Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

10.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 14.1. bis zum 18.1.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

In unendlichdimensionalen Räumen reicht die Stetigkeit der rechten Seite im allgemeinen nicht aus, um die (lokale) Existenz einer Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \\ u(t_0) = u_0, \quad t_0 \in [0, T], \end{cases}$$

zu gewährleisten. Das folgende Gegenbeispiel wurde in der Vorlesung angegeben.

Es sei $X = c_0$ der Raum der Nullfolgen, versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

wobei die k-te Komponente von u^0 gegeben ist durch $u_k^0 = 1/k^2$ und die k-te Komponente von $f(u)$ durch

$$f(u)_k := 2\sqrt{|u_k|}$$

für $u \in c_0$. Obgleich $f : c_0 \to c_0$ stetig ist, besitzt das AWP auf beliebig kleinen Intervallen um $t_0 = 0$ keine Lösung.

Hier nun die Aufgaben:

(i) Wieso ist auf dieses AWP der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar? (Zeige, daß $f : c_0 \to c_0$ zwar stetig is, aber keiner geeigneten Lipschitz-Bedingung genügt.)

(ii) Betrachte dieses AWP im Raum l^∞ der beschränkten Folgen. Ist nun der Satz von Picard-Lindelöf oder jener von Peano anwendbar[1]?

(iii) Betrachte dieses AWP nochmals im Raum l^∞ und bestimme unendlich viele Lösungen zur Anfangsbedingung $u^0 = (0, 0, \dots)$. Ist die Menge aller Lösungen kompakt?

Zusatzaufgabe (4 Punkte):
(a) Zeige, daß die Lösungsmenge die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Ist die Mächtigkeit der Lösungsmenge somit größer oder gleich $\aleph_1$?
(b) Benötigt ihr zur Bestimmung der Lösungsmenge das Auswahlaxiom?

[1] Hinweis: Zeige u.a., daß das Bild der beschränkten Menge der „Einheitsfolgen“ unter f nicht relativ kompakt ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Wählt man im Satz von Osgood für die Funktion $\omega = \omega(z)$ z. B. die Funktionen

$$Lz,\ Lz|\ln\frac{1}{z}|,\ Lz|\ln\frac{1}{z}|\ \ln|\ln\frac{1}{z}|,\ldots,$$

so erhält man immer schwächere Einschränkungen an die rechte Seite $f = f(t,u)$. Zeige, daß es keinen „am meisten verschärften“ Satz dieser Art gibt. Zeige also, daß es zu einer den Voraussetzungen des Satzes genügenden Funktion ω immer eine Funktion ω_1 gibt, die ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes genügt und die

$$\lim_{z\to 0}\frac{\omega(z)}{\omega_1(z)} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Wir wollen den folgenden Satz von Leray und Schauder beweisen[2].

> Es sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung
>
> $$u = Au, \quad u \in X \tag{1}$$
>
> eine Lösung, falls folgende *A-priori-Abschätzung* gilt:
>
> > Es gibt ein $r > 0$ derart, daß
> >
> > $$\|u\| \le r$$
> >
> > für jede Lösung u der Gleichung
> >
> > $$u = tAu, \quad u \in X, \quad 0 \le t < 1$$
> >
> > gilt[3].

Hierzu definieren wir die Menge $M := \{u \in X\ :\ \|u\| \le 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au & \text{für } \|Au\| \le 2r, \\ \frac{2rAu}{\|Au\|} & \text{für } \|Au\| > 2r. \end{cases}$$

Zeige, daß B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist. Folgere, daß es einen Fixpunkt für B geben muß und schließlich, daß dann auch eine Lösung von (1) existiert.

Benutze den Satz, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha\int_a^b \sin u(y)dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ im Raum $\mathcal{C}([a,b])$ zu zeigen.

---

[2] Dies ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips: *A-priori-Abschätzung gibt Existenz.*

[3] Bemerkung: Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Bestimme einen geeigneten Folgenraum[4] X, in dem das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u^0 \in X \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

lösbar ist und löse es.

[4] Typische Folgenräume sind z.B. l^p mit $1 \leq p \leq \infty$, c_0 (Raum der Nullfolgen), c (Raum der konvergenten Folgen) etc., jeweils ausgestattet mit passenden Normen.