

Differentialgleichungen I

1. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 29.10. bis zum 2.11.

Aufgabe 1:

6 Punkte

Bestimme jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und löse anschließend das entsprechende Anfangswertproblem.

(i) $u' = tu^{-1}(1 + u^2), \quad u(0) = 1;$

(ii) $u' + 2u = \sin(t), \quad u(0) = 0.$

(iii) $u'' - 2u' + 5u = \exp(t), \quad u(0) = 1, u'(0) = 2.$

Aufgabe 2:

3 Punkte

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y/x + \ln(x), \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

und gib das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Aufgabe 3:

3 Punkte

Eine Differentialgleichung vom Typ $y' = f(y/x)$ kann durch Einführung einer neuen Variablen $u = y/x$ in eine Differentialgleichung vom Typ $u' = (f(u) - u)/x$ überführt werden.

Löse mit dieser Methode das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = (9x^2 + 3y^2)/2xy, \\ y(2) = 2. \end{cases}$$

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Sei j eine reelle Zahl. Zeige, daß $j \leq 4/9$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Randwertproblems ¹

$$\begin{cases} \phi''(x) = \frac{j}{\sqrt{\phi(x)}} & \text{für } x \in (0, 1) \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 1 \end{cases}$$

ist.

(Hinweis: Mit ϕ' multiplizieren und zweimal geeignet integrieren.)

Aufgabe 5:**4 Punkte**

Es sei T eine kontrahierende Abbildung eines metrischen Raumes (X, d) in sich. Zeige, daß auf die Existenz eines Fixpunktes nicht geschlossen werden kann, falls X nicht vollständig ist. Was ist mit der Eindeutigkeit?

Sei nun Vollständigkeit von X gegeben.

Zeige: Aus

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \quad x, y \in X$$

folgt weder Existenz noch Eindeutigkeit eines Fixpunktes von T und aus

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad x, y \in X, \quad x \neq y$$

folgt zwar Eindeutigkeit, nicht aber die Existenz eines Fixpunktes von T . Zeige weiterhin, daß es im Banachschen Fixpunktsatz genügt zu fordern, daß T^m eine Kontraktion ist für ein festes $m \in \mathbb{N}$.

¹Dieses Randwertproblem ist eng verbunden mit dem Gesetz von CHILD-LANGMUIR, welches den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Spannung in einer Diode beschreibt, die aus zwei unendlichen, parallelen Platten in einem Vakuum besteht. Das Gesetz findet Anwendung z.B. in der Plasmaphysik.