Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

13.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 4.2. bis zum 8.2.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Für eine äquidistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0,T]$ in N Teilintervalle der Länge $\Delta t = T/N$ betrachte man das folgende Schema:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1; u^0 \text{ gegeben},$$

mit $t_{n+\frac{1}{2}} := \frac{t_n + t_{n+1}}{2}$ und $u^{n+\frac{1}{2}} := \frac{u^n + u^{n+1}}{2}$, zur Approximation der Lösung $u(t_n) \approx u^n$ des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Zeige die Wohldefiniertheit des Verfahrens, A-priori-Abschätzungen für $\{u^n\}$, $\{\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\}$ und, daß der Fehler sich wie $(\Delta t)^2$ verhält,wenn u''' existiert und geeignet integrierbar ist.
Hinweis: Für die Lösung ist u.a. zu zeigen, daß

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} = \rho^n := \frac{1}{2\Delta t}\Big(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (t - t_n)^2 u'''(t)dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^2 u'''(t)dt\Big) \\ + f(t_{n+\frac{1}{2}}, u(t_{n+\frac{1}{2}})) - f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}})$$

gilt.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben sei eine skalare autonome Differentialgleichung

$$u' = \gamma u^n, \quad t \geq 0$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuche, ob die Nulllösung stabil (asymptotisch / exponentiell) bzw. attraktiv ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Beweise: Für eine rechte Seite f, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt, folgt aus der exponentiellen die asymptotische Stabilität.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Bestimme alle Gleichgewichtspunkte der folgenden Systeme und untersuche deren Stabilität.

(i)

$$\begin{aligned} u' &= 5u - u^2 - uw \\ w' &= -2w + uw, \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} u' &= u(1 - w) \\ w' &= w(u - 1) \end{aligned}$$

(iii) Aus der Vorlesung bekannt ist das SIR-Modell zur Beschreibung von Krankheitsausbreitungen. Bestimme die Gleichgewichtspunkte des Modells und untersuche deren Stabilität:

$$\begin{aligned} S' &= -\alpha SI \\ I' &= \alpha SI - \beta I \\ R' &= \beta I. \end{aligned}$$