Satz von Ljapunov (1892) $\quad u'(t) + Au(t) = f(t, u(t))$

$A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $f : [0,\infty) \times B(0,R) \to \mathbb{R}^d$ für ein $R>0$ stetig und

genüge lokaler Lipschitz-Bedingung, $f(t,0) \equiv 0$

$\|f(t,v)\| / \|v\| \to 0$ für $\|v\| \to 0$ gleichmäßig in t

$Re(\lambda) < 0 \quad \forall$ EW λ von $-A$

$\Rightarrow$ Nullösung ist exponentiell stabil

Beweis:

1) Nullösung ist Gleichgewichtspunkt, denn $f(t,0) - A\cdot 0 = 0$

2) Nach Voraussetzung gibt es Konstanten $\mu > 0$, $c \geq 1$, so daß

$$\|e^{-tA}\| \leq c\, e^{-\mu t} \quad \forall t \geq 0$$

Sei $\varepsilon > 0$ zunächst beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ (und oBdA sei $\delta < R$), so daß $\forall t \geq 0$ gilt

$$\|v\| < \delta \Rightarrow \|f(t,v)\| < \varepsilon \|v\|$$

3) Wir zeigen nun die globale Lösbarkeit für hinreichend „kleine" u_0:

a) Sei $v(t) := e^{(t-t_0)A} u(t)$, $g(t,w) := e^{(t-t_0)A} f(t, e^{-(t-t_0)A} w)$

für ein $t_0 \in [0,\infty)$. Dann sind die beiden Probleme

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t,u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(t) = g(t,v(t)) \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$$

äquivalent.

Die lokale Lösbarkeit des Problems in v ist wie folgt einzusehen:

Sei $\|u_0\| < \delta/2c \leq \delta$. Wir wenden den Satz von Peano mit der Kugel $\overline{B}(u_0, r)$ an, wobei $r := \|u_0\|$ sei.

Dieser liefert uns die lokale Lösbarkeit, und zwar auf einem Intervall $[t_0, t_0 + a]$.

(Wir wollen nur Lösung nach rechts betrachten.)

Beachte auch, daß $\overline{B}(u_0, r) \subseteq \overline{B}(0, 2\|u_0\|) \subset B(0,\delta)$.

Dabei muß a folgender Bedingung genügen (siehe Beweis des Satzes von Peano und das Selbstabbildungseigenschaft der Fixpunktabbildung):

$$a \cdot \max_{\substack{t \in [t_0, t_0+a] \\ w \in \overline{B}(u_0, r)}} \|g(t,w)\| \leq r$$

b) (Bestimmung von a)

Es gilt nun für $w \in \overline{B}(u_0, r)$ und $t \in [t_0, t_0+a]$

$$\|e^{(t-t_0)A} w\| \leq c e^{-\mu(t-t_0)} \|w\|$$
$$\leq c \left(\|u_0\| + r\right) = 2c\|u_0\| < \delta$$

und daher

$$\|g(t,w)\| = \|e^{(t-t_0)A} f(t, e^{-(t-t_0)A} w)\|$$
$$\leq e^{(t-t_0)\|A\|} \varepsilon \|e^{-(t-t_0)A} w\|$$
$$\leq e^{a\|A\|} \cdot \varepsilon \cdot 2c\|u_0\|.$$

Die Bedingung an a lautet nun (wegen $r = \|u_0\|$)

$$a e^{a\|A\|} \leq 1/_{2\varepsilon c}.$$

Da $a \mapsto a e^{a\|A\|}$ stetig und monoton wachsend ist, können wir stets ein $\bar{a} > 0$ finden, so daß

$$\bar{a} e^{\bar{a}\|A\|} = 1/_{2\varepsilon c},$$

$\bar{a}$ hängt also nur von ε, c und $\|A\|$ ab.

c) Außerdem gilt für alle $\|u(t)\|$ und insbesondere in $t_0 + \bar{a}$

$$\|u(t_0+\bar{a})\| = \|e^{-\bar{a}A} v(t_0+\bar{a})\|$$
$$\leq c e^{-\mu\bar{a}} \|v(t_0+\bar{a})\|$$
$$\leq c e^{-\mu\bar{a}} \left(\|u_0\| + r\right)$$
$$= 2c\|u_0\| e^{-\mu\bar{a}},$$

denn $v(t) \in \overline{B}(u_0, r)$ für alle $t \in [t_0, t_0+a]$.

Wählen wir nun ε hinreichend klein, so ist $\bar{a}$ hinreichend groß und es gilt

$$\|u(t_0+\bar{a})\| \leq 2c\|u_0\| e^{-\mu\bar{a}} \leq \|u_0\| < \delta/_{2c}$$

Dies ist möglich, da $a \mapsto a e^{a\|A\|}$ monoton wachsend, und (?) erfüllt, wenn nur

$$\bar a e^{\bar a \|A\|} = \frac{1}{2\varepsilon c} \geq \frac{\ln 2c}{\mu} e^{\frac{\ln 2c}{\mu}\|A\|} .$$

d) Wegen der lokalen Lipschitz-Bedingung ist die Lösung sogar eindeutig bestimmt; wir haben also gezeigt: für (t_0, u_0) mit $\|u_0\| < \delta/2c$ und bei hinreichend kleinem ε gibt es auf $[t_0, t_0+\bar a]$ genau eine Lösung mit $\|u(t_0+\bar a)\| \leq \|u_0\| < \delta/2c$, wobei $\bar a$ nur von ε, c und $\|A\|$ abhängt.

e) Wir können jetzt die globale Lösbarkeit für „kleine" u_0 schließen: Betrachte die lokale Lösung zu den Anfangsdaten $(0, u_0)$ mit $\|u_0\| < \delta/2c$ (bei ε klein wie oben beschrieben). Diese existiert auf $[0, \bar a]$. Wegen $\|u(\bar a)\| \leq \|u_0\| < \delta/2c$, können wir die Lösung nach rechts auf $[0, 2\bar a]$ fortsetzen und wieder gilt $\|u(2\bar a)\| \leq \|u(\bar a)\| \leq \|u_0\| < \delta/2c$. Diesen Prozeß können wir beliebig oft wiederholen, womit die globale Lösbarkeit gezeigt ist

4) Wir kommen nun zur Stabilität. Es gilt

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s, u(s))\, ds ,$$

so daß

$$\|u(t)\| \leq \|e^{-tA}\| \|u_0\| + \int_0^t \|e^{-(t-s)A}\| \|f(s,u(s))\| ds$$
$$\leq c e^{-\mu t}\|u_0\| + \int_0^t c e^{-\mu(t-s)} \varepsilon \|u(s)\| ds.$$

Letzteres gilt, da $\|u(s)\| < \delta/2c \leq \delta \quad \forall s \geq 0$.

Es folgt $e^{\mu t}\|u(t)\| \leq c\|u_0\| + \int_0^t c\varepsilon e^{\mu s} \|u(s)\| ds$ und mit Gronwallschem Lemma

$e^{\mu t}\|u(t)\| \leq e^{c\varepsilon t} c\|u_0\|$, also $\|u(t)\| \leq c\|u_0\| e^{-(\mu - c\varepsilon)t}$

wobei $\mu - c\varepsilon > 0$ für hinreichend kleines ε. #

alternativer Beweis

1) Nullösung ist Gleichgewichtslösung

2) Es gibt Konstanten $\mu > 0$, $c \geq 1$, so daß $\forall t \geq 0$: $\|e^{-tA}\| \leq c e^{-\mu t}$

3) a) Zu jedem $(t_0, u_0) \in [0,\infty) \times B(0,2)$ existiert genau eine maximal fortgesetzte Lösung auf einem Intervall $[t_0, \beta(t_0,u_0))$. Wir wollen $\|u_0\| < \delta/c$ annehmen. Wegen der Stetigkeit der Lösung gilt zumindest in einem Intervall $[t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta)) \subseteq [t_0, \beta(t_0,u_0))$, daß $\|u(t)\| < \delta$ (denn $\|u(t_0)\| < \delta/c \leq \delta$).

b) Solange $t \in [t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta))$, gilt ferner

$$u(t) = e^{-(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)A} f(s,u(s))\, ds$$

sowie

$$\|u(t)\| \leq c e^{-\mu(t-t_0)} \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} c e^{-\mu(t-s)}\, \varepsilon \|u(s)\|\, ds,$$

denn $\|f(s,u(s))\| \leq \varepsilon \|u(s)\|$, siehe Nr. 2 des vorigen Beweises.
Mit Gronwallschen Lemma folgt – wie schon unter Nr. 4 in der vorigen Beweisvariante –

$$\|u(t)\| \leq e^{-(\mu - c\varepsilon)(t-t_0)}\, c\|u_0\|$$

$$\leq c\|u_0\| < \delta \quad \text{, wobei } \varepsilon < \mu/c \text{ gelte}$$

c) Betrachten wir jetzt u_0 mit $\|u_0\| < \eta/c < \delta/c \leq \delta$, so folgt für alle $t \in [t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta))$ immer noch

(*) $\quad \|u(t)\| < c\|u_0\| < \eta$.

Es folgt $\beta'(t_0,u_0,\delta) = \beta(t_0,u_0)$, denn andernfalls würde $\|u(\beta'(t_0,u_0,\delta))\| = \delta$ gelten und es würde ein $t^* \in [t_0, \beta'(t_0,u_0,\delta))$ mit $\|u(t^*)\| \geq \eta$ geben, da u stetig ist. Das aber widerspricht (*).

d) Für $\|u_0\| < \eta/c < \delta/c \le \delta$ haben wir nun also die Lösbarkeit auf $[0, \beta(t_0,u_0))$ und es gilt stets $\|u(t)\| \le e^{-(\mu - c\varepsilon)(t-t_0)} c\|u_0\| < \eta < \delta < R$.
Das aber heißt, daß die Lösung auf dem gesamten Existenzintervall beschränkt ist mit $\delta < R$.
Wegen des Randverhaltens von Lösungen ist dies nur im Falle $\beta(t_0,u_0) = \infty$ möglich.
Das zeigt insbesondere die globale Lösbarkeit bei Anfangsbedingungen $u(0) = u_0$ mit u_0 „klein".

4) Die exponentielle Stabilität folgt aus der Ableitung unter 3.b).

#