

Differentialgleichungen I

12. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 28.1. bis zum 1.2.

Aufgabe 1:

5 Punkte

In der Vorlesung wurde das Lemma von Gronwall in der folgenden Form bewiesen:

Sei $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $t_0 \in [0, T)$, $a, b \in L^\infty(t_0, T)$ und $\lambda \in L^1(t_0, T)$, $\lambda(t) \geq 0$ fast überall in $(t_0, T) \ni t$. Dann folgt aus

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s)a(s)ds \quad \text{f. ü. in } (t_0, T)$$

für fast alle $t \in (t_0, T)$

$$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s)b(s)ds,$$

wobei $\Lambda(t) := \int_{t_0}^t \lambda(\tau)d\tau$.

- (i) Die Voraussetzung $\lambda(t) \geq 0$ f.ü. in (t_0, T) ist wesentlich. Konstruiere ein Gegenbeispiel zur Aussage des Gronwallschen Lemmas für den Fall, daß λ nicht der Vorzeichenbedingung genügt.
- (ii) Zeige eine dem Lemma von Gronwall entsprechende Aussage für den Fall, daß $t < t_0$ ist.

Aufgabe 2:

5 Punkte

Wir erinnern uns an die folgende Version des Satzes von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung:

Sei X ein Banachraum. Die Funktion $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ sei stetig und im zweiten Argument bzgl. t gleichmäßig Lipschitz-stetig, so daß es ein $L > 0$ gibt und für alle $t \in [0, T]$ und alle $v, w \in X$

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|$$

gilt. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(t_0) = u_0 \in X \end{cases} \quad (1)$$

auf dem gesamten Zeitintervall genau eine Lösung $u \in C^1([0, T]; X)$.

In dieser Aufgabe soll es um die Stabilitätseigenschaften eines solchen Problems gehen. Zeige die folgenden Behauptungen.

- (i) Unter den Voraussetzungen des zitierten Satzes sei u die globale Lösung von (1) zum Anfangswert $u_0 \in X$. Dann gibt es auch eine globale Lösung v zum beliebigen Anfangswert $v_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|u_0 - v_0\| \leq e^{LT} \|u_0 - v_0\|.$$

- (ii) Seien für die rechten Seiten $f, g : [0, T] \times X \rightarrow X$ die Voraussetzungen des zitierten Satzes mit den Konstanten L_f und L_g erfüllt. Dann gibt es globale Lösungen u, v von (1) zu derselben Anfangsbedingung $u(t_0) = v(t_0) = u_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq |t - t_0| e^{\min\{L_f, L_g\}|t-t_0|} \sup_{t \in [0, T], w \in X} \|f(t, w) - g(t, w)\| \\ &\leq T e^{\min\{L_f, L_g\}T} \sup_{t \in [0, T], w \in X} \|f(t, w) - g(t, w)\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

5 Punkte

Sei $(H(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ ein akkretiver Operator, d. h. $-A$ sei dissipativ. Zeige, daß der Operator $R_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ (wobei $I : H \rightarrow H$ die identische Abbildung ist) für jedes $\lambda \geq 0$ als linearer und beschränkter Operator in H existiert und *nichtexpansiv* ist, d.h. für alle $u, v \in H$ gilt

$$\|R_\lambda u - R_\lambda v\| \leq \|u - v\|.$$

Hinweis: Für $\lambda \neq 0$ betrachte zur Lösung von $(I + \lambda A)u = f$ die Rekursionsvorschrift

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (I + \lambda A)u^n = f$$

für ein beliebiges $u^0 \in H$ und $\tau > 0$ geeignet gewählt.

Aufgabe 4:

5 Punkte

Lies den Artikel von PH. KORMAN [1] – der dritte Abschnitt ist für uns nicht wichtig – und bearbeite die folgenden Aufgaben:

- (i) Fasse (**kurz: wenige Sätze**) den Inhalt des Artikels zusammen (Worum geht es?).
- (ii) Formuliere (Lemma 2.1 und das folgende Korollar) **oder** (Theorem 2.1) als eigenständige Aussagen und beweise sie.

Der Artikel ist über <http://www.emis.de/journals/PM/> frei zugänglich, kann aber auch bei uns (Kasten im Flur) abgeholt werden.

[1] KORMAN, P. : Remarks on Nagumo's condition. In: *Port. Math.* 55 (1998), Nr. 1, S. 1–9