $u \subseteq$ graph v halbgeordnet.

(2) *Sei u eine auf $I \ni t_0$ gegebene Lösung von (2.6). Dann existiert mindestens eine maximal fortgesetzte Lösung.*

Bemerkung. Wir haben nichts über die Existenz einer Lösung ausgesagt! Lediglich unter der Annahme der Existenz einer Lösung folgt auch die Existenz einer maximal fortgesetzten Lösung.

Beweis. ad 1) klar

ad 2) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Fortsetzungen von u. Offenbar ist $\mathcal{M}$ halbgeordnet (nicht aber geordnet). Sei $\mathcal{M}'$ eine geordnete Teilmenge (Kette). Dann gilt für $v_1, v_2 \in \mathcal{M}'$ sicher $v_1(t) = v_2(t)$ für alle $t \in I_1 \cap I_2$ und $I_1 \cap I_2 = I_1$ oder I_2. Offenbar gibt es für $\mathcal{M}'$ eine obere Schranke, die durch die Lösung auf $\bigcup_{u_\alpha \in \mathcal{M}'} I_\alpha$ gegeben ist. Dabei gehört die Lösung auf $\bigcup_{u_\alpha \in \mathcal{M}'} I_\alpha$ jedenfalls zu $\mathcal{M}$, denn es ist eine Fortsetzung von u. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also mindestens ein maximales Element in $\mathcal{M}$, das nichts anderes als eine maximal fortgesetze Lösung von (2.6) ist. $\square$

Theorem 2.48. *Seien $X = \mathbb{R}^d$ und $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $D \subset \mathbb{R}^d$ offen. Ferner sei $f : J \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann existiert für alle $(t_0, u_0) \in J \times D$ mindestens eine maximal fortgesetzte Lösung des AWP*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} .$$

Beweis. (1) Nach Peano gibt es mindestens eine lokale Lösung.

(2) Nach dem letzen Lemma gibt es mindestens eine maximale fortgesetzte Lösung. $\square$

Bemerkungen. Die Lösungen lassen sich wieder bis zum Rand von $J \times D$ fortsetzen. Wie beim Satz über die globale Existenz und Eindeutigkeit kann man hier analoge Aussagen über das Randverhalten machen.

2.7. Zur Existenz und Einzigkeit von Lösungen im Sinne von Carathéodory.

Idee. Im Gegensatz zu den vorigen Betrachtungen soll

- die DGL nur noch fast überall (f.ü.) gelten,
- die rechte Seite $f = f(t, v)$ soll in t nur noch Lebesgue-messbar und beschränkt sein.

Diese Verallgemeinerungen erlauben einen verallgemeinerten Lösungsbegriff, die Lösung muss z.B. nur noch f. ü. definiert sein, und ermöglichen die Untersuchung einer zeitabhängigen partiellen DGL nach der Diskretisierung im Ort (Galerkin-Verfahren), also das hierdurch entstehende endliche System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Definition 2.49. Eine Funktion $g = g(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ heißt absolut stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes endliche System paarweise disjunkter Teilintervalle $]a_k, b_k[$ mit $k = 1, ..., n$ und der Gesamtlänge

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} ||g(b_k) - g(a_k)||_{\mathbb{R}^d} < \varepsilon.$$

Bemerkung. Offenbar gilt: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ absolut stetig $\Rightarrow$ stetig. ($g(t) = t \cos \frac{\pi}{2t}$ ist zwar stetig, nicht jedoch absolut stetig.)

Insbesondere aber gilt der

Theorem 2.50. *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)*

(1) *Ist $g : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ absolut stetig, so existiert fast überall auf $[0, T]$ die klassische Ableitung g' und diese ist Lebesgue-integrierbar, wobei gilt*
$$g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau$$
für alle $t \in [0, T]$, $t_0 \in [0, T]$ fest.

(2) *Ist $v : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ Lebesgue-integrierbar, so ist das Integral als Funktion der oberen Grenze,*
$$g(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau$$
für alle $t \in [0, T]$, $t_0 \in [0, T]$, fest eine absolut stetige Funktion und es gilt
$$g'(t) = v(t) \qquad \text{f.ü. in } [0, T].$$

Bemerkungen.

- Die hier auftretenden (Lebesgue-) Integrale über $\mathbb{R}^d$-wertige Funktionen können komponentenweise definiert werden, also für $v : [0, T] \to \mathbb{R}^d$
$$\int v(\tau) d\tau = \left(\int v_1(\tau) d\tau, \int v_2(\tau) d\tau, ..., \int v_d(\tau) d\tau \right).$$

- Der Hauptsatz lässt sich - mit dem Bochner Integral - auf reflexive Banach-Räume X mit $\dim X = \infty$ verallgemeinern (Satz von Komura).

Definition 2.51. Eine Funktion $f : [0,T] \times M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ genügt auf $[0,T] \times M$ einer Carathéodory-Bedingung genau dann, wenn

- die Abbildungen $t \mapsto f_i(t,v)$ $(i = 1,...,d)$ für alle $v \in M$ auf $[0,T]$ Lebesgue-messbar sind und
- die Abbildungen $t \mapsto f_i(t,v)$ $(i = 1,...,d)$ für alle $t \in [0,T]$ auf M stetig sind.

Lemma 2.52.

(1) *Genügt f der Carathéodory-Bedingung, so bildet der zugehörige Nemyzki-Operator Lebesgue-messbare Funktionen wieder in Lebesgue-messbare Funktionen ab.*

(2) *Genügt f zusätzlich einer Majorantenbedingung, existiert also eine Lebesgue-integrierbare Funktion m, so dass*
$$|f_i(t,v)| \leq m(t) \qquad \forall_{i=1,\ldots,d;(t,v)\in[0,T]\times M},$$
so bildet der zugehörige Nemyzki-Operator Lebesgue-integrierbare Funktionen wieder in Lebesgue-integrierbare Funktionen ab.

Beweis. **ad 1)** Sei $(Fv)(t) := f(t, v(t))$, also F der zugehörige Nemyzki-Operator. Die Behauptung lautet $F : \mathcal{L}^d \to \mathcal{L}^d$, wenn $\mathcal{L}$ den Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen bezeichnet. Sei v Lebesgue-messbar.
Dann gibt es eine Folge einfacher Funktionen $v^{(n)}$, so dass
$$v^{(n)}(t) \to v(t) \quad \text{f.ü. auf } [0,T].$$
Wegen der Stetigkeit von f_i im zweiten Argument folgt sofort
$$(F_i v^{(n)})(t) = f_i(t, v^{(n)}(t)) \to f_i(t, v(t)) = (F_i v)(t) \quad \text{f.ü. in } [0,T].$$
Ferner gilt
$$f_i(t, v^{(n)}(t)) = f_i(t, \sum_{j=1}^{m_n} v_j^{(n)} \chi_{B_j^{(n)}}(t)) = \sum_{j=1}^{m_n} \underbrace{f_i(t, v_j^{(n)})}_{\text{L-messabr lt. Vor.}} \underbrace{\chi_{B_j^{(n)}}(t)}_{\text{L-messbar}},$$
so dass $F_i v^{(n)}$ Lebesgue-messbar ist und folglich auch der Grenzwert $F_i v$ und also Fv.
ad 2) Wegen
$$|f_i(t,v)| \leq m(t)$$
und $m \in L^1(0,T)$, ist auch die Lebesgue-messbare Funktion $F_i v$ und also auch Fv Lebesgue-integrierbar. □

Theorem 2.53. *(lokale Lösbarkeit, Carathéodory (1918)) Sei $X = \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $(t_0, u_0) \in [0,T] \times X$. Genügt $f : [0,T] \times \bar{B}(u_0, r) \mapsto \mathbb{R}^d$ einer Carathéodory- und einer Majorantenbedingung, so dass $||f(t,v)|| \leq m(t)$, so besitzt die Integralgleichung*
$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

auf einem Intervall $[t_0-\tau, t_0+\tau]\cap[0,T] =: I_\tau$ *mindestens eine Lösung* $u : I_\tau \to \bar{B}(u_0,r)$. *Dabei ist* u *absolut stetig. Ferner ist* $\tau > 0$ *so zu bestimmen, dass*

$$\max_{t\in I_\tau}\left|\int_{t_0}^t m(s)ds\right| \le r.$$

Bemerkungen.

- Da u absolut stetig, gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass u fast überall der Differentialgleichung genügt. u heißt Lösung im Sinne von Sinne von Charathéodory.
- Ist f stetig auf $[0,T]\times\bar{B}(u_0,r)$ und $M := \max||f(t,v)||$, so gilt (bis auf eine Konstante aus der Äquivalenz der Normen in $\mathbb{R}^d$)

  $$m(t) \text{ kann gleich } M \text{ gewählt werden}$$

  und

  $$\max_{t\in I_\tau}\left|\int_{t_0}^t m(s)ds\right| \le M\max_{t\in I_\tau}|t-t_0| \le M\cdot\tau \le_! r$$

  und wir haben die Aussage von Peano.

Beweis. (geht analog zum Satz von Peano)

(1) $\mathcal{A} := \left\{v\in\mathcal{C}(I_\tau) : v(t)\in\bar{B}(u_0,r)\right\}$. Wie schon bei Peano gezeigt, gilt $\mathcal{A}\neq\emptyset$, $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen, beschränkt, konvex. (Voraussetzungen des Satzes von Schauder!)

(2) Die Abbildung $(Tv)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s,v(s))ds$ für $t\in I_\tau$ ist wohldefiniert, denn nach unserem Lemma ist $t\mapsto f(t,v(t))$ Lebesgue-integrierbar.

(3) Es gilt $T:\mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}$, denn nach dem Haupsatz der Differential- und Integralrechung ist Tv sogar absolut stetig und außerdem gilt

$$\begin{aligned} ||(Tv)(t)-u_0|| &\le \left|\int_{t_0}^t ||f(s,v(s))||ds\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^t m(s)ds\right| \le r \end{aligned}$$

für alle $t\in I_\tau$.

(4) T ist stetig, denn aus $v_n\to v$ in $\mathcal{A}$ folgt nach Carathéodory-Bedingung $f(t,v_n(t))\to f(t,v(t))$ f.ü. in I_τ. Da

$$||f(t,v_n(t))|| \le m(t), \qquad m\in L^1(]0,T[),$$

folgt mit dem Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue $t\mapsto f(t,v(t))\in L^1$ (ist schon aus Lemma (?.?) bekannt) und

$$\int_{t_0}^t f(s,v_n(s))ds \to \int_{t_0}^t f(s,v(s))ds,$$

was die Stetigkeit von T bedeutet, denn

$$||Tv_n - Tv||_{C(I_T)} = \max_{t\in I_\tau}||\int_{t_0}^t f(s,v_n(s)) - \int_{t_0}^t f(s,v(s))||.$$

(5) T überführt beschränkte in relativ kompakte Mengen, denn $T\mathcal{A}$ ist relativ kompakt (Arzelà-Ascoli), denn $T\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ ist beschränkt und $T\mathcal{A}$ ist gleichgradig stetig (denn

$$||(Tv)(t_1) - (Tv)(t_2)|| = ||\int_{t_2}^{t_1} f(s, v(s))ds|| \leq \int_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)} m(s)ds)$$

Nach dem Satz von Schauder besitzt T mindestens einen Fixpunkt, dieser ist Lösung der Integralgleichung.

□

Bemerkung. Es gibt viele weitere Aussagen zu Carathéodory-Lösungen, siehe etwa J. Hale: Ordinary Differential Equations, S. 28 ff., E. A. Coddington/ N. Levinson: Theorie Of Ordinary Differential Equations, S. 42 ff.

Insbesondere gilt

Theorem 2.54. *(globale Lösbarkeit) Die Voraussetzungen seien wie oben, statt* $\bar{B}(u_0, r)$ *schreibe* $\mathbb{R}^d$. *Dann existiert die Lösung auf ganz* $[0,T]$, *also:*
$f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *genüge der Carathéodory-Bedingung, so dass für ein* $m \in L(]0,T[)$

$$||f(t, v_n(t))|| \leq m(t) \qquad \forall_{(t,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}.$$

Dann gibt es mindestes eine Lösung u *auf* $[0,T]$ *der Integralgleichung*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds,$$

so dass

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \textit{f.ü. in } [0,T] \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}.$$

Theorem 2.55. *(lokal eindeutige Lösbarkeit)* $f : [0,T] \times M \to \mathbb{R}^d$, M *offen, genüge der Carathéodory-Bedingung auf* $[0,T] \times M$ *und einer verallgemeinerten lokalen Lipschitz-Bedingung:*

$$\forall_{K\subset M, K \textit{ kompakt}} \exists_{l=l(t)\in L^1(]0,T[)} \forall_{t\in[0,T],v,w\in K} : ||f(t,v) - f(t,w(t))|| \leq l(t)||v-w||$$

Dann gibt es genau eine lokale Lösung u.

3. Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Stabilität, Zeitdiskretisierung

Für das 3. und 4. Kapitel werden meist nur die Stellen angegeben, an denen man den Vorlesungsstoff im Buch

Emmrich, Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen, Vieweg 2004

wiederfinden kann. Das Buch ist in der Mathematischen Fachbibliothek und bis zum Ende des Semesters im Semesterapparat zu finden.

3.1. Stetige und differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von den Daten. Das Gronwallsche Lemma.

... ist auf den Seiten 180 - 184 nachzulesen.

3.2. Dissipative Systeme.

... ist auf den Seiten 184 - 188 nachzulesen, wobei nach Definition 7.3.7 das Folgende einzuschieben ist:

Theorem 3.1. *Seien $X = \mathbb{R}$, $f = f(t,v) \in C(G)$ für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es existiere $\frac{\partial f}{\partial v}$ mit $\frac{\partial f}{\partial v} \in C(G)$. Dann gibt es für alle Anfangsdaten $(t_0, u_0) \in G$ genau eine maximal fortgesetzte Lösung*

$$u = u(t) = u(t; t_0, u_0)$$

des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

auf dem maximalen Existenzintervall $I(t_0, u_0)$.
Ferner existieren alle partiellen Ableitungen von

$$(t, \xi, \eta) \mapsto (u(t; \xi, \eta))$$

als stetige Funktion auf $\Omega := \{(t; \xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in G \text{ und } t \in I(\xi, \eta)\}$. Für alle $(t; \xi, \eta) \in \Omega$ gilt zudem

$$u_\xi(t; \xi, \eta) + u_\eta(t; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) = 0 \tag{3.1}$$

sowie

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\eta(t; \xi, \eta) = f_u(t, u(t; \xi, \eta)) \cdot u_\eta(\xi, \eta) \\ u_\eta(\xi; \xi, \eta) = 1 \end{cases} . \tag{3.2}$$

Bemerkung. Formal ergeben sich die Beziehungen (3.1), (3.2) aus dem Ableiten der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t; \xi, \eta) = f(t, u(t; \xi, \eta)).$$

3.3. Zeitdiskretisierung durch einfache Einschrittverfahren.

... ist auf den Seiten 192 - 199 nachzulesen.

3.4. Stabilität und der Satz von Ljapunow. Asymptotisches Verhalten.

Im folgenden sei $(X, ||.||)$ ein Banachraum und $f : [0, \infty[\times M \to X$ stetig und genüge auf $M \subset X$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung.
Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t > 0 \\ u(t_0) = u_0, & u_0 \in X \end{cases}, \tag{3.3}$$

welches genau eine maximal fortgesetzte Lösung auf einem maximalen Intervall $I(u_0)$ besitzt.

Definition 3.2. (Stabilität im Sinne von Ljapunov)

(1) Ein Punkt $\bar{u} \in M \subset X$ heißt Gleichgewichts- oder kritischer oder stationärer Punkt (Zustand) des AWP (3.3), falls $f(t, \bar{u}) = 0$ für alle $t \geq 0$.

(2) Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{u}$ heißt stabil, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $u_0 \in M$ aus $||u_0 - \bar{u}|| < \delta$ folgt, es gibt genau eine Lösung $u = u(t)$ des AWP (3.3) für alle $t \geq 0$ und es gilt

$$||u(t) - \bar{u}|| < \varepsilon \text{ für alle } t > 0.$$

(3) Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{u}$ heißt instabil, wenn $\bar{u}$ nicht stabil ist.

Bemerkungen.

(1) Gleichgewichtspunkte nichtautonomer Systeme sind recht selten. Es gibt aber Verallgemeinerungen des Stabilitätsbegriffes.
(2) Ist $\bar{u} \in M$ ein Gleichgewichtspunkt, so ist $u(t) \equiv \bar{u}$ die Lösung des AWP (3.3) mit $u_0 = \bar{u}$.

(3) Ist $\bar{u} \in M$ ein Gleichgewichtspunkt bzgl. f, so ist $0 \in M - \bar{u}$ ein Gleichgewichtspunkt bzgl. $g(t, v) := f(t, v + \bar{u})$, $v \in M - \bar{u}$, betrachte sodann

$$\begin{cases} v'(t) = g(t, v(t)) \\ v(0) = v_0 \end{cases}.$$

Dies rechtfertigt, dass in der Literatur oftmals nur Nullagen als kritische Punkte betrachtet werden.

Beispiel. Wir betrachten das mathematische Pendel

$$\begin{cases} x''(t) + \sin x(t) = 0, & t > 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = y_0 \end{cases}$$

($x(t)$ bezeichnet die Auslenkung des Pendels zur Zeit $t > 0$) als System erster Ordnung

$$\underline{u}'(t) = \underline{f}(\underline{u}(t)) := (u_2(t), -\sin u_1(t))^T = (x'(t), \sin x(t))^T,$$

wobei $\underline{u}(t) = (x(t), x'(t))$. Gleichgewichtslagen sind $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)^T$ mit $\underline{f}(\underline{\bar{u}}) = (\bar{u}_2, -\sin\bar{u}_1) =_! (0,0)^T$, also $\bar{u} = (0,0)^T$, $(\pi, 0)^T$, $(-\pi, 0)^T$. Der Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ ist stabil, die beiden anderen sind dagegen instabil.

Bemerkungen.

- Man kann auch noch die Abhängigkeit bzgl. t_0 betrachten und zwischen "stabil" und "gleichmäßig stabil" (bzgl. t_0) unterscheiden. Siehe dazu Amann, S. 220 f.
- Zudem kann man die Stabilität auch auf die Betrachtung von nach rechts maximalen Intervallen $[t_0, t^+[$ mit $t^+ \neq \infty$ beziehen.
- Schließlich kann man die Stabilität beliebiger Lösungen (nicht nur von Gleichgewichtspunkten) untersuchen.

Definition 3.3.

(1) Ein Gleichgewichtspunkt heißt attraktiv, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass für alle $u_0 \in M$ mit $||u_0 - \bar{u}|| < \alpha$ genau eine Lösung $u = u(t)$ des AWP (3.3) für alle $t \geq 0$ existiert und $\lim_{t\to\infty} ||u(t) - \bar{u}|| = 0$ gilt.

(2) Ein attraktiver, stabiler Gleichgewichtspunkt heißt asymptotisch stabil.

(3) Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{u} \in M$ heißt exponentiell stabil, wenn es $\alpha, c, \lambda > 0$ gibt, so dass für alle $u_0 \in M$ mit $||u_0 - \bar{u}|| < \alpha$ genau eine Lösung $u = u(t)$ des AWP (3.3) für alle $t \geq 0$ existiert und

$$||u(t) - \bar{u}|| \leq c \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{für alle } t \geq 0 \tag{3.4}$$

gilt.

Bemerkungen.

- Für rechte Seiten f, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügen, folgt aus der exponentiellen die asymptotische Stabilität, denn
  (1) exponentiell stabil $\Rightarrow$ attraktiv,
  (2) exponentiell stabil $\Rightarrow$ stabil, denn wegen (3.4) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a > 0$ und ein $\alpha > 0$, so dass für alle $u_0 \in M$ mit $||u_0 - \bar{u}|| < \alpha$ gilt
  $$||u(t) - \bar{u}|| \leq c \cdot e^{-\lambda a} < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq a.$$
  Wegen Satz (?.?) über die stetige Abhängigkeit von den Daten ergibt sich "Stabilität" auch auf $[0, a]$.
- Ist $d = 1$, so folgt aus Attraktvität auch Stabilität, i.A. gilt dies jedoch nicht.

Beispiele.

- Betrachte $u'(t) = u(t)$. Dann ist $\bar{u} \equiv 0$ ein Gleichgewichtspunkt. Wegen
$$|u(t) - \bar{u}| = |u(t)| = |e^t u_0| \to \infty \quad \text{für } t \to \infty$$
ist $\bar{u}$ jedoch instabil.

- Betrachte $u'(t) = -u(t)$. Dann ist $\bar{u} \equiv 0$ ein Gleichgewichtspunkt. Wegen
$$|u(t) - \bar{u}| = |u(t)| = |e^{-t} u_0| \to 0 \quad \text{für } t \to \infty$$
ist $\bar{u}$ asymptotisch (sogar exponentiell) stabil.

- Betrachte
$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) + u(t)^2 = -u(t)(1 - u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
(logistisches Wachstum). Der Gleichgewichtspunkt $\bar{u} = 1$ ist instabil, $\bar{u} = 0$ ist stabil.

- Betrachte
$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{u}(t_0) = \underline{u}_0 \end{cases}$$
also das Sytem
$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -u(t) \end{aligned}$$
mit den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$. Die Lösung ist wegen $u''(t) = -u(t)$ durch
$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} v_0$$
gegeben. $\bar{u}$ ist wegen $||\underline{u}(t)||_2^2 = ||\underline{u}_0||_2^2$ bzw.
$$\frac{d}{dt}||\underline{u}(t)||_2^2 = \underline{u}'(t) \cdot \underline{u}(t) = \underline{u}^T A \underline{u} = uv - vu$$
stabil (aber nicht asymptotisch stabil).

Im folgenden sei stets $X = \mathbb{R}^d$.

Theorem 3.4. *(Stabilität autonomer linearer Systeme) Vorgelegt sei das AWP*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \quad t > 0, A \in \mathbb{R}^{d \times d} \\ u(0) = u_0 \end{cases}. \tag{3.5}$$

Dann ist die Nulllösung ein Gleichgewichtspunkt und sie ist

(1) *stabil genau dann, wenn für alle Eigenwerte λ von $-A$ gilt $\Re(\lambda) \geq 0$ und Eigenwerte mit $\Re(\lambda) = 0$ halbeinfach sind (geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit)*

(2) *exponentiell und folglich asymptotisch stabil genau dann, wenn für alle Eigenwerte* λ *von* $-A$ *gilt* $\Re(\lambda) < 0$.

(3) *instabil mit einer exponentiell wachsenden Lösungskomponente, falls es einen Eigenwert* λ *von* $-A$ *mit* $\Re(\lambda) > 0$ *gibt.*

(4) *instabil mit einer höchstes polynominal wachsenden Lösungskomponente, falls es einen nicht halbeinfachen Eigenwert* λ *von* $-A$ *mit* $\Re(\lambda) = 0$ *gibt und sonst* $\Re(\lambda) \leq 0$ *gilt.*

Bemerkungen.

- In der Literatur wir oft auch $u' = Au$ betrachtet; es sind also die Vorzeichen zu beachten.

- Die eindeutige Lösbarkeit von (**??**) auf $[0, \infty[$ hatten wir schon gezeigt, und zwar für alle $u_0 \in \mathbb{R}^d$. Ferner galt die Lösungsdarstellung
$$u(t) = e^{-tA}u_0 = \sum_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j t} \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} \frac{(-t)^l}{l!}(A - \lambda_j I)^l u_{0j},$$
wobei $u_{0j} \in \ker(A - \lambda_j I)^{\nu_j}$, $u_0 = u_{01} + u_{02} + ... + u_{0n} \quad (n \leq d)$ und ν_j algebraische Vielfachheit zum Eigenwert λ_j von A.

Für den Beweis benötigen wir das folgende

Lemma 3.5. *Sei* $||.||$ *eine beliebige induzierte Matrixnorm und* $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

(1) *Gilt für alle Eigenwerte* λ *von* B $\Re(\lambda) \leq 0$ *und sind Eigenwerte mit* $\Re(\lambda) = 0$ *halbeinfach, so gibt es ein* $c \geq 1$, *so dass*
$$||e^{tB}|| \leq c \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(2) *Gilt für alle Eigenwerte* λ *von* B $\Re(\lambda) < 0$, *so gibt es Konstanten* $c \geq 1$ *und* μ *mit* $0 < \mu < \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}$, *so dass*
$$||e^{tB}|| \leq ce^{-\mu t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$
Genauer gilt: Zu jedem μ *mit* $0 < \mu < \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}$ *existiert ein* $c \geq 1$, *so dass* $||e^{tB}|| \leq ce^{-\mu t}$ *für alle* $t \geq 0$ *gilt. Sind alle Eigenwerte halbeinfach, so kann sogar* $\mu = \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}$ *gewählt werden.*

Beweis. ... Übung. □

Bemerkung. Die Aussage des Lemmas kann nicht verbessert werden.

Beweis. (Satz über die Stabilität autonomer linearer Systeme) Dass die Nulllösung ein Gleichgewichtspunkt ist, ist klar. Der Rest des Satzes folgt mit $B = -A$ wegen
$$||u(t)|| = ||e^{-tA}u_0|| \leq ||e^{-tA}|| \cdot ||u_0||$$
unmittelbar aus Lemma (3.5). □

Bemerkung. Wie Lemma (3.5) und Satz (3.4) zeigen, haben wir bei linearen Systemen sogar asymptotische und exponentielle Stabilität für alle $u_0 \in \mathbb{R}^d$, also globale asymptotische und exponentielle Stabilität. (globale Attraktivität ist bei nichtlinearen Systemen ziemlich selten)

Wir kommen nun zu "fast linearen" Systemen und der Betrachtung nichtlinearer Systeme als "Störung" eines linearen Systems.

Theorem 3.6. *(*LJAPUNOV*, 1892) Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $f : [0,\infty[\times B(0,R) \to \mathbb{R}^d$ für ein $R > 0$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung und $f(t,0) \equiv 0$. Gilt*

$$f(t,v) = o(||v||) \quad \text{für } ||v|| \to 0 \text{ gleichmäßig in } t \tag{3.6}$$

und gilt für alle Eigenwerte λ von $-A$

$$\Re(\lambda) < 0,$$

so ist die Nulllösung von

$$u'(t) + Au(t) = f(t,u(t))$$

asymptotisch (sogar exponentiell) stabil.

Bemerkung.

- $f(t,0)$ ist im Vergleich zu $f(t,\bar{u}) = \bar{u}$ keine Einschränkung.
- Die Bedingung (3.6) bedeutet
  $$\lim_{||v||\to 0} \frac{||f(t,v)||}{||v||} = 0 \quad \text{gleichmäßig in } t,$$
  d.h.
  $$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{t\in[0,\infty[,v\in B(0,R)} : \quad ||v|| > \delta \;\Rightarrow\; \frac{||f(t,v)||}{||v||} < \varepsilon.$$
- Hier ist asymptotische Stabilität in der Regel nicht global.

Beispiel. Betrachte das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 25 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f(v) = ||v|| \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$. Dann ist die Nulllösung stabil bis $||u_0|| \approx 0,01$. Ist $||u_0||$ größer, so ist Nulllösung instabil. Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 200 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist die Nulllösung schon bei $||u_0|| \approx 10^{-3}$ instabil.

Beweis. (Satz von LJAPUNOV)

(1) Nulllösung ist Gleichgewichtspunkt, denn $f(t,0) - A \cdot 0 = 0$.

(2) Nach Voraussetzung gibt es Konstanten $\mu > 0$, $c \geq 1$, so dass
$$||e^{tB}|| \leq ce^{-\mu t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$
Sei $\varepsilon > 0$ zunächst beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ (und o.B.d.A. sei $\delta > R$), so dass für alle $t \geq 0$ gilt
$$||v|| < \delta \;\Rightarrow\; ||f(t,v)|| < \varepsilon ||v||.$$

(3) Wir zeigen nun die globale Lösbarkeit für hinreichend "kleine" u_0:

(a) Sei $v(t) := e^{(t-t_0)A}u(t)$, $g(t,w) := e^{(t-t_0)A}f(t, e^{-(t-t_0A)}w)$ für ein $t_0 \in [0,\infty[$. Dann sind die beiden Probleme
$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t,u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
und
$$\begin{cases} v'(t) = g(t,v(t)) \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$$
äquivalent. Die lokale Lösbarkeit de Problems in v ist wie folgt einzusehen:
Sei $||u_0|| < \frac{\delta}{2\varepsilon} \leq \delta$. Wir wenden den Satz von Peano mit der Kugel $\bar{B}(u_0, r)$ an, wobei $r := ||u_0||$ sei. Dieser liefert uns die lokale Lösbarkeit, und zwar auf einem Intervall $[t_0, t_0+a]$ (Wir wollen nur Lösungen nach rechts betrachten.) Beachte auch, dass $\bar{B}(u_0,r) \subset \bar{B}(0, 2||u_0||) \subset B(0,\delta)$.
Dabei muss a folgender Bedingung genügen (siehe Beweis des Satzes von Peano und dort Selbstabbildungseigenschaft der Fixpunktabbildung):
$$a \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_0+a] \\ w \in \bar{B}(u_0,r)}} ||g(t,w)|| \leq r.$$

(b) (Bestimmung von a) Es gilt nun für $w \in \bar{B}(u_0,r)$ und $t \in [t_0, t_0+a]$
$$\begin{aligned} ||e^{-(t-t_0)A}w|| &\leq c \cdot e^{-\mu(t-t_0)}||w|| \\ &\leq c(||u_0|| + r) \\ &= 2c||u_0|| < \delta \end{aligned}$$
und daher
$$\begin{aligned} ||g(t,w)|| &= ||e^{(t-t_0)A}f(t, e^{-(t-t_0)A}w)|| \\ &\leq e^{(t-t_0)||A||} \cdot \varepsilon \cdot ||e^{-(t-t_0)A}w|| \\ &\leq e^{a||A||} \cdot \varepsilon \cdot 2c||u_0||. \end{aligned}$$
Die Bedingung an a lautet nun wegen $r = ||u_0||$
$$ae^{a||A||} \leq \frac{1}{2\varepsilon c}.$$
Da $a \mapsto ae^{a||A||}$ stetig und monoton wachsend ist, können wir stets ein $\bar{a} > 0$ finden, so dass
$$\bar{a}e^{\bar{a}||A||} \leq \frac{1}{2\varepsilon c}.$$

$\bar{a}$ hängt also nur von ε, c und $||A||$ ab.

(c) Außerdem gilt für alle $||u(t)||$ und insbesondere in $t_0 + \bar{a}$

$$\begin{aligned} ||u(t_0+\bar{a})|| &= ||e^{-\bar{a}A}v(t_0+\bar{a})|| \\ &\leq ce^{-\mu\bar{a}}||v(t_0+\bar{a})|| \\ &\leq ce^{-\mu\bar{a}}(||u_0||+r) \\ &= 2c||u_0||e^{-\mu\bar{a}}, \end{aligned}$$

denn $v(t) \in \bar{B}(u_0, r)$für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$. Wählen wir nur ε hinreichend klein, so ist $\bar{a}$ hinreichend groß und es gilt

$$||u(t_0+\bar{a})|| \leq 2c||u_0||e^{-\mu\bar{a}} \leq ||u_0|| < \frac{\delta}{2c}.$$

Dies ist möglich, da $a \mapsto ae^{a||A||}$ monoton wachsend, und ist erfüllt, wenn nur

$$\bar{a}e^{\bar{a}||A||} = \frac{1}{2\varepsilon c} \geq \frac{\ln 2c}{\mu}e^{\frac{\ln 2c}{\mu}||A||}.$$

(d) Wegen der lokalen Lipschitz-Bedingung ist die Lösung sogar eindeutig bestimmt; wir haben also gezeigt: Für (t_0, u_0) mit $||u_0|| < \frac{\delta}{2c}$ und bei hinrechend kleinem ε gibt es auf $[t_0, t_0 + \bar{a}]$ genau eine Lösung mit $||u(t_0 + a)|| \leq ||u_0|| < \frac{\delta}{2c}$, wobei $\bar{a}$ nur von ε, c und $||A||$ abhängt.

(e) Wir können jetzt auf die globale Lösbarkeit für "kleine" u_0 schließen: Betrachte die lokale Lösung zu den Anfangsdaten $(0, u_0)$ mit $||u_0|| < \frac{\delta}{2c}$ (bei ε klein wie oben beschrieben). Diese existiert auf $[0, \bar{a}]$. Wegen $||u(\bar{a})|| \leq ||u_0|| < \frac{\delta}{2c}$ können wir die Lösung nach rechts auf $[0, 2\bar{a}]$ fortsetzen und wieder gilt $||u(2\bar{a})|| \leq ||u(\bar{a})|| \leq ||u_0|| < \frac{\delta}{2c}$. Diesen Prozess können wir beliebig oft wiederholen, womit die globale Lösbarkeit gezeigt ist.

(4) Wir kommen nun zur Stabilität. Es gilt

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s, u(s))ds,$$

so dass

$$\begin{aligned} ||u(t)|| &= e^{-tA}||u_0|| + \int_0^t ||e^{-(t-s)A}|| \cdot ||f(s,u(s))||ds \\ &\leq ce^{-\mu t}||u_0|| + \int_0^t ce^{-\mu(t-s)}\varepsilon||u(s)||ds. \end{aligned}$$

Letzteres gilt, da $||u(s)|| < \frac{\delta}{2c} \leq \delta$ für alle $s \geq 0$. Es folgt

$$e^{\mu t}||u(t)|| \leq c||u_0|| + \int_0^t ce^{\mu s}\varepsilon||u(s)||ds$$

und mit dem Gronwallschen Lemma

$$e^{\mu t}||u(t)|| \leq e^{c\varepsilon t}c||u_0||,$$

also

$$||u(t)|| \leq c||u_0||e^{-(\mu-c\varepsilon)t}$$

wobei $\mu - c\varepsilon > 0$ für hinreichen kleines ε.

$\square$

Wir betrachten nun nichtlineare Systeme und linearisierten um einen Gleichgewichtspunkt:

Sei $f : M \to \mathbb{R}^d$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$ offen.* Sei ferner $\bar{u}$ ein Gleichgewichtspunkt, so dass also $\bar{u} \in M$ und $f(\bar{u}) = 0$ für alle $t \in [0, \infty[$. Dann folgt

$$u'(t) = f(u(t)) = f(\bar{u}) + D_u f(\bar{u}) \cdot (u(t) - \bar{u}) + o(||u(t) - \bar{u}||).$$

Somit haben wir

$$(u(t) - \bar{u})' - D_u f(\bar{u}) \cdot (u(t) - \bar{u}) = o(||u(t) - \bar{u}||),$$

also exakt die Situation aus dem zuvor bewiesenen Satz. Damit haben wir

Theorem 3.7. *(linearisierte Stabilität) Genüge f den Voraussetzungen (*) und sei $\bar{u}$ ein Gleichgewichtspunkt von f. Ferner existiere die Jacobimatrix von f in $\bar{u}$. Besitzt diese nur Eigenwerte λ mit $\Re(\lambda) < 0$, so ist $\bar{u}$ asymptotisch (sogar exponentiell) stabil.*

Beweis. ... klar. $\square$

Bemerkungen.

- Man kann ferner zeigen, dass $\bar{u}$ instabil ist, falls es einen Eigenwert λ mit $\Re(\lambda) > 0$ gibt.

- Gilt zwar $\Re(\lambda) \leq 0$, so ist gleichwohl keine Aussage möglich, denn für

  $u' = u^2$ ist $\bar{u} = 0$ instabil,
  $u' = 0$ ist $\bar{u} = 0$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil,
  $u' = -u^3$ ist $\bar{u} = 0$ zwar asymptotisch, aber nicht exponentiell stabil,
  $u' = -u$ ist $\bar{u} = 0$ exponentiell stabil.

- Ist u eine Lösung und gilt - im autonomen Fall -

  $$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_\infty \in \mathbb{R}^d,$$

  so ist u_∞Gleichgewichtspunkt, denn komponetenweise gilt

  $$\begin{aligned} \underbrace{u_i(n+1) - u_i(n)}_{\to 0} &= \frac{d}{dt} u_i(n + \vartheta(1-n)) \\ &= f_i(u(n + \vartheta(1-n)) \to f_i(u_\infty)), \end{aligned}$$

  so dass $f_i(u_\infty) = 0$.

4. Klassische Lösbarkeit von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

Das gesamte Kapitel ist unter denselben Überschriften auf den Seiten 1 - 56 nachzulesen.

4.1. Grundbegriffe und elementare Aussagen.

4.2. Randwertprobleme für homogene, lineare Differentialgleichungen.

4.3. Greensche Funktion und semilineare Probleme I.

4.4. Greensche Funktion und inhomogene, lineare Probleme.

4.5. Maximumprinzip und Stabilität.

4.6. Sturm-Liouville-Problem.

4.7. Greensche Funktion und semilineare Probleme II.

4.8. Ober- und Unterlösungen.